Rekursjon

I. TRE AV REKURSIVE KALL,

rekursjonsdybde

terminering – ordning

II. INDUKTIVE DATA TYPER

og Rekursjon over slike

III. "SPLITT OG HERSK" – PROBLEMLØSNING VED REKURSJON (Kap. 10.1.1)

IV. STABEL AV REKURSIVE KALL

iterasjon til rekursjon

rekursjon implementert som iterasjon

V. KORREKTHET

terminering

invarianter (notat til Krogdahl&Haveraaen)

1. En metode “kaller seg selv”

```
/**  en heltallsfunksjon fakultet (factorial (!)) defineres som
 *   0! = 1
 *   (n+1)! = (n+1) * n!
 */
```

```
/** Algoritme som beregner fact(n)
 *  @param n >= 0
 *  @return fact(n)
 *  @exception  ingen unntak    **/

public int fact( int n ) {
    int r = 1;
    while (n > 1)
        r = r * n;
        n = n – 1;
    return r;
}
```

1. En metode “kaller seg selv”

```
/**  en heltallsfunksjon fakultet (factorial (!)) defineres som
 *      0! = 1
 *      (n+1)! = (n+1) * n!
 */
```

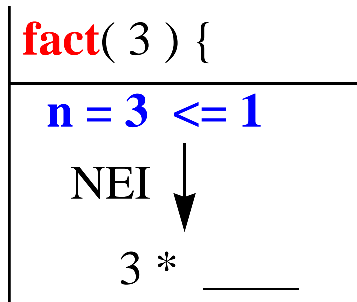
```
/** Algoritme som beregner fact(n)
 *   @param n >= 0
 *   @return fact(n)
 *   @exception  ingen unntak    **/

public int fact( int n ) {
   int r = 1;
   while (n > 1)
      r = r * n;
      n = n – 1;
   return r;
}
```

```
public int fact( int n ) {
      if (n <= 1) return 1;
      else   return  n *  fact( n–1 );
}
```

1. En metode “kaller seg selv”

```
/**  heltallsfunksjon fact (!):
*    0! = 1
*    (n+1)! = (n+1) * n!
*/
```

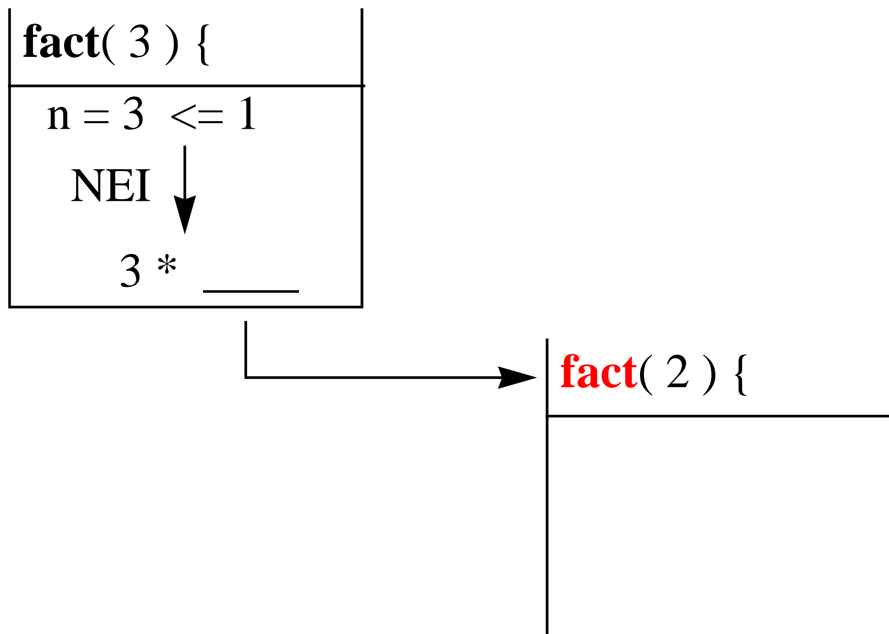
```
public int fact( int n ) {
    if (n <= 1) return 1;
    else   return  n *  fact( n–1 );
}
```



1. En metode "kaller seg selv"

```
/**  heltallsfunksjon fact (!):
*    0! = 1
*    (n+1)! = (n+1) * n!
*/
```

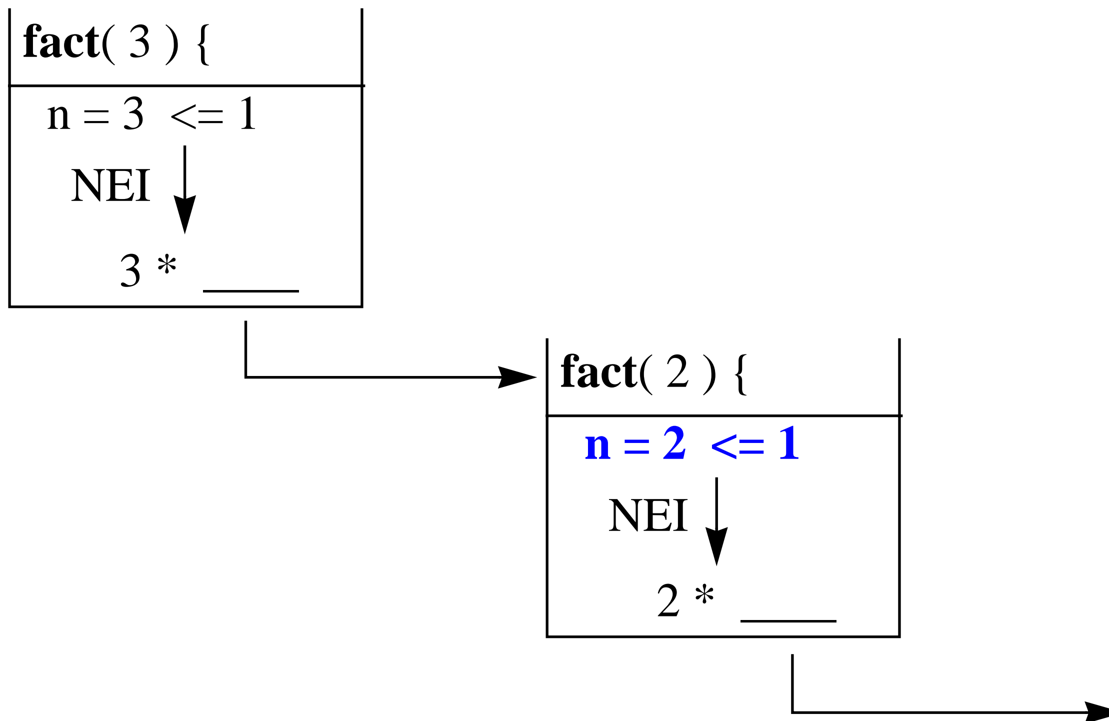
```
public int fact( int n ) {
    if (n <= 1) return 1;
    else   return  n *  fact( n–1 );
}
```



1. En metode "kaller seg selv"

```
/**  heltallsfunksjon fact (!):
*    0! = 1
*    (n+1)! = (n+1) * n!
*/
```

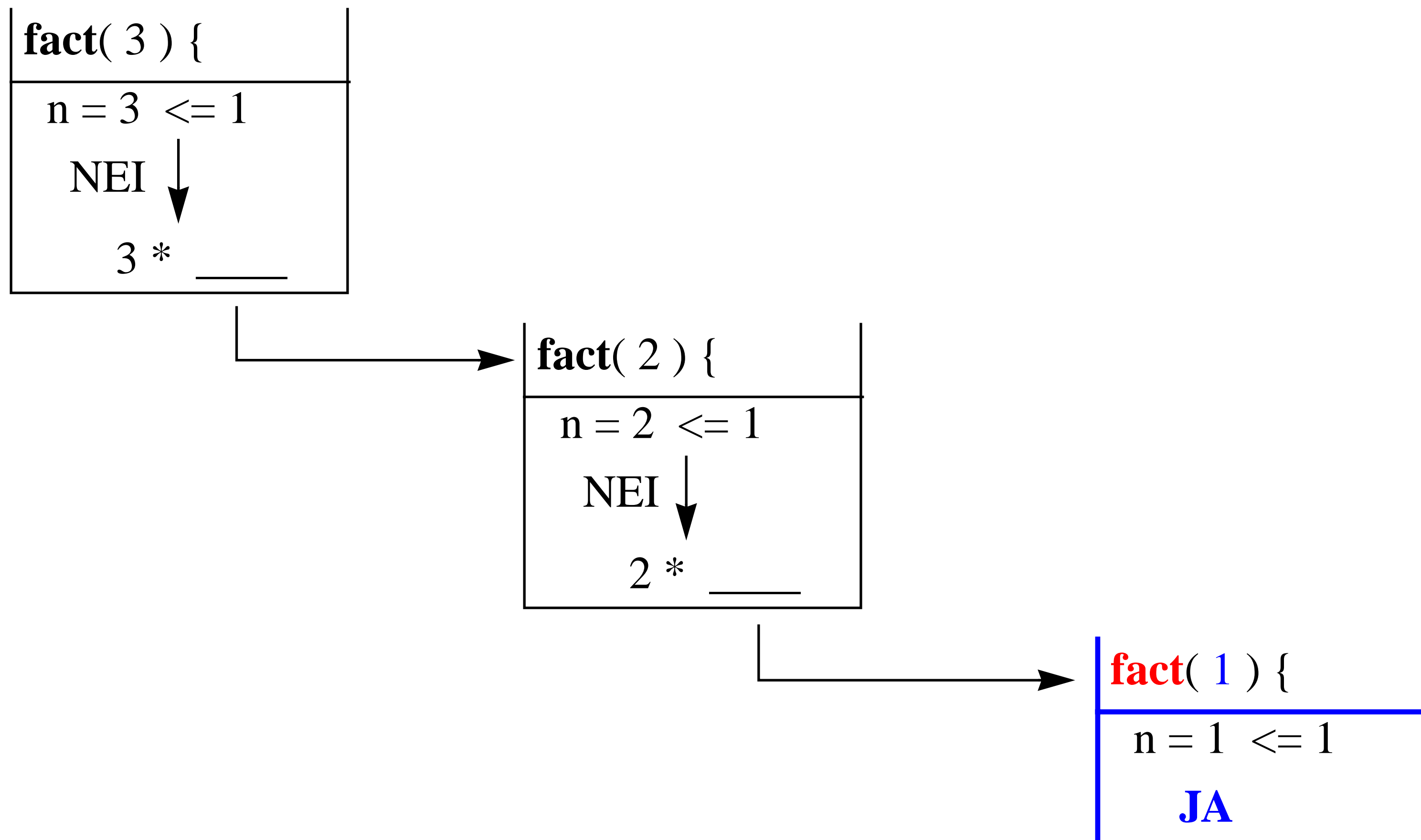
```
public int fact( int n ) {
    if (n <= 1) return 1;
    else  return  n *  fact( n–1 );
}
```



1. En metode "kaller seg selv"

```
/**  heltallsfunksjon fact (!):
*    0! = 1
*    (n+1)! = (n+1) * n!
*/
```

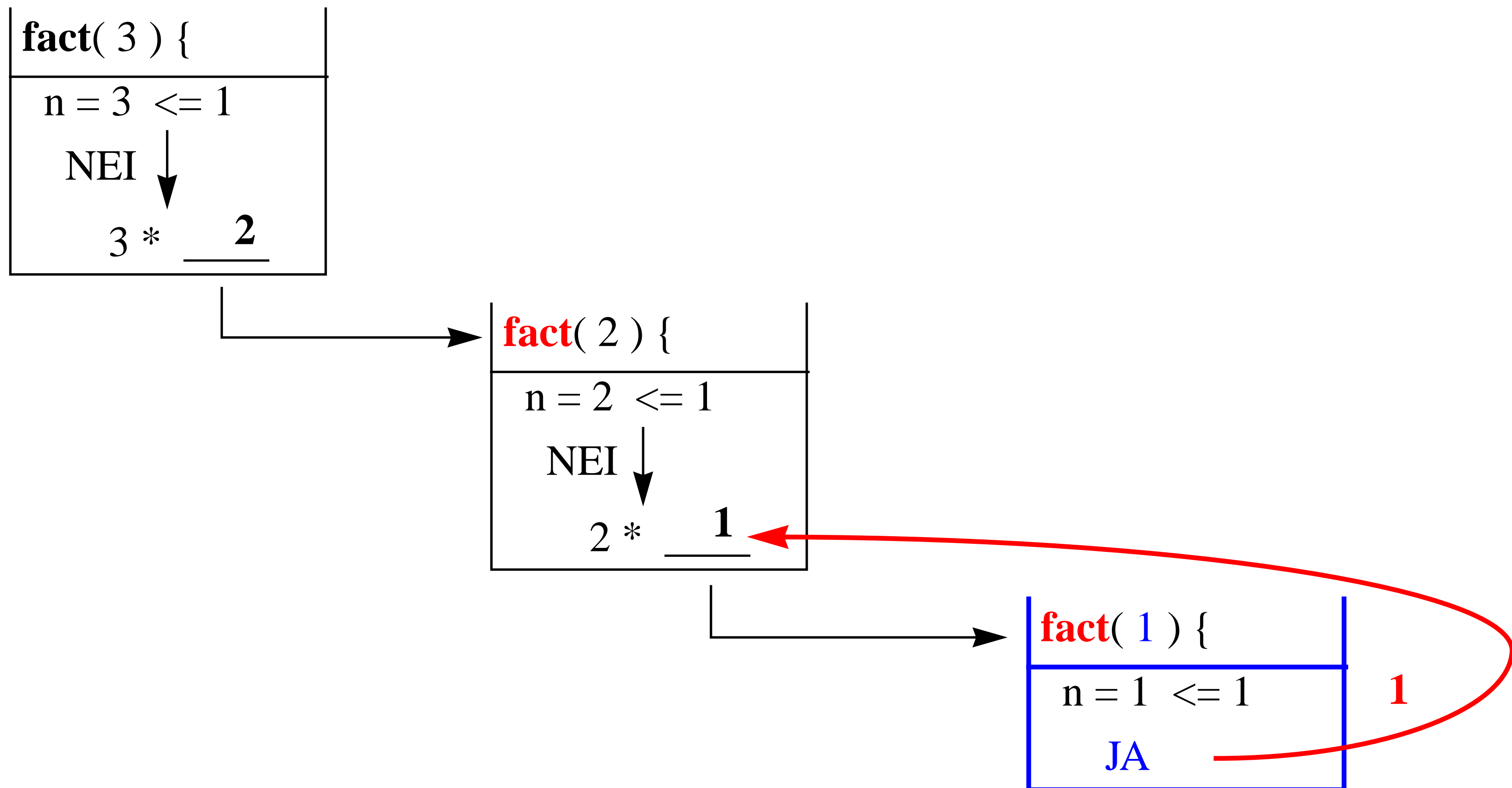
```
public int fact( int n ) {
    if (n <= 1) return 1;
    else  return n * fact( n–1 );
}
```



1. En metode “kaller seg selv”

```
/**  heltallsfunksjon fact (!):
*    0! = 1
*    (n+1)! = (n+1) * n!
*/
```

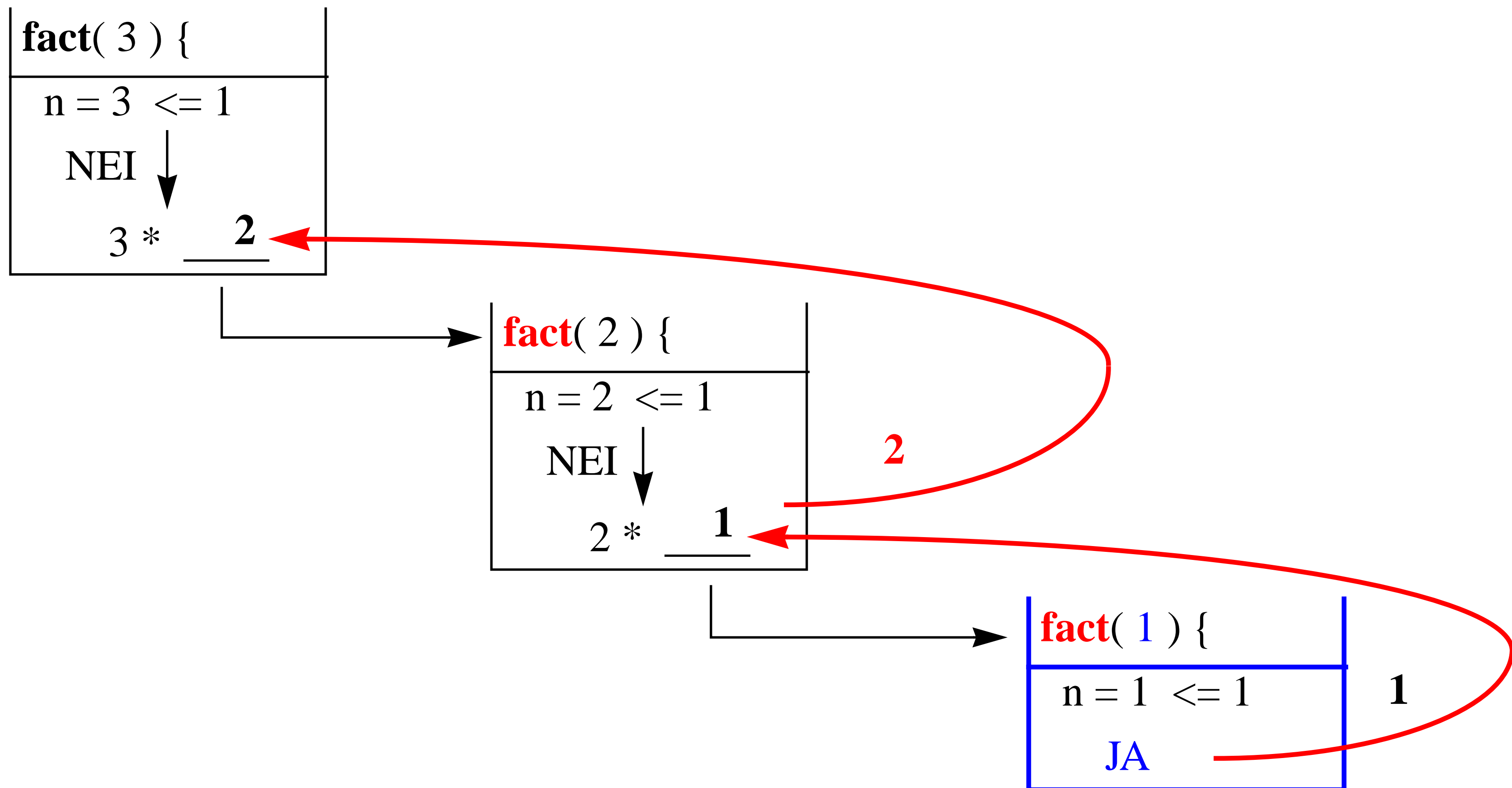
```
public int fact( int n ) {
    if (n <= 1) return 1;
    else  return  n *  fact( n–1 );
}
```



1. En metode "kaller seg selv"

```
/**  heltallsfunksjon fact (!):
 *   0! = 1
 *   (n+1)! = (n+1) * n!
 */
```

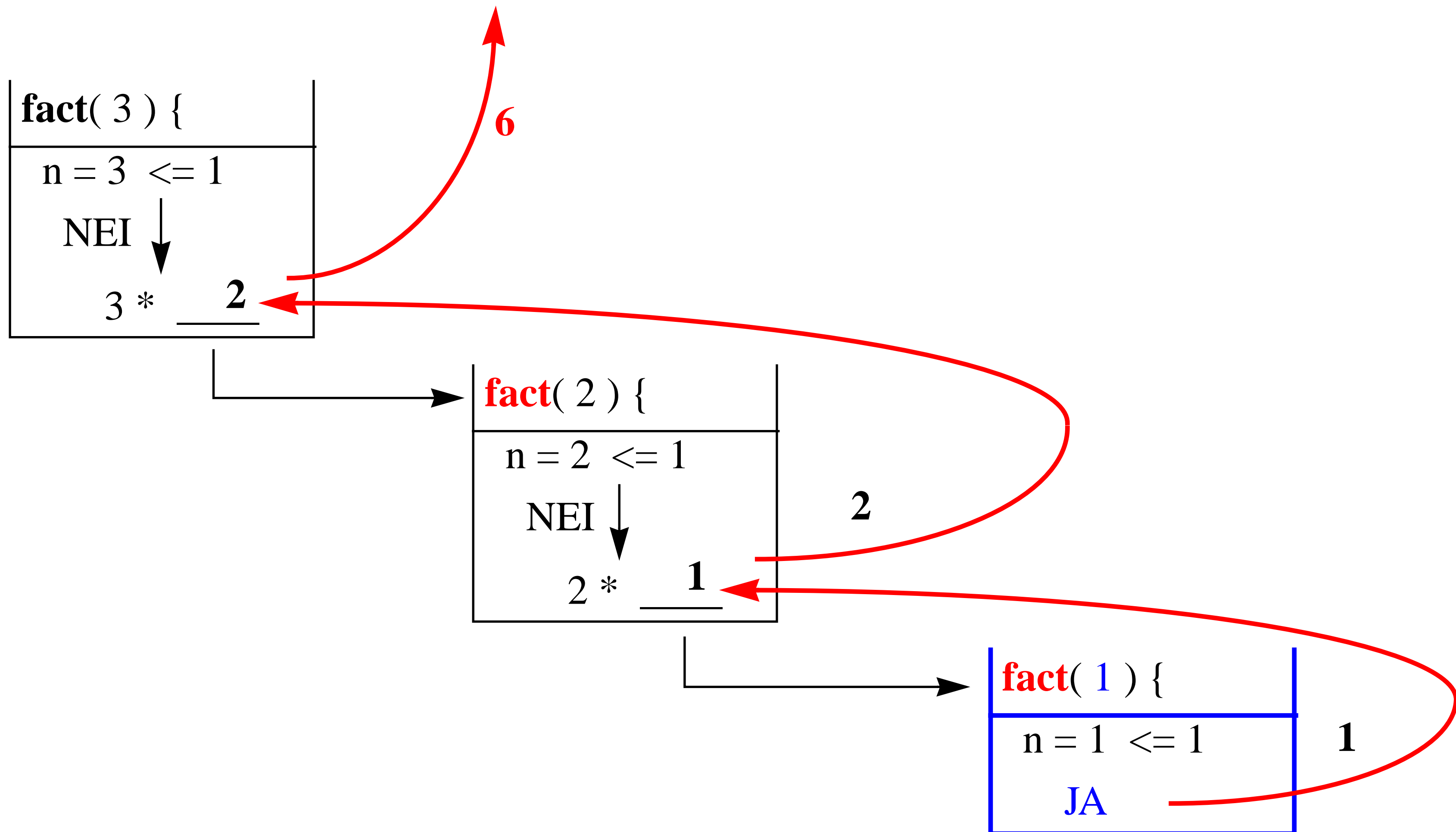
```
public int fact( int n ) {
    if (n <= 1) return 1;
    else   return  n *  fact( n–1 );
}
```



1. En metode "kaller seg selv"

```
/**   heltallsfunksjon fact (!):
 *    0! = 1
 *    (n+1)! = (n+1) * n!
 */
```

```java
public int fact( int n ) {
    if (n <= 1) return 1;
    else   return  n *  fact( n–1 );
}
```



1. En metode "kaller seg selv"

```
/**   en heltallsfunksjon fakultet (factorial (!)) defineres som
 *     0! = 1
 *     (n+1)! = (n+1) * n!
 */
```

```
/** Algoritme som beregner fact(n)
 *   @param n >= 0
 *   @return fact(n)
 *   @exception  ingen unntak    **/

public int fact( int n ) {
   int r = 1;
   while (n > 1)
      r = r * n;
      n = n – 1;
   return r;
}
```

```
public int fact( int n ) {
        if (n <= 1) return 1;
        else   return  n *  fact( n–1 );
}
```

- fact(n) vil alltid terminere – Hvorfor?

1. En metode "kaller seg selv"

```
/**  en heltallsfunksjon fakultet (factorial (!)) defineres som
 *     0! = 1
 *     (n+1)! = (n+1) * n!
 */
```

```
/** Algoritme som beregner fact(n)
 *   @param n >= 0
 *   @return fact(n)
 *   @exception  ingen unntak    **/

public int fact( int n ) {
   int r = 1;
   while (n > 1)
      r = r * n;
      n = n – 1;
   return r;
}
```

```
public int fact( int n ) {
      if (n <= 1) return 1;
      else   return  n *  fact( n–1 );
}
```

- fact(n) vil alltid terminere – Hvorfor?
- Hva med:

```
public int hack( int n ) {
   if (n <= 1) return 1;
   else   return  n *  hack( n+1 );
}
```

1. Binær Søk

```
/*   finn indeks i A til et element x:
*    @param A  int A[...] sortertint
*    @param x  finn x i A
*    @param l, h søk i A bare fom. l tom. h
*    @return      indeks til x;
*                 –1 hvis x ikke finnes
*/
```

```
int BS(int[] A,x,l,h) {
    m= (l+h) / 2 ;
    if (l > h) return -1;
    else if (A[m] == x) return m;
    else if (A[m] < x) return BS(A,x,m+1,h);
    else return BS(A,x,l,m-1); }
// initielt kall med BS(A, x, 0, A.length–1)
```

1. Binær Søk

```
/*   finn indeks i A til et element x:
*    @param A  int A[...] sortertint
*    @param x  finn x i A
*    @param l, h søk i A bare fom. l tom. h
*    @return    indeks til x;
*               –1 hvis x ikke finnes
*/
```

```
int BS(int[] A,x,l,h) {
    m= (l+h) / 2 ;
    if (l > h) return -1;
    else if (A[m] == x) return m;
    else if (A[m] < x) return BS(A,x,m+1,h);
    else return BS(A,x,l,m-1); }
// initielt kall med BS(A, x, 0, A.length–1)
```

Nøkkel er 48

1. kall

binSøk(A, 48, 0, 9)

A[]

	A[]	
[0]	11	← l = 0
[1]	19	
[2]	24	
[3]	30	
[4]	32	
[5]	48	
[6]	50	
[7]	55	
[8]	72	
[9]	99	← h = 9

1. Binær Søk

```
/*  finn indeks i A til et element x:
*   @param A  int A[...] sortertint
*   @param x  finn x i A
*   @param l, h søk i A bare fom. l tom. h
*   @return     indeks til x;
*               –1 hvis x ikke finnes
*/
```

```
int BS(int[] A,x,l,h) {
    m= (l+h) / 2 ;
    if (l > h) return -1;
    else if (A[m] == x) return m;
    else if (A[m] < x) return BS(A,x,m+1,h);
    else return BS(A,x,l,m-1); }
// initielt kall med BS(A, x, 0, A.length–1)
```

Nøkkel er 48

1. kall

binSøk(A, 48, 0, 9)

A[]

Indeks	A[]	
[0]	11	← l = 0
[1]	19	
[2]	24	
[3]	30	
[4]	32	← m = (0+9)/2
[5]	48	
[6]	50	
[7]	55	
[8]	72	
[9]	99	← h = 9

1. Binær Søk

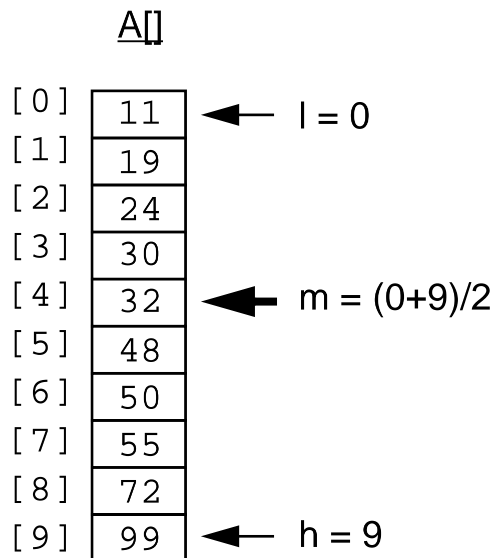
```
/*   finn indeks i A til et element x:
*    @param A  int A[...] sortertint
*    @param x  finn x i A
*    @param l, h søk i A bare fom. l tom. h
*    @return     indeks til x;
*                –1 hvis x ikke finnes
*/
```

```
int BS(int[] A,x,l,h) {
    m= (l+h) / 2 ;
    if (l > h) return -1;
    else if (A[m] == x) return m;
    else if (A[m] < x) return BS(A,x,m+1,h);
    else return BS(A,x,l,m-1); }
// initielt kall med BS(A, x, 0, A.length–1)
```

Nøkkel er 48

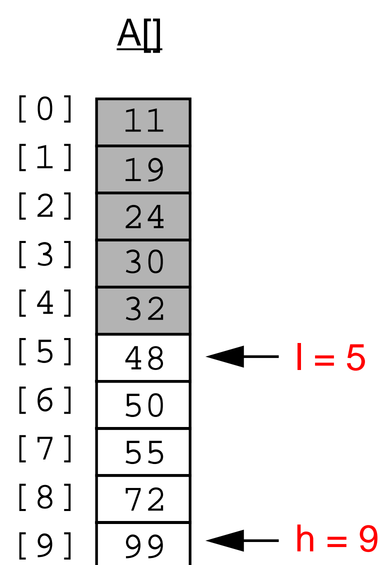
1. kall

binSøk(A, 48, 0, 9)



2. kall

binSøk(A, 48, 5, 9)



1. Binær Søk

```
/*   finn indeks i A til et element x:
*    @param A  int A[...] sortertint
*    @param x  finn x i A
*    @param l, h søk i A bare fom. l tom. h
*    @return      indeks til x;
*                 –1 hvis x ikke finnes
*/
```

```
int BS(int[] A,x,l,h) {
    m= (l+h) / 2 ;
    if (l > h) return -1;
    else if (A[m] == x) return m;
    else if (A[m] < x) return BS(A,x,m+1,h);
    else return BS(A,x,l,m-1); }
// initielt kall med BS(A, x, 0, A.length–1)
```

Nøkkel er 48

1. kall

`binSøk(A, 48, 0, 9)`

A[]

	A[]	
[0]	11	← l = 0
[1]	19	
[2]	24	
[3]	30	
[4]	32	← m = (0+9)/2
[5]	48	
[6]	50	
[7]	55	
[8]	72	
[9]	99	← h = 9

2. kall

`binSøk(A, 48, 5, 9)`

A[]

	A[]	
[0]	11	
[1]	19	
[2]	24	
[3]	30	
[4]	32	
[5]	48	← l = 5
[6]	50	
[7]	55	← m = (5+9)/2
[8]	72	
[9]	99	← h = 9

1. Binær Søk

```
/*  finn indeks i A til et element x:
 *  @param A  int A[...] sortertint
 *  @param x  finn x i A
 *  @param l, h søk i A bare fom. l tom. h
 *  @return     indeks til x;
 *              –1 hvis x ikke finnes
 */
```

```
int BS(int[] A,x,l,h) {
    m= (l+h) / 2 ;
    if (l > h) return -1;
    else if (A[m] == x) return m;
    else if (A[m] < x) return BS(A,x,m+1,h);
    else return BS(A,x,l,m-1); }
// initielt kall med BS(A, x, 0, A.length–1)
```

Nøkkel er 48

1. kall

binSøk(A, 48, 0, 9)

A[]

	A[]	
[0]	11	← l = 0
[1]	19	
[2]	24	
[3]	30	
[4]	32	← m = (0+9)/2
[5]	48	
[6]	50	
[7]	55	
[8]	72	
[9]	99	← h = 9

2. kall

binSøk(A, 48, 5, 9)

A[]

	A[]	
[0]	11	
[1]	19	
[2]	24	
[3]	30	
[4]	32	
[5]	48	← l = 5
[6]	50	
[7]	55	← m = (5+9)/2
[8]	72	
[9]	99	← h = 9

3. kall

binSøk(A, 48, 5, 6)

A[]

	A[]	
[0]	11	
[1]	19	
[2]	24	
[3]	30	
[4]	32	
[5]	48	← l = 5
[6]	50	← h = 6
[7]	55	
[8]	72	
[9]	99	

1. Binær Søk

```
/*  finn indeks i A til et element x:
 *  @param A  int A[...] sortertint
 *  @param x  finn x i A
 *  @param l, h søk i A bare fom. l tom. h
 *  @return     indeks til x;
 *              –1 hvis x ikke finnes
 */
```

```
int BS(int[] A,x,l,h) {
    m= (l+h) / 2 ;
    if (l > h) return -1;
    else if (A[m] == x) return m;
    else if (A[m] < x) return BS(A,x,m+1,h);
    else return BS(A,x,l,m-1); }

// initielt kall med BS(A, x, 0, A.length–1)
```

Nøkkel er 48

1. kall
`binSøk(A, 48, 0, 9)`

A[]

	A[]	
[0]	11	← l = 0
[1]	19	
[2]	24	
[3]	30	
[4]	32	← m = (0+9)/2
[5]	48	
[6]	50	
[7]	55	
[8]	72	
[9]	99	← h = 9

2. kall
`binSøk(A, 48, 5, 9)`

	A[]	
[0]	11	
[1]	19	
[2]	24	
[3]	30	
[4]	32	
[5]	48	← l = 5
[6]	50	
[7]	55	← m = (5+9)/2
[8]	72	
[9]	99	← h = 9

3. kall
`binSøk(A, 48, 5, 6)`

	A[]	
[0]	11	
[1]	19	
[2]	24	
[3]	30	
[4]	32	
[5]	48	← l = 5
[6]	50	← h = 6
[7]	55	
[8]	72	
[9]	99	

basis tilfelle

m = (5+6)/2

A[m] == x

`return 5`

1. Rekursjons*tre* og *-dybde*

fact(1) = 1
fact(n+1) = (n+1) * fact(n)

```
public int fact(int n) {
   if (n <= 1) return 1;
   else
      return n * fact(n-1);
}
```

1. Rekursjons*tre* og *-dybde*

fact(1) = 1
fact(n+1) = (n+1) * fact(n)

```
public int fact(int n) {
   if (n <= 1) return 1;
   else
     return n * fact(n-1);
}
```

returner i **basistilfelle**

ellers beregn rekursivt **enklere** (mindre) deler og sett disse sammen

1. Rekursjons*tre* og *-dybde*

$$fact(1) = 1$$

$$fact(n+1) = (n+1) * fact(n)$$

```
public int fact(int n) {
   if (n <= 1) return 1;
   else
      return n * fact(n-1);
}
```

returner i **basistilfelle**

ellers beregn rekursivt **enklere** (mindre) deler og sett disse sammen

f(4)

f(4) ...?

1. Rekursjons*tre* og *-dybde*

fact(1) = 1
fact(n+1) = (n+1) * fact(n)

```
public int fact(int n) {
   if (n <= 1) return 1;
   else
     return n * fact(n-1);
}
```

returner i **basistilfelle**

ellers beregn rekursivt **enklere** (mindre) deler og sett disse sammen

f(4)

f(3)

f(4) ...?

—— **f(3) ...?**

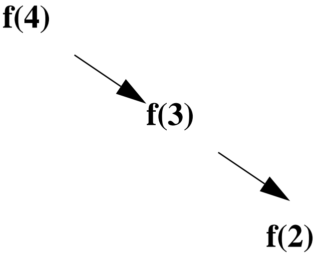
1. Rekursjons*tre* og *-dybde*

fact(1) = 1
fact(n+1) = (n+1) * fact(n)

```
public int fact(int n) {
   if (n <= 1) return 1;
   else
      return n * fact(n-1);
}
```

returner i **basistilfelle**

ellers beregn rekursivt **enklere** (mindre) deler og sett disse sammen



f(4) ...?

— **f(3) ...?**

— — **f(2) ...?**

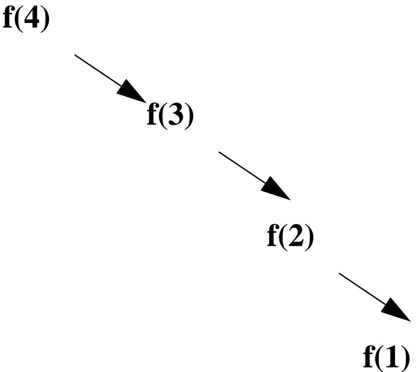
1. Rekursjons*tre* og *-dybde*

$$fact(1) = 1$$
$$fact(n+1) = (n+1) * fact(n)$$

```
public int fact(int n) {
   if (n <= 1) return 1;
   else
     return n * fact(n-1);
}
```

returner i **basistilfelle**

ellers beregn rekursivt **enklere** (mindre) deler og sett disse sammen



f(4) ...?

—— **f(3) ...?**

—— —— **f(2) ...?**

—— —— —— **f(1) ...?**

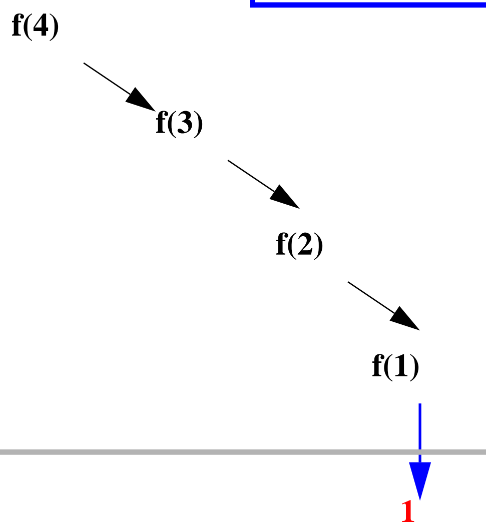
1. Rekursjons*tre* og *-dybde*

$$fact(1) = 1$$
$$fact(n+1) = (n+1) * fact(n)$$

```
public int fact(int n) {
    if (n <= 1) return 1;
    else
      return n * fact(n-1);
}
```

returner i **basistilfelle**

ellers beregn rekursivt **enklere** (mindre) deler og sett disse sammen



f(4) ...?

—— **f(3) ...?**

—— —— **f(2) ...?**

—— —— —— **f(1) ...?**

—— —— —— > **1**

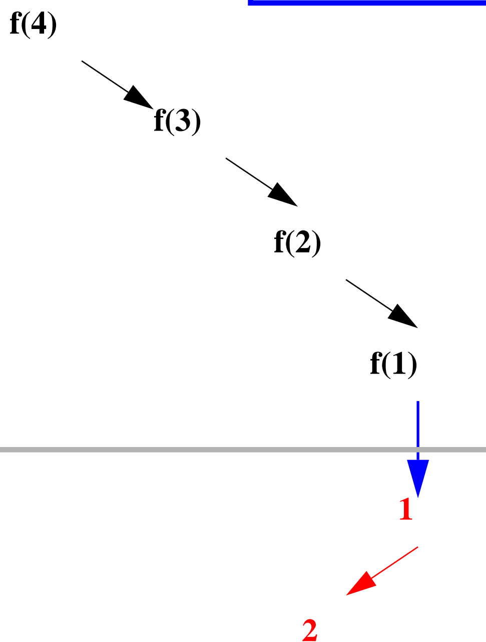
1. Rekursjons*tre* og *-dybde*

$$fact(1) = 1$$
$$fact(n+1) = (n+1) * fact(n)$$

```
public int fact(int n) {
   if (n <= 1) return 1;
   else
      return n * fact(n-1);
}
```

returner i **basistilfelle**

ellers beregn rekursivt **enklere** (mindre) deler og sett disse sammen



f(4) ...?
—— **f(3) ...?**
—— —— **f(2) ...?**
—— —— —— **f(1) ...?**
—— —— —— **> 1**
—— —— **> 2**

1. Rekursjons*tre* og *-dybde*

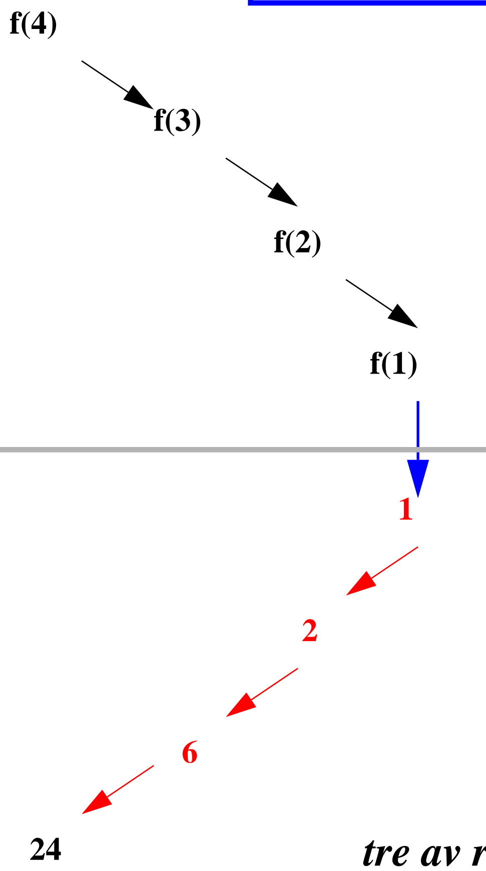
fact(1) = 1

fact(n+1) = (n+1) * fact(n)

```
public int fact(int n) {
   if (n <= 1) return 1;
   else
     return n * fact(n-1);
}
```

returner i **basistilfelle**

ellers beregn rekursivt **enklere** (mindre) deler og sett disse sammen



tre av rekursive kall

f(4) ...?

—— **f(3) ...?**

—— —— **f(2) ...?**

—— —— —— **f(1) ...?**

—— —— —— **> 1**

—— —— **> 2**

—— **> 6**

> 24

rekkefølgen av kall

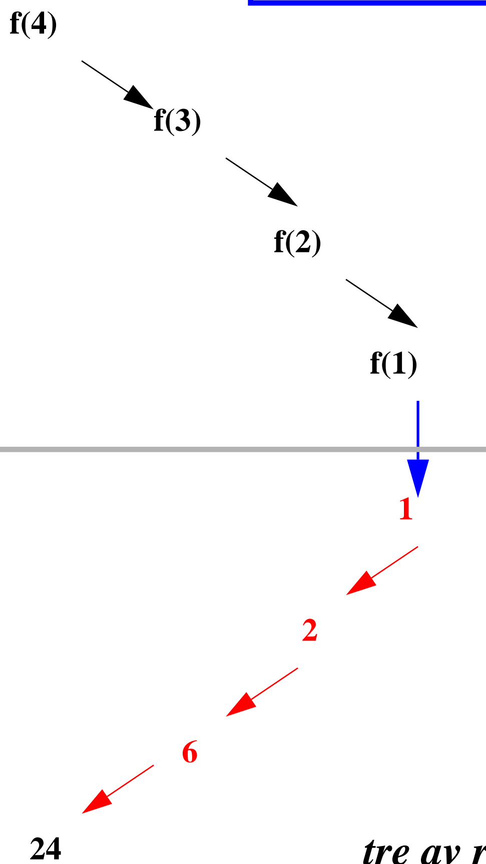
1. Rekursjons*tre* og *-dybde*

fact(1) = 1
fact(n+1) = (n+1) * fact(n)

```
public int fact(int n) {
   if (n <= 1) return 1;
   else
      return n * fact(n-1);
}
```

returner i **basistilfelle**

ellers beregn rekursivt **enklere** (mindre) deler og sett disse sammen



tre av rekursive kall

f(4) ...?
—— **f(3) ...?**
—— —— **f(2) ...?**
—— —— —— **f(1) ...?**
—— —— —— **> 1**
—— —— **> 2**
—— **> 6**
> 24

rekkefølgen av kall

rekursjonsdybde

#svarte = #røde linjer = *# rekursive kall ..... inntil basistilfelle er nådd (=høyden av treet)*

1. Rekursjons*tre* og *-dybde;* Eks: Fibonacci-tallene

$$fib(0) = 1$$
$$fib(1) = 1$$
$$fib(n+2) = fib(n) + fib(n+1)$$

```
public int fib(int n) {
   if (n==0 || n==1) return 1;
   else
      return fib(n-1) + fib(n-2);
}
```

returner i **basistilfelle**

ellers beregn rekursivt **enklere** (mindre) deler og sett disse sammen

f(4)

f(4) ...?

rekkefølgen av kall

rekursjonsdybde

#svarte = #røde linjer = *# rekursive kall* .....

inntil basistilfelle er nådd (=høyden av treet)

tre av rekursive kall

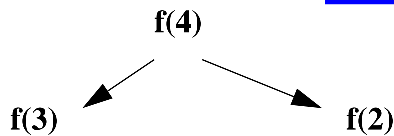
1. Rekursjons***tre*** og ***-dybde;*** Eks: Fibonacci-tallene

$$fib(0) = 1$$
$$fib(1) = 1$$
$$fib(n+2) = fib(n) + fib(n+1)$$

```
public int fib(int n) {
   if (n==0 || n==1) return 1;
   else
      return fib(n-1) + fib(n-2);
}
```

returner i **basistilfelle**

ellers beregn rekursivt **enklere** (mindre) deler og sett disse sammen



tre av rekursive kall

f(4) ...?

— **f(3) ...?**

— **f(2) ...?**

rekkefølgen av kall

rekursjonsdybde

#svarte = #røde linjer = *# rekursive kall* .....

inntil basistilfelle er nådd (=høyden av treet)

1. Rekursjons*tre* og *-dybde;* Eks: Fibonacci-tallene

fib(0) = 1

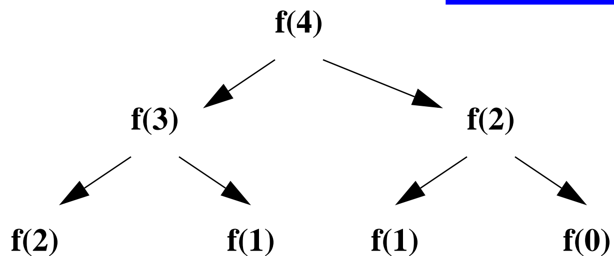
fib(1) = 1

fib(n+2) = fib(n) + fib(n+1)

```
public int fib(int n) {
   if (n==0 || n==1) return 1;
   else
     return fib(n-1) + fib(n-2);
}
```

returner i **basistilfelle**

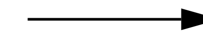
ellers beregn rekursivt **enklere** (mindre) deler og sett disse sammen



tre av rekursive kall

f(4) ...?
—— **f(3) ...?**
—— —— **f(2) ...?**
—— —— **f(1) ...?**
—— **f(2) ...?**
—— —— **f(1) ...?**
—— —— **f(0) ...?**

rekkefølgen av kall



rekursjonsdybde

#svarte = #røde linjer = *# rekursive kall* .....

inntil basistilfelle er nådd (=høyden av treet)

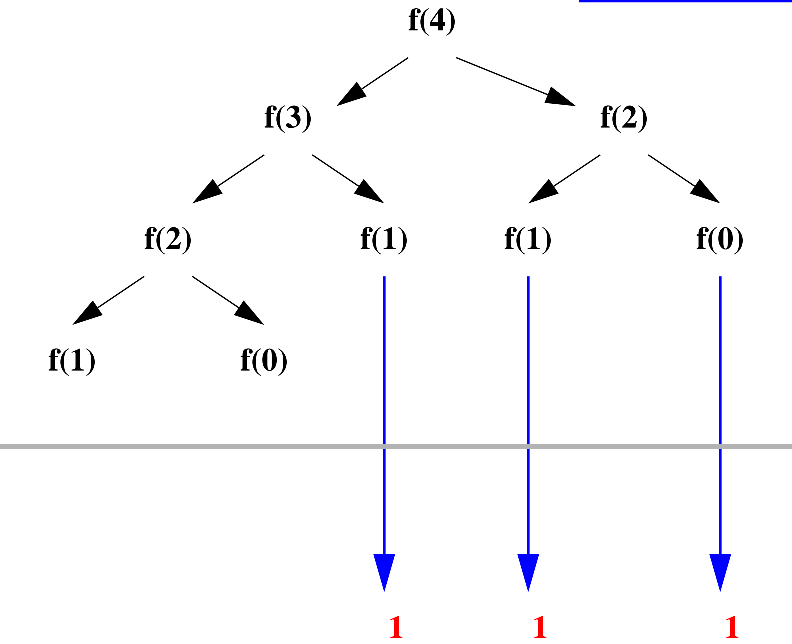
1. Rekursjons*tre* og -*dybde;* Eks: Fibonacci-tallene

fib(0) = 1
fib(1) = 1
fib(n+2) = fib(n) + fib(n+1)

```
public int fib(int n) {
   if (n==0 || n==1) return 1;
   else
      return fib(n-1) + fib(n-2);
}
```

returner i **basistilfelle**

ellers beregn rekursivt **enklere** (mindre) deler og sett disse sammen



tre av rekursive kall

f(4) ...?
—— **f(3) ...?**
—— —— **f(2) ...?**
—— —— —— **f(1) ...?**

—— —— —— **f(0) ...?**

rekkefølgen av kall

—— —— **f(1) ...?**
—— —— **> 1**

—— **f(2) ...?**
—— —— **f(1) ...?**
—— —— **> 1**
—— —— **f(0) ...?**
—— —— **> 1**

→ ***rekursjonsdybde***

#svarte = #røde linjer = *# rekursive kall* .....
inntil basistilfelle er nådd (=høyden av treet)

1. Rekursjons*tre* og *-dybde;* Eks: Fibonacci-tallene

fib(0) = 1

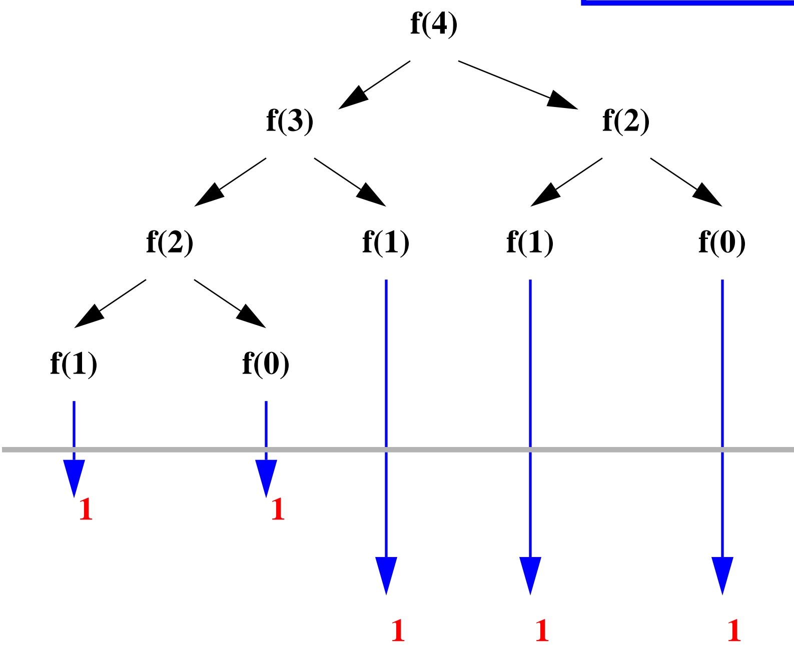
fib(1) = 1

fib(n+2) = fib(n) + fib(n+1)

```
public int fib(int n) {
    if (n==0 || n==1) return 1;
    else
      return fib(n-1) + fib(n-2);
}
```

returner i basistilfelle

ellers beregn rekursivt **enklere** (mindre) deler og sett disse sammen



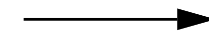
tre av rekursive kall

f(4) ...?
— **f(3) ...?**
— — **f(2) ...?**
— — — **f(1) ...?**
— — — **> 1**
— — — **f(0) ...?**
— — — **> 1**

— — **f(1) ...?**
— — **> 1**

— **f(2) ...?**
— — **f(1) ...?**
— — **> 1**
— — **f(0) ...?**
— — **> 1**

rekkefølgen av kall



rekursjonsdybde

#svarte = #røde linjer = *# rekursive kall ..... inntil basistilfelle er nådd (=høyden av treet)*

1. Rekursjons*tre* og *-dybde;* Eks: Fibonacci-tallene

fib(0) = 1

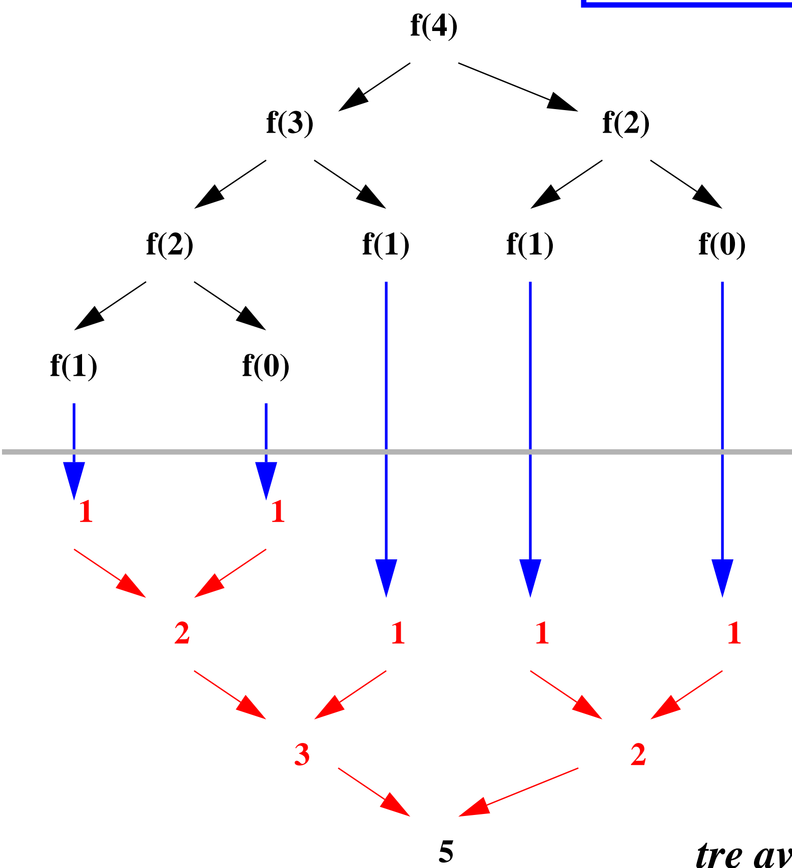
fib(1) = 1

fib(n+2) = fib(n) + fib(n+1)

```
public int fib(int n) {
   if (n==0 || n==1) return 1;
   else
     return fib(n-1) + fib(n-2);
}
```

returner i **basistilfelle**

ellers beregn rekursivt **enklere** (mindre) deler og sett disse sammen



tre av rekursive kall

f(4) ...?
— **f(3) ...?**
— — **f(2) ...?**
— — — **f(1) ...?**
— — — **> 1**
— — — **f(0) ...?**
— — — **> 1**
— — **> 2**
— — **f(1) ...?**
— — **> 1**
— **> 3**
— **f(2) ...?**
— — **f(1) ...?**
— — **> 1**
— — **f(0) ...?**
— — **> 1**
— **> 2**
> 5

rekkefølgen av kall

rekursjonsdybde

#svarte = #røde linjer = *# rekursive kall ..... inntil basistilfelle er nådd (=høyden av treet)*

2. Induktive Data Typer (*vilkårlig store men endelige*)

naturlige tall N:

basis: **0** er et N

2. Induktive Data Typer (*vilkårlig store men endelige*)

naturlige tall N:

basis: **0** er et N

hvis **n** er et N

2. Induktive Data Typer *(vilkårlig store men endelige)*

naturlige tall N:

basis: **0** er et N

hvis **n** er et N

så er: **n**+**1** et N

2. Induktive Data Typer *(vilkårlig store men endelige)*

naturlige tall N:

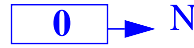
basis: **0** er et N

hvis **n** er et N

så er: **n**+**1** et N

array av N: A(N)

basis **0 -> N** er A(N)



2. Induktive Data Typer *(vilkårlig store men endelige)*

naturlige tall N:

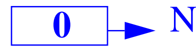
basis: **0** er et N

hvis **n** er et N

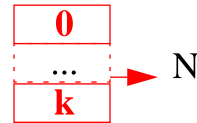
så er: **n+1** et N

array av N: A(N)

basis **0 -> N** er A(N)

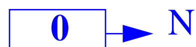


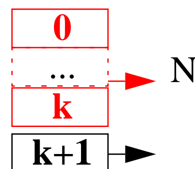
hvis **[0...k] -> N** er A(N)



2. Induktive Data Typer *(vilkårlig store men endelige)*

naturlige tall N:		**array av N: A(N)**	
basis:	**0** er et N	basis	**0 -> N** er A(N)
hvis	**n** er et N	hvis	**[0...k] -> N** er A(N)
så er:	**n+1** et N	så er	**[0...k,k+1] -> N** en A(N)





2. Induktive Data Typer *(vilkårlig store men endelige)*

naturlige tall N:

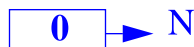
basis: **0** er et N

hvis **n** er et N

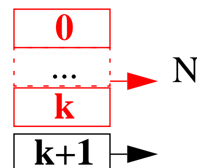
så er: **n**+**1** et N

array av N: A(N)

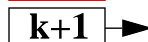
basis **0 -> N** er A(N)



hvis **[0...k] -> N** er A(N)



så er **[0...k,k+1] -> N** en A(N)



Lister av N: L(N):

basis: **null** er en L(N)

2. Induktive Data Typer *(vilkårlig store men endelige)*

naturlige tall N:

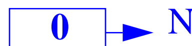
basis: **0** er et N

hvis **n** er et N

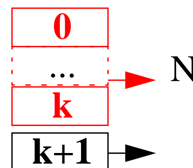
så er: **n+1** et N

array av N: A(N)

basis **0 -> N** er A(N)



hvis **[0...k] -> N** er A(N)



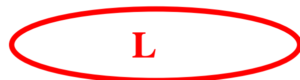
så er **[0...k,k+1] -> N** en A(N)

k+1

Lister av N: L(N):

basis: **null** er en L(N)

n



hvis **L** er L(N) og n er N

2. Induktive Data Typer *(vilkårlig store men endelige)*

naturlige tall N:

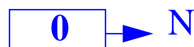
basis: **0** er et N

hvis **n** er et N

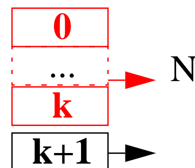
så er: **n**+**1** et N

array av N: A(N)

basis **0 -> N** er A(N)



hvis **[0...k] -> N** er A(N)

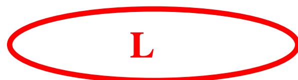


så er **[0...k,k+1] -> N** en A(N)

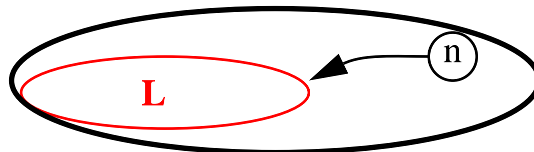
Lister av N: L(N):

basis: **null** er en L(N)

hvis **L** er L(N) og n er N



så er: **(n,L)** en L(N)



2. Induktive Data Typer *(vilkårlig store men endelige)*

naturlige tall N:

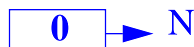
basis: **0** er et N

hvis **n** er et N

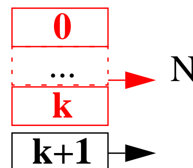
så er: **n**+**1** et N

array av N: A(N)

basis **0 -> N** er A(N)



hvis **[0...k] -> N** er A(N)



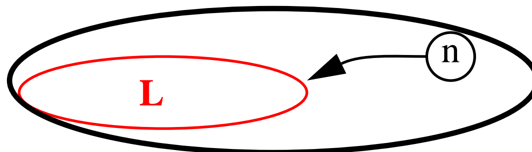
så er **[0...k,k+1] -> N** en A(N)

Lister av N: L(N):

basis: **null** er en L(N)

hvis **L** er L(N) og n er N

så er: **(n,L)** en L(N)



Binære Trær av N: BT(N):

basis: **null** er et BT(N)

2. Induktive Data Typer *(vilkårlig store men endelige)*

naturlige tall N:

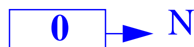
basis: **0** er et N

hvis **n** er et N

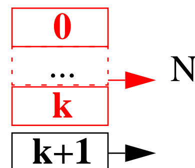
så er: **n+1** et N

array av N: A(N)

basis **0 -> N** er A(N)



hvis **[0...k] -> N** er A(N)

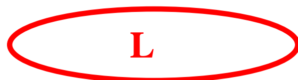


så er **[0...k,k+1] -> N** en A(N)

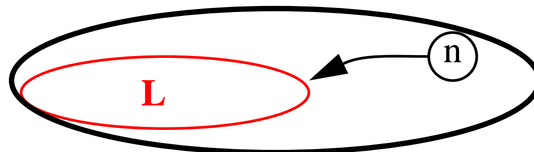
Lister av N: L(N):

basis: **null** er en L(N)

hvis **L** er L(N) og n er N



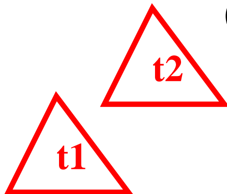
så er: **(n,L)** en L(N)



Binære Trær av N: BT(N):

basis: **null** er et BT(N)

hvis **t1**, **t2** er BT(N) og n er N



2. Induktive Data Typer *(vilkårlig store men endelige)*

naturlige tall N:

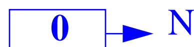
basis: **0** er et N

hvis **n** er et N

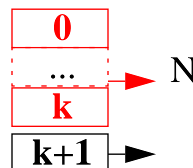
så er: **n+1** et N

array av N: A(N)

basis **0 -> N** er A(N)



hvis **[0...k] -> N** er A(N)



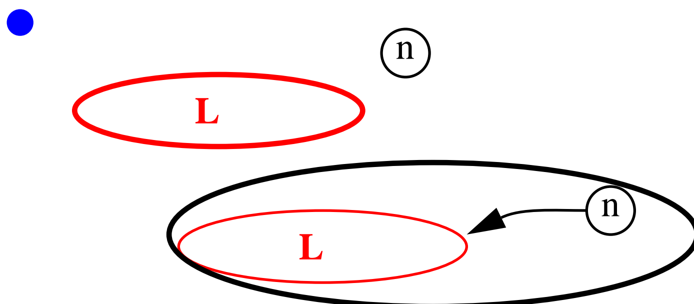
så er **[0...k,k+1] -> N** en A(N)

Lister av N: L(N):

basis: **null** er en L(N)

hvis **L** er L(N) og n er N

så er: **(n,L)** en L(N)

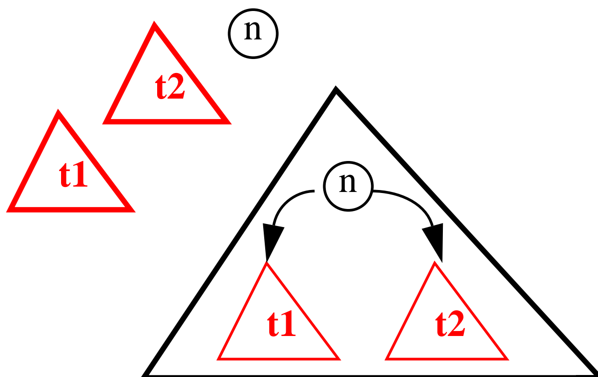


Binære Trær av N: BT(N):

basis: **null** er et BT(N)

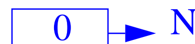
hvis **t1**, **t2** er BT(N) og n er N

så er: **(t1, n, t2)** et BT(N)



2. Induktive Data Typer *(vilkårlig store men endelige)*

"Strukturell ordering"



naturlige tall N:

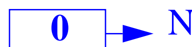
basis: **0** er et N

hvis **n** er et N

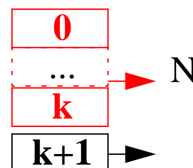
så er: **n**+**1** et N

array av N: A(N)

basis **0 -> N** er A(N)



hvis **[0...k] -> N** er A(N)



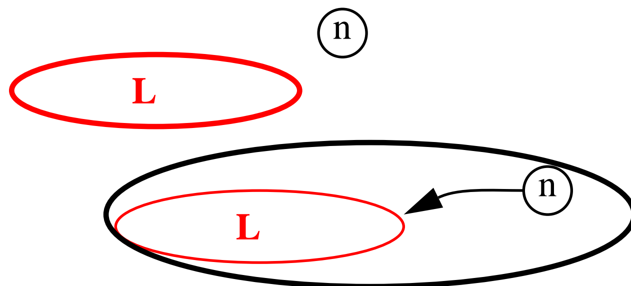
så er **[0...k,k+1] -> N** en A(N)

Lister av N: L(N):

basis: **null** er en L(N)

hvis **L** er L(N) og n er N

så er: **(n,L)** en L(N)

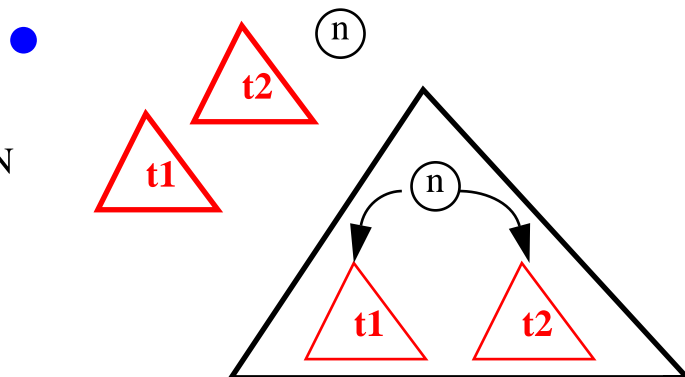


Binære Trær av N: BT(N):

basis: **null** er et BT(N)

hvis **t1**, **t2** er BT(N) og n er N

så er: (**t1, n, t2**) et BT(N)



2. Induktive Data Typer *(vilkårlig store men endelige)*

"Strukturell ordering"

naturlige tall N:

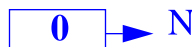
basis: **0** er et N

hvis **n** er et N

så er: **n+1** et N

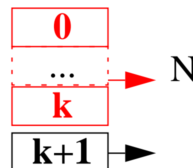
array av N: A(N)

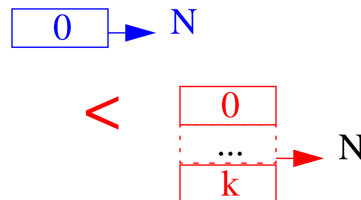
basis **0 -> N** er A(N)



hvis **[0...k] -> N** er A(N)

så er **[0...k,k+1] -> N** en A(N)



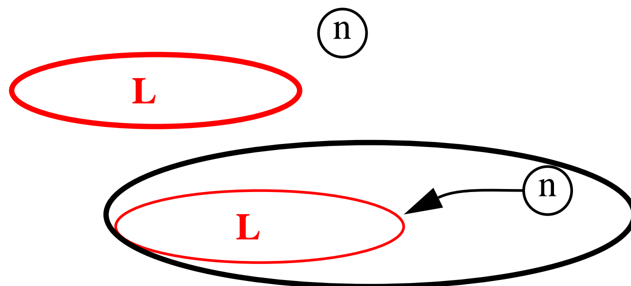


Lister av N: L(N):

basis: **null** er en L(N)

hvis **L** er L(N) og n er N

så er: **(n,L)** en L(N)

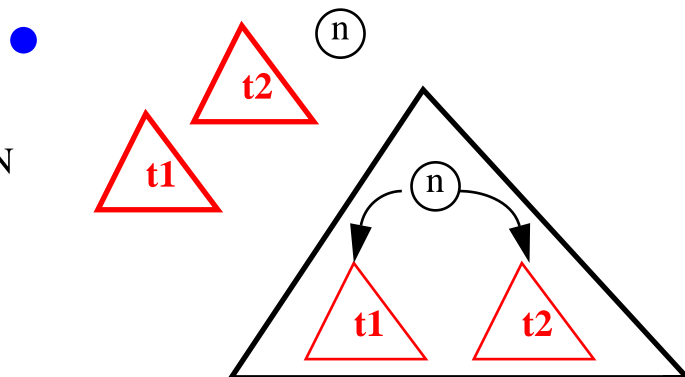


Binære Trær av N: BT(N):

basis: **null** er et BT(N)

hvis **t1**, **t2** er BT(N) og n er N

så er: **(t1, n, t2)** et BT(N)



2. Induktive Data Typer *(vilkårlig store men endelige)*

"Strukturell ordering"

naturlige tall N:

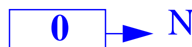
basis: **0** er et N

hvis **n** er et N

så er: **n**+**1** et N

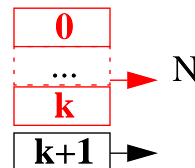
array av N: A(N)

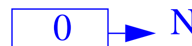
basis **0 -> N** er A(N)

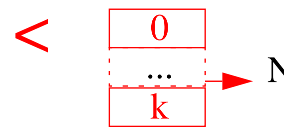


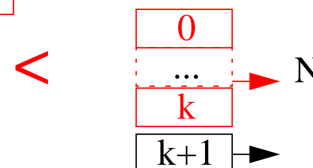
hvis **[0...k] -> N** er A(N)

så er **[0...k,k+1] -> N** en A(N)







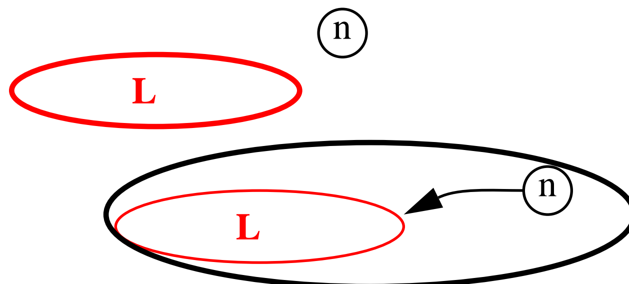


Lister av N: L(N):

basis: **null** er en L(N)

hvis **L** er L(N) og n er N

så er: **(n,L)** en L(N)

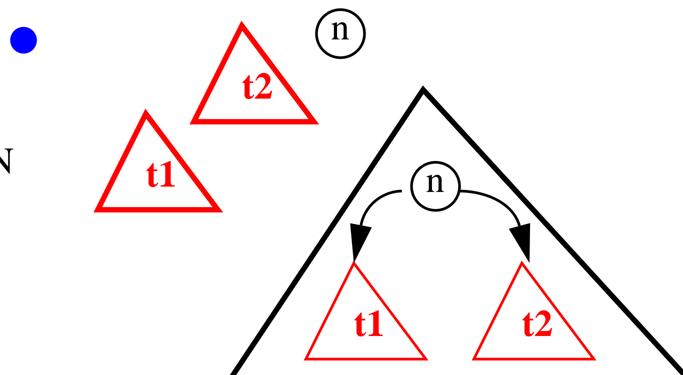


Binære Trær av N: BT(N):

basis: **null** er et BT(N)

hvis **t1**, **t2** er BT(N) og n er N

så er: **(t1, n, t2)** et BT(N)



2. Induktive Data Typer *(vilkårlig store men endelige)*

"Strukturell ordering"

naturlige tall N:

basis: **0** er et N

hvis **n** er et N

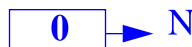
så er: **n+1** et N

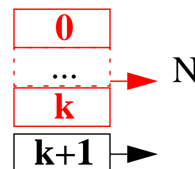
array av N: A(N)

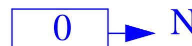
basis **0 -> N** er A(N)

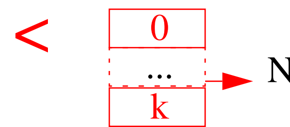
hvis **[0...k] -> N** er A(N)

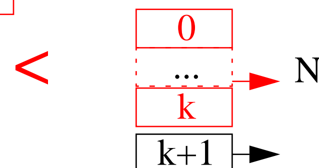
så er **[0...k,k+1] -> N** en A(N)









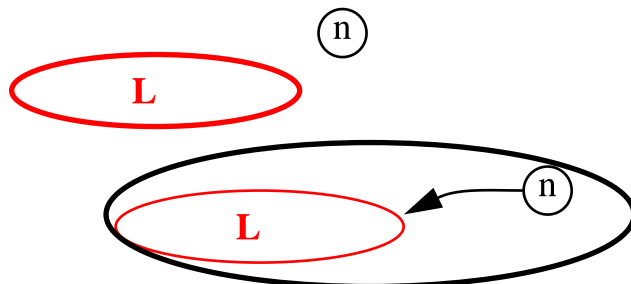


Lister av N: L(N):

basis: **null** er en L(N)

hvis **L** er L(N) og n er N

så er: **(n,L)** en L(N)

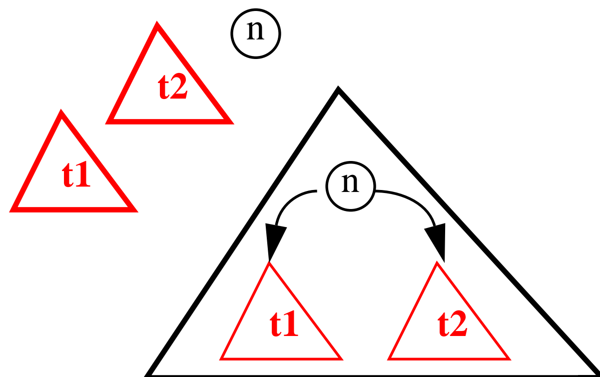


Binære Trær av N: BT(N):

basis: **null** er et BT(N)

hvis **t1**, **t2** er BT(N) og n er N

så er: **(t1, n, t2)** et BT(N)



2. Induktive Data Typer *(vilkårlig store men endelige)*

"Strukturell ordering"

naturlige tall N:

basis: **0** er et N

hvis **n** er et N

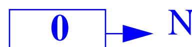
så er: **n**+**1** et N

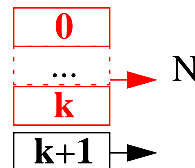
array av N: A(N)

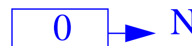
basis **0 -> N** er A(N)

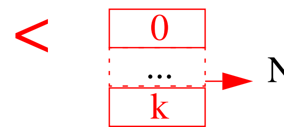
hvis **[0...k] -> N** er A(N)

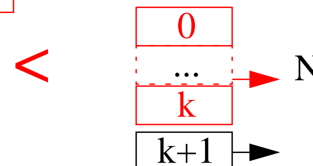
så er **[0...k,k+1] -> N** en A(N)









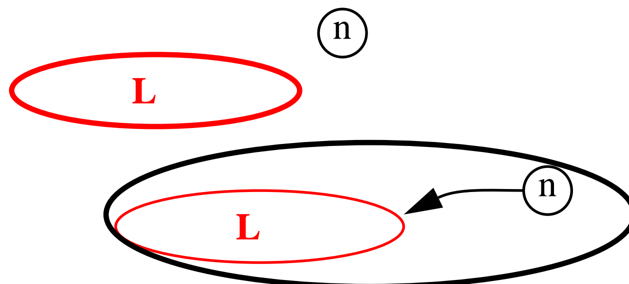


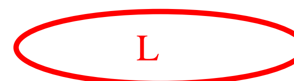
Lister av N: L(N):

basis: **null** er en L(N)

hvis **L** er L(N) og n er N

så er: (**n**,**L**) en L(N)



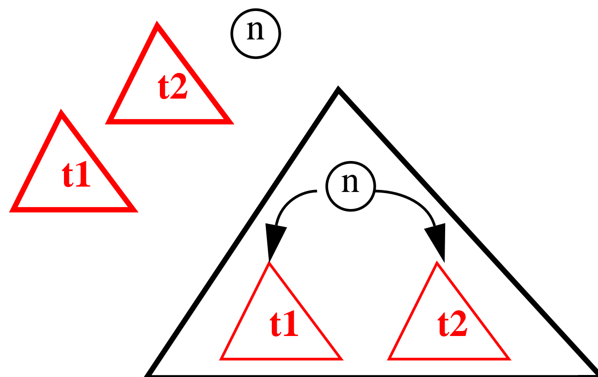


Binære Trær av N: BT(N):

basis: **null** er et BT(N)

hvis **t1**, **t2** er BT(N) og n er N

så er: (**t1**, **n**, **t2**) et BT(N)



2. Induktive Data Typer *(vilkårlig store men endelige)*

"Strukturell ordering"

naturlige tall N:

basis: **0** er et N

hvis **n** er et N

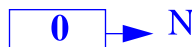
så er: **n+1** et N

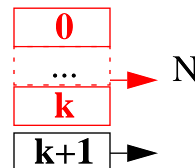
array av N: A(N)

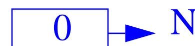
basis **0 -> N** er A(N)

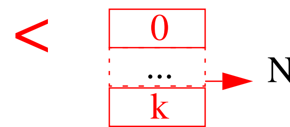
hvis **[0...k] -> N** er A(N)

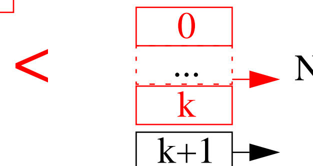
så er **[0...k,k+1] -> N** en A(N)









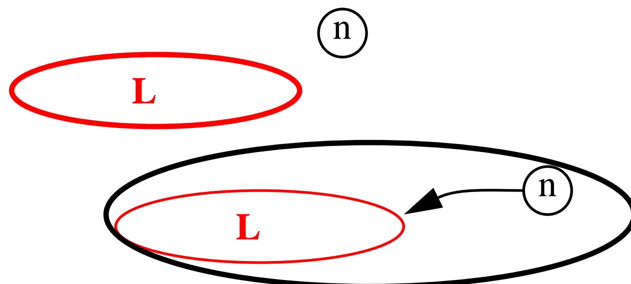


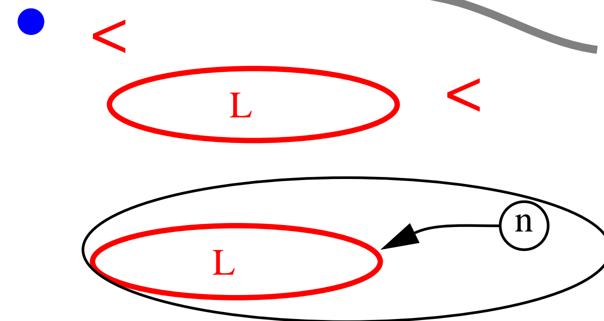
Lister av N: L(N):

basis: **null** er en L(N)

hvis **L** er L(N) og n er N

så er: **(n,L)** en L(N)



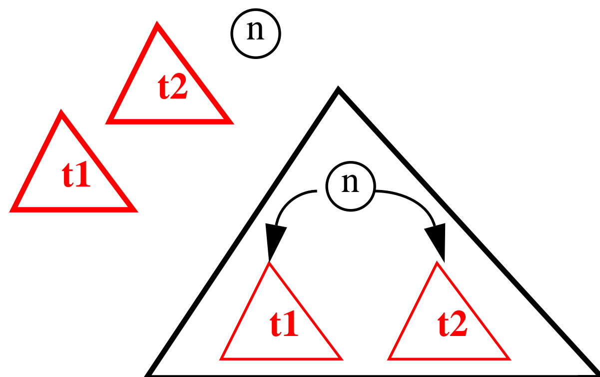


Binære Trær av N: BT(N):

basis: **null** er et BT(N)

hvis **t1**, **t2** er BT(N) og n er N

så er: **(t1, n, t2)** et BT(N)



2. Induktive Data Typer *(vilkårlig store men endelige)*

"Strukturell ordering"

naturlige tall N:

basis: **0** er et N

hvis **n** er et N

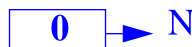
så er: **n+1** et N

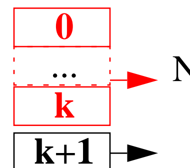
array av N: A(N)

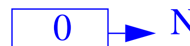
basis **0 -> N** er A(N)

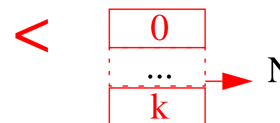
hvis **[0...k] -> N** er A(N)

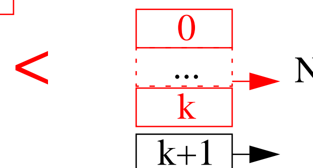
så er **[0...k,k+1] -> N** en A(N)









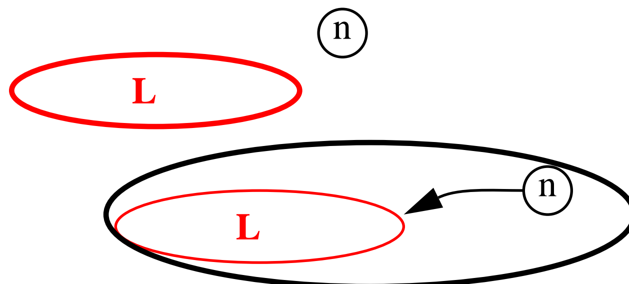


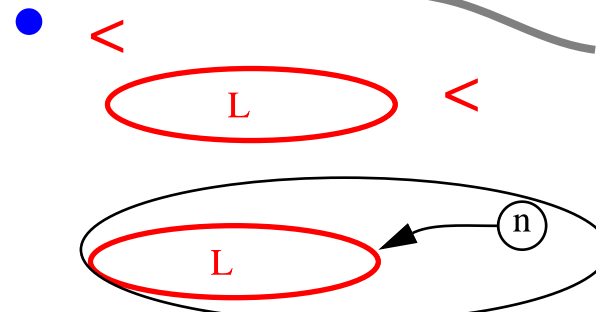
Lister av N: L(N):

basis: **null** er en L(N)

hvis **L** er L(N) og n er N

så er: **(n,L)** en L(N)



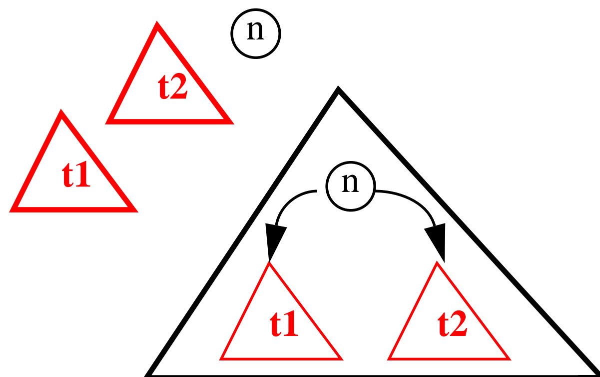


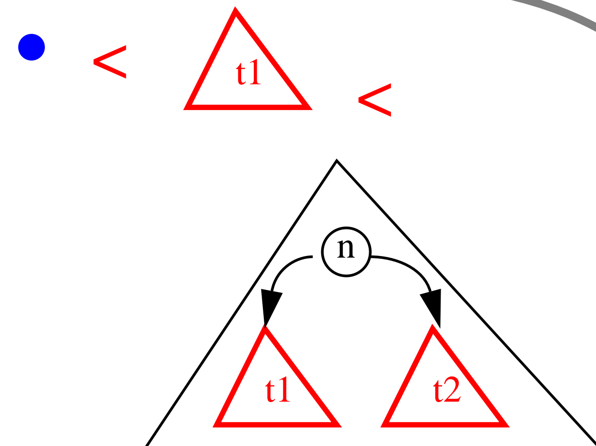
Binære Trær av N: BT(N):

basis: **null** er et BT(N)

hvis **t1**, **t2** er BT(N) og n er N

så er: **(t1, n, t2)** et BT(N)





2. Induktiv oppbygging -> rekursive beregninger

induktiv definisjon *= fra basis og oppover* ***** ***rekursjon*** *= fra toppen mot basis*

Nat
  basis: 0

```
int fib(n) {
   if (n==0 || n==1) return 1;
```

```
int fact(n) {
   if (n <= 0) return 1;
```

2. Induktiv oppbygging -> rekursive beregninger

induktiv definisjon *= fra basis og oppover* ***** ***rekursjon*** *= fra toppen mot basis*

Nat
  basis: 0
  ind: n+1

```
int fib(n) {
   if (n==0 || n==1) return 1;
   else return fib(n-1) + fib(n-2);
```

```
int fact(n) {
   if (n <= 0) return 1;
   else return n * fact(n-1);
```

2. Induktiv oppbygging -> rekursive beregninger

induktiv definisjon *= fra basis og oppover* ***** ***rekursjon*** *= fra toppen mot basis*

```
Nat
   basis:  0
     ind:   n+1
```

```
int fib(n) {
    if (n==0 || n==1) return 1;
    else return fib(n-1) + fib(n-2);
}
```

```
int fact(n) {
    if (n <= 0) return 1;
    else return n * fact(n-1);
}
```

```
Array[Int]
   basis: [0] -> Int
```

```
int sum(int[] A, int k) {
    if (k==0) return A[0];
```

2. Induktiv oppbygging -> rekursive beregninger

induktiv definisjon *= fra basis og oppover* ***** ***rekursjon*** *= fra toppen mot basis*

Nat
basis: 0
ind: n+1

```
int fib(n) {
    if (n==0 || n==1) return 1;
    else return fib(n-1) + fib(n-2);
}
```

```
int fact(n) {
    if (n <= 0) return 1;
    else return n * fact(n-1);
}
```

Array[Int]
basis: [0] -> Int
ind: [0.. k-1, k] -> Int

```
int sum(int[] A, int k) {
    if (k==0) return A[0];
    else return A[k] + sum(A,k-1); } }
```

2. Induktiv oppbygging -> rekursive beregninger

induktiv definisjon *= fra basis og oppover* ***** ***rekursjon*** *= fra toppen mot basis*

```
Nat
   basis:  0
     ind:   n+1
```

```
int fib(n) {
    if (n==0 || n==1) return 1;
    else return fib(n-1) + fib(n-2);
}
```

```
int fact(n) {
    if (n <= 0) return 1;
    else return n * fact(n-1);
}
```

```
Array[Int]
   basis: [0] -> Int
     ind:   [0.. k-1, k] -> Int
```

```
void inc(int[] A, int k) {
    A[k]++;
    if (k > 0) inc(A,k-1); }
```

```
int sum(int[] A, int k) {
    if (k==0) return A[0];
    else return A[k] + sum(A,k-1); } }
```

2. Induktiv oppbygging -> rekursive beregninger

induktiv definisjon *= fra basis og oppover* ***** ***rekursjon*** *= fra toppen mot basis*

```
Nat
   basis:  0
    ind:   n+1
```

```
int fib(n) {
   if (n==0 || n==1) return 1;
   else return fib(n-1) + fib(n-2);
}
```

```
int fact(n) {
   if (n <= 0) return 1;
   else return n * fact(n-1);
}
```

```
Array[Int]
   basis: [0] -> Int
    ind:   [0.. k-1, k] -> Int
```

```
void inc(int[] A, int k) {
   A[k]++;
   if (k > 0) inc(A,k-1); }
```

```
int sum(int[] A, int k) {
   if (k==0) return A[0];
   else return A[k] + sum(A,k-1); } }
```

```
Liste[Int]
   basis:  null
    ind:   (n,hale)
```

```
class LS {
   int n;
   LS hale; }
```

2. Induktiv oppbygging -> rekursive beregninger

induktiv definisjon *= fra basis og oppover* ***** ***rekursjon*** *= fra toppen mot basis*

```
Nat
   basis:  0
     ind:   n+1
```

```
int fib(n) {
    if (n==0 || n==1) return 1;
    else return fib(n-1) + fib(n-2);
}
```

```
int fact(n) {
    if (n <= 0) return 1;
    else return n * fact(n-1);
}
```

```
Array[Int]
   basis: [0] -> Int
     ind:   [0.. k-1, k] -> Int
```

```
void inc(int[] A, int k) {
    A[k]++;
    if (k > 0) inc(A,k-1); }
```

```
int sum(int[] A, int k) {
    if (k==0) return A[0];
    else return A[k] + sum(A,k-1); } }
```

```
Liste[Int]
   basis:  null
     ind:   (n,hale)
```

```
class LS {
    int n;
    LS hale; }
```

```
void inc(LS L) {
    if (L==null) {}
```

```
int sum(LS L) {
    if (L==null) return 0;
```

2. Induktiv oppbygging -> rekursive beregninger

induktiv definisjon *= fra basis og oppover* ***** ***rekursjon*** *= fra toppen mot basis*

Nat
  basis: 0
  ind: n+1

```
int fib(n) {
    if (n==0 || n==1) return 1;
    else return fib(n-1) + fib(n-2);
}
```

```
int fact(n) {
    if (n <= 0) return 1;
    else return n * fact(n-1);
}
```

Array[Int]
  basis: [0] -> Int
  ind: [0.. k-1, k] -> Int

```
void inc(int[] A, int k) {
    A[k]++;
    if (k > 0) inc(A,k-1); }
```

```
int sum(int[] A, int k) {
    if (k==0) return A[0];
    else return A[k] + sum(A,k-1); } }
```

Liste[Int]
  basis: null
  ind: (n,hale)

```
class LS {
    int n;
    LS hale; }
```

```
void inc(LS L) {
    if (L==null) {}
    else { n++;
      inc(L.hale); } }
```

```
int sum(LS L) {
    if (L==null) return 0;
    else  return
          sum(L.hale) + n; }
```

2. Induktiv oppbygging -> rekursive beregninger

induktiv definisjon *= fra basis og oppover* ***** ***rekursjon*** *= fra toppen mot basis*

```
Nat
   basis:  0
    ind:   n+1
```

```
int fib(n) {
   if (n==0 || n==1) return 1;
   else return fib(n-1) + fib(n-2);
}
```

```
int fact(n) {
   if (n <= 0) return 1;
   else return n * fact(n-1);
}
```

```
Array[Int]
   basis: [0] -> Int
    ind:   [0.. k-1, k] -> Int
```

```
void inc(int[] A, int k) {
   A[k]++;
   if (k > 0) inc(A,k-1); }
```

```
int sum(int[] A, int k) {
   if (k==0) return A[0];
   else return A[k] + sum(A,k-1); } }
```

```
Liste[Int]
   basis:  null
    ind:   (n,hale)
```

```
class LS {
   int n;
   LS hale; }
```

```
void inc(LS L) {
   if (L==null) {}
   else { n++;
     inc(L.hale); } }
```

```
int sum(LS L) {
   if (L==null) return 0;
   else  return
         sum(L.hale) + n; }
```

```
BinærtTre[Int]
   basis:  null
    ind:   (left,n,right)
```

```
class BT {
   int n;
   BT left;
   BT right;}
```

2. Induktiv oppbygging -> rekursive beregninger

induktiv definisjon *= fra basis og oppover* ***** ***rekursjon*** *= fra toppen mot basis*

```
Nat
   basis:  0
    ind:   n+1
```

```
int fib(n) {
   if (n==0 || n==1) return 1;
   else return fib(n-1) + fib(n-2);
}
```

```
int fact(n) {
   if (n <= 0) return 1;
   else return n * fact(n-1);
}
```

```
Array[Int]
   basis: [0] -> Int
    ind:  [0.. k-1, k] -> Int
```

```
void inc(int[] A, int k) {
   A[k]++;
   if (k > 0) inc(A,k-1); }
```

```
int sum(int[] A, int k) {
   if (k==0) return A[0];
   else return A[k] + sum(A,k-1); } }
```

```
Liste[Int]
   basis:  null
    ind:   (n,hale)
```

```
class LS {
   int n;
   LS hale; }
```

```
void inc(LS L) {
   if (L==null) {}
   else { n++;
     inc(L.hale); } }
```

```
int sum(LS L) {
   if (L==null) return 0;
   else  return
         sum(L.hale) + n; }
```

```
BinærtTre[Int]
   basis:  null
    ind:   (left,n,right)
```

```
class BT {
   int n;
   BT left;
   BT right;}
```

```
void inc(BT B) {
   if (T==null) { }
```

```
int sum(BT T)  {
   if (T==null) return 0;
```

2. Induktiv oppbygging -> rekursive beregninger

induktiv definisjon *= fra basis og oppover* ***** ***rekursjon*** *= fra toppen mot basis*

```
Nat
  basis:  0
   ind:   n+1
```

```
int fib(n) {
   if (n==0 || n==1) return 1;
   else return fib(n-1) + fib(n-2);
}
```

```
int fact(n) {
   if (n <= 0) return 1;
   else return n * fact(n-1);
}
```

```
Array[Int]
  basis: [0] -> Int
   ind:  [0.. k-1, k] -> Int
```

```
void inc(int[] A, int k) {
   A[k]++;
   if (k > 0) inc(A,k-1); }
```

```
int sum(int[] A, int k) {
   if (k==0) return A[0];
   else return A[k] + sum(A,k-1); } }
```

```
Liste[Int]
  basis:  null
   ind:   (n,hale)
```

```
class LS {
   int n;
   LS hale; }
```

```
void inc(LS L) {
   if (L==null) { }
   else { n++;
     inc(L.hale); } }
```

```
int sum(LS L) {
   if (L==null) return 0;
   else  return
        sum(L.hale) + n; }
```

```
BinærtTre[Int]
  basis:  null
   ind:   (left,n,right)
```

```
class BT {
   int n;
   BT left;
   BT right;}
```

```
void inc(BT B) {
   if (T==null) { }
   else {n++;
     inc(T.left);
```

```
int sum(BT T)  {
   if (T==null) return 0;
   else return
        n + sum(T.left)
```

2. Induktiv oppbygging -> rekursive beregninger

induktiv definisjon *= fra basis og oppover* ***** ***rekursjon*** *= fra toppen mot basis*

```
Nat
   basis:  0
     ind:   n+1
```

```
int fib(n) {
    if (n==0 || n==1) return 1;
    else return fib(n-1) + fib(n-2);
}
```

```
int fact(n) {
    if (n <= 0) return 1;
    else return n * fact(n-1);
}
```

```
Array[Int]
   basis: [0] -> Int
     ind:   [0.. k-1, k] -> Int
```

```
void inc(int[] A, int k) {
    A[k]++;
    if (k > 0) inc(A,k-1); }
```

```
int sum(int[] A, int k) {
    if (k==0) return A[0];
    else return A[k] + sum(A,k-1); } }
```

```
Liste[Int]
    basis:  null
      ind:   (n,hale)
```

```
class LS {
    int n;
    LS hale; }
```

```
void inc(LS L) {
    if (L==null) {}
    else { n++;
      inc(L.hale); } }
```

```
int sum(LS L) {
    if (L==null) return 0;
    else  return
            sum(L.hale) + n; }
```

```
BinærtTre[Int]
    basis:   null
      ind:   (left,n,right)
```

```
class BT {
    int n;
    BT left;
    BT right;}
```

```
void inc(BT B) {
    if (T==null) { }
    else {n++;
      inc(T.left);
      inc(T.right); } }
```

```
int sum(BT T)  {
    if (T==null) return 0;
    else return
          n + sum(T.left) + sum(T.right) ;
}
```

2. Induktiv oppbygging -> rekursive beregninger

induktiv definisjon *= fra basis og oppover* ***** ***rekursjon*** *= fra toppen mot basis*

Nat
basis: 0
ind: n+1

```
int fib(n) {
    if (n==0 || n==1) return 1;
    else return fib(n-1) + fib(n-2);
}
```

```
int fact(n) {
    if (n <= 0) return 1;
    else return n * fact(n-1);
}
```

Array[Int]
basis: [0] -> Int
ind: [0.. k-1, k] -> Int

```
void inc(int[] A, int k) {
    A[k]++;
    if (k > 0) inc(A,k-1); }
```

```
int sum(int[] A, int k) {
    if (k==0) return A[0];
    else return A[k] + sum(A,k-1); } }
```

Liste[Int]
basis: null
ind: (n,hale)

```
class LS {
    int n;
    LS hale; }
```

```
void inc(LS L) {
    if (L==null) {}
    else { n++;
      inc(L.hale); } }
```

```
int sum(LS L) {
    if (L==null) return 0;
    else  return
          sum(L.hale) + n; }
```

BinærtTre[Int]
basis: null
ind: (left,n,right)

```
class BT {
    int n;
    BT left;
    BT right;}
```

```
void inc(BT B) {
    if (T==null) { }
    else {n++;
      inc(T.left);
      inc(T.right); } }
```

```
int sum(BT T)  {
    if (T==null) return 0;
    else return
          n + sum(T.left) + sum(T.right) ;
}
```

FRAKTALer

3. “Splitt og hersk” (engelsk: Divide and Conquer)

***Rekursjon* som en generell strategi for problemløsning og algoritmedesign**

Gitt en instans **n** *av et problem* **P** *:*

1. *hva gjør jeg når* **n** *er basis tilfelle*
2. *hvordan konstruere løsning for* **n** *utfra løsninger for noen instanser* **mindre enn n**

3. "Splitt og hersk" (engelsk: Divide and Conquer)

***Rekursjon* som en generell strategi for problemløsning og algoritmedesign**

Gitt en instans **n** *av et problem* **P** *:*

1. *hva gjør jeg når* ***n*** ***er basis tilfelle***
2. *hvordan konstruere løsning for* **n** *utfra løsninger for noen instanser* **mindre enn n**

P = finn et gitt element x i en array A

Hvis A *er usortert :*

sjekk A[n]*;*
hvis x ikke er der, lett i A[0...n–1]

3. “Splitt og hersk” (engelsk: Divide and Conquer)

***Rekursjon* som en generell strategi for problemløsning og algoritmedesign**

Gitt en instans **n** *av et problem* **P** *:*

1. *hva gjør jeg når* **n** *er basis tilfelle*
2. *hvordan konstruere løsning for* **n** *utfra løsninger for noen instanser* **mindre enn n**

P = finn et gitt element x i en array A

Hvis A *er usortert :*

sjekk A[n]*;*
hvis x ikke er der, lett i A[0...n–1]

```
/*   initielt kall med FE(A, x?, A.length–1)   */
int FE(int[] A, x. k) {
        if (k < 0 )  return –1;
        else if (A[k]==x)  return k;
        else return FE(A, x, k–1);   }
```

3. "Splitt og hersk" (engelsk: Divide and Conquer)

***Rekursjon* som en generell strategi for problemløsning og algoritmedesign**

Gitt en instans **n** *av et problem* **P** *:*

1. *hva gjør jeg når* **n** *er basis tilfelle*
2. *hvordan konstruere løsning for* **n** *utfra løsninger for noen instanser* **mindre enn n**

P = finn et gitt element x i en array A

Hvis A *er usortert :*

sjekk A[n]*;*
hvis x ikke er der, lett i A[0...n–1]

```
/*   initielt kall med FE(A, x?, A.length–1)   */
int FE(int[] A, x. k) {
    if (k < 0 )  return –1;
    else if (A[k]==x)  return k;
    else return FE(A, x, k–1);   }
```

FE(A, 7, 11)

1	3	5	7	8	9	10	11	13	15	19	20
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	**11**

3. “Splitt og hersk” (engelsk: Divide and Conquer)

***Rekursjon** som en generell strategi for problemløsning og algoritmedesign*

Gitt en instans **n** *av et problem* **P** *:*

1. *hva gjør jeg når* **n** *er basis tilfelle*
2. *hvordan konstruere løsning for* **n** *utfra løsninger for noen instanser* **mindre enn n**

P = finn et gitt element x i en array A

Hvis A *er usortert :*

sjekk A[n]*;*
hvis x ikke er der, lett i A[0...n–1]

```
/*   initielt kall med FE(A, x?, A.length–1)   */
int FE(int[] A, x. k) {
      if (k < 0 )  return –1;
      else if (A[k]==x)  return k;
      else return FE(A, x, k–1);    }
```

FE(A, 7, 11)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	3	5	7	8	9	10	11	13	15	19	20

3. “Splitt og hersk” (engelsk: Divide and Conquer)

***Rekursjon* som en generell strategi for problemløsning og algoritmedesign**

Gitt en instans **n** *av et problem* **P** *:*

1. *hva gjør jeg når* **n** *er basis tilfelle*
2. *hvordan konstruere løsning for* **n** *utfra løsninger for noen instanser* **mindre enn n**

P = finn et gitt element x i en array A

Hvis A *er usortert :*

sjekk A[n]*;*
hvis x ikke er der, lett i A[0...n–1]

```
/*   initielt kall med FE(A, x?, A.length–1)   */
int FE(int[] A, x. k) {
      if (k < 0 )  return –1;
      else if (A[k]==x)  return k;
      else return FE(A, x, k–1);   }
```

FE(A, 7, 11)

1	3	5	7	8	9	10	11	13	15	19	20
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**

3. "Splitt og hersk" (engelsk: Divide and Conquer)

***Rekursjon* som en generell strategi for problemløsning og algoritmedesign**

Gitt en instans **n** *av et problem* **P** *:*

1. *hva gjør jeg når* **n** *er basis tilfelle*
2. *hvordan konstruere løsning for* **n** *utfra løsninger for noen instanser* **mindre enn n**

P = finn et gitt element x i en array A

Hvis A *er usortert :*

sjekk A[n]*;*
hvis x ikke er der, lett i A[0...n–1]

```
/*   initielt kall med FE(A, x?, A.length–1)   */
int FE(int[] A, x. k) {
      if (k < 0 )  return –1;
      else if (A[k]==x)  return k;
      else return FE(A, x, k–1);   }
```

FE(A, 7, 11)

1	3	5	7	8	9	10	11	13	15	19	20
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**

3. “Splitt og hersk” (engelsk: Divide and Conquer)

***Rekursjon* som en generell strategi for problemløsning og algoritmedesign**

Gitt en instans **n** *av et problem* **P** *:*

1. *hva gjør jeg når* **n** *er basis tilfelle*
2. *hvordan konstruere løsning for* **n** *utfra løsninger for noen instanser* **mindre enn n**

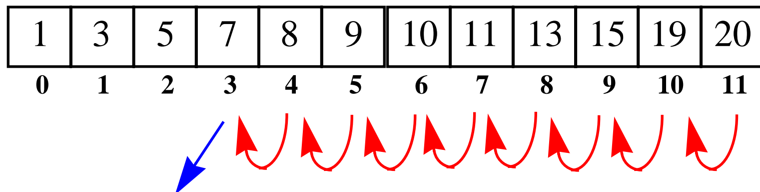
P = finn et gitt element x i en array A

Hvis A *er usortert :*

sjekk A[n]*;*
hvis x ikke er der, lett i A[0...n–1]

```
/*   initielt kall med FE(A, x?, A.length–1)   */
int FE(int[] A, x. k) {
       if (k < 0 )  return –1;
       else if (A[k]==x)  return k;
       else return FE(A, x, k–1);   }
```

FE(A, 7, 11)



3. “Splitt og hersk” (engelsk: Divide and Conquer)

***Rekursjon* som en generell strategi for problemløsning og algoritmedesign**

Gitt en instans **n** *av et problem* **P** *:*

1. *hva gjør jeg når* **n** *er basis tilfelle*
2. *hvordan konstruere løsning for* **n** *utfra løsninger for noen instanser* **mindre enn n**

P = finn et gitt element x i en array A

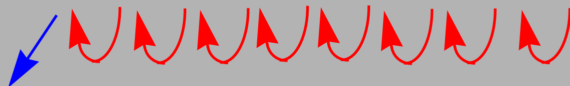
Hvis A *er usortert :*

sjekk A[n]*;*
hvis x ikke er der, lett i A[0...n–1]

```
/*   initielt kall med FE(A, x?, A.length–1)   */
int FE(int[] A, x. k) {
    if (k < 0 )  return –1;
    else if (A[k]==x)  return k;
    else return FE(A, x, k–1);   }
```

FE(A, 7, 11)

1	3	5	7	8	9	10	11	13	15	19	20
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**



Hvis A *er sortert ...*

```
/*   initielt kall med
* BS(A, x?, 0, A.length) */
int BS(int[] A, x, l, h) {
   m = (l+h) / 2;
   if (l > h) return -1;
   else if (A[m] == x) return m;
   else if (A[m] < x)
      return BS(A, x, m+1, h);
   else return BS(A, x, l, m–1); }
```

3. “Splitt og hersk” (engelsk: Divide and Conquer)

***Rekursjon* som en generell strategi for problemløsning og algoritmedesign**

Gitt en instans **n** *av et problem* **P** *:*

1. *hva gjør jeg når* **n** *er basis tilfelle*
2. *hvordan konstruere løsning for* **n** *utfra løsninger for noen instanser* **mindre enn n**

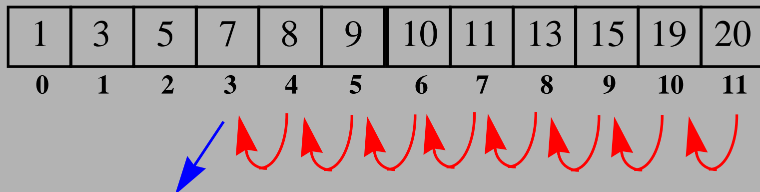
P = finn et gitt element x i en array A

Hvis A er usortert :

sjekk A[n]*;*
hvis x ikke er der, lett i A[0...n–1]

```
/*  initielt kall med FE(A, x?, A.length–1)   */
int FE(int[] A, x. k) {
    if (k < 0 )  return –1;
    else if (A[k]==x)  return k;
    else return FE(A, x, k–1);   }
```

FE(A, 7, 11)

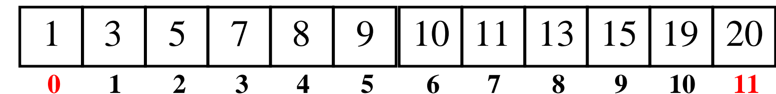


1	3	5	7	8	9	10	11	13	15	19	20
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**

Hvis A er sortert ...

BS(A, 7, 0,11)

```
/*  initielt kall med
* BS(A, x?, 0, A.length) */
int BS(int[] A, x, l, h) {
   m = (l+h) / 2;
   if (l > h) return -1;
   else if (A[m] == x) return m;
   else if (A[m] < x)
      return BS(A, x, m+1, h);
   else return BS(A, x, l, m–1); }
```



1	3	5	7	8	9	10	11	13	15	19	20
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**

3. “Splitt og hersk” (engelsk: Divide and Conquer)

***Rekursjon** som en generell strategi for problemløsning og algoritmedesign*

Gitt en instans **n** *av et problem* **P** *:*

1. *hva gjør jeg når* **n** *er basis tilfelle*
2. *hvordan konstruere løsning for* **n** *utfra løsninger for noen instanser* **mindre enn n**

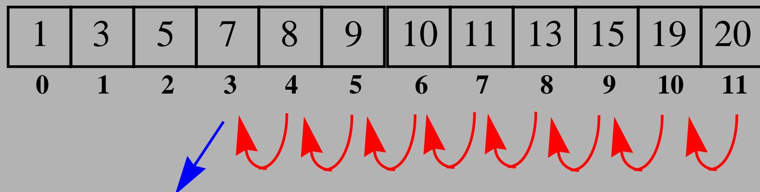
P = finn et gitt element x i en array A

Hvis A er usortert :

sjekk A[n]*;*
hvis x ikke er der, lett i A[0...n–1]

```
/*  initielt kall med FE(A, x?, A.length–1)  */
int FE(int[] A, x. k) {
    if (k < 0 )  return –1;
    else if (A[k]==x)  return k;
    else return FE(A, x, k–1);   }
```

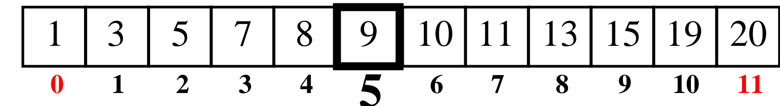
FE(A, 7, 11)



Hvis A er sortert ...

BS(A, 7, 0,11)

```
/*  initielt kall med
* BS(A, x?, 0, A.length) */
int BS(int[] A, x, l, h) {
   m = (l+h) / 2;
   if (l > h) return -1;
   else if (A[m] == x) return m;
   else if (A[m] < x)
       return BS(A, x, m+1, h);
   else return BS(A, x, l, m–1); }
```



3. “Splitt og hersk” (engelsk: Divide and Conquer)

***Rekursjon* som en generell strategi for problemløsning og algoritmedesign**

Gitt en instans **n** *av et problem* **P** *:*

1. *hva gjør jeg når* **n** *er basis tilfelle*
2. *hvordan konstruere løsning for* **n** *utfra løsninger for noen instanser* **mindre enn n**

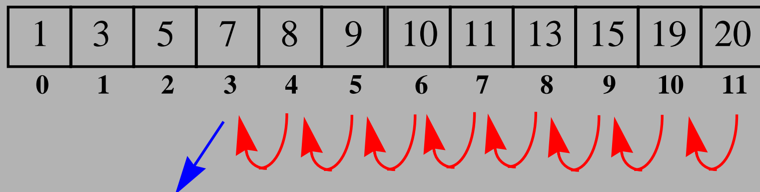
P = finn et gitt element x i en array A

Hvis A er usortert :

sjekk A[n]*;*
hvis x ikke er der, lett i A[0...n–1]

```
/*  initielt kall med FE(A, x?, A.length–1)   */
int FE(int[] A, x. k) {
    if (k < 0 )  return –1;
    else if (A[k]==x)  return k;
    else return FE(A, x, k–1);   }
```

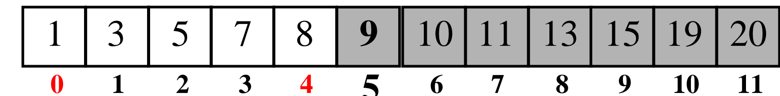
FE(A, 7, 11)

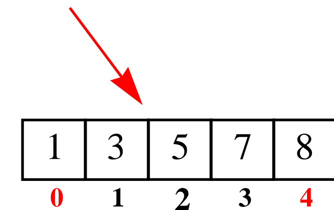


Hvis A er sortert ...

BS(A, 7, 0,11)

```
/*  initielt kall med
* BS(A, x?, 0, A.length) */
int BS(int[] A, x, l, h) {
   m = (l+h) / 2;
   if (l > h) return -1;
   else if (A[m] == x) return m;
   else if (A[m] < x)
      return BS(A, x, m+1, h);
   else return BS(A, x, l, m–1); }
```





3. “Splitt og hersk” (engelsk: Divide and Conquer)

***Rekursjon** som en generell strategi for problemløsning og algoritmedesign*

Gitt en instans **n** *av et problem* **P** *:*

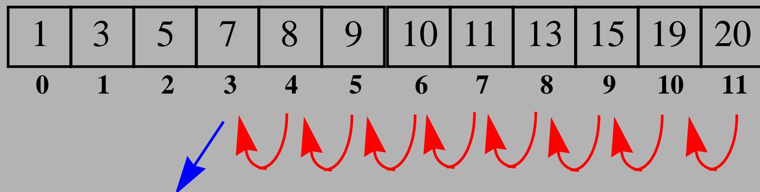
1. *hva gjør jeg når* ***n** er basis tilfelle*
2. *hvordan konstruere løsning for* **n** *utfra løsninger for noen instanser* **mindre enn n**

P = finn et gitt element x i en array A

Hvis A er usortert :

sjekk A[n]*;*
hvis x ikke er der, lett i A[0...n–1]

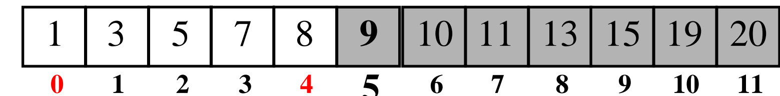
```
/*  initielt kall med FE(A, x?, A.length–1)   */
int FE(int[] A, x. k) {
    if (k < 0 )  return –1;
    else if (A[k]==x)  return k;
    else return FE(A, x, k–1);   }

FE(A, 7, 11)
```

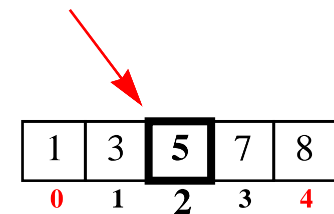


Hvis A er sortert ...

BS(A, 7, 0,11)

```
/*  initielt kall med
 * BS(A, x?, 0, A.length) */
int BS(int[] A, x, l, h) {
   m = (l+h) / 2;
   if (l > h) return -1;
   else if (A[m] == x) return m;
   else if (A[m] < x)
      return BS(A, x, m+1, h);
   else return BS(A, x, l, m–1); }
```





3. “Splitt og hersk” (engelsk: Divide and Conquer)

Rekursjon som en generell strategi for problemløsning og algoritmedesign

Gitt en instans **n** *av et problem* **P** *:*

1. *hva gjør jeg når* **n** *er basis tilfelle*
2. *hvordan konstruere løsning for* **n** *utfra løsninger for noen instanser* **mindre enn n**

P = finn et gitt element x i en array A

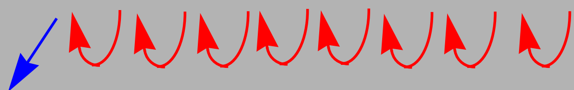
Hvis A er usortert :

sjekk A[n]*;*
hvis x ikke er der, lett i A[0...n–1]

```
/*  initielt kall med FE(A, x?, A.length–1)   */
int FE(int[] A, x. k) {
     if (k < 0 )  return –1;
     else if (A[k]==x)  return k;
     else return FE(A, x, k–1);   }
```

FE(A, 7, 11)

1	3	5	7	8	9	10	11	13	15	19	20
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**

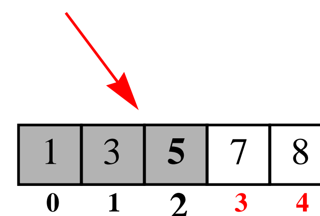


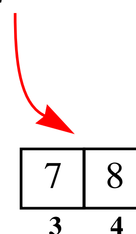
Hvis A er sortert ...

BS(A, 7, 0,11)

```
/*  initielt kall med
* BS(A, x?, 0, A.length) */
int BS(int[] A, x, l, h) {
   m = (l+h) / 2;
   if (l > h) return -1;
   else if (A[m] == x) return m;
   else if (A[m] < x)
      return BS(A, x, m+1, h);
   else return BS(A, x, l, m–1); }
```

1	3	5	7	8	**9**	10	11	13	15	19	20
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**





3. “Splitt og hersk” (engelsk: Divide and Conquer)

***Rekursjon* som en generell strategi for problemløsning og algoritmedesign**

Gitt en instans **n** *av et problem* **P** *:*

1. *hva gjør jeg når* **n** *er basis tilfelle*
2. *hvordan konstruere løsning for* **n** *utfra løsninger for noen instanser* **mindre enn n**

P = finn et gitt element x i en array A

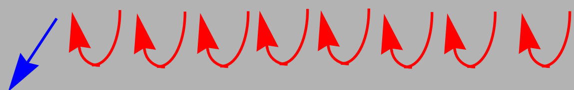
Hvis A er usortert :

sjekk A[n]*;*
hvis x ikke er der, lett i A[0...n–1]

```
/*  initielt kall med FE(A, x?, A.length–1)   */
int FE(int[] A, x. k) {
      if (k < 0 )  return –1;
      else if (A[k]==x)  return k;
      else return FE(A, x, k–1);   }
```

FE(A, 7, 11)

1	3	5	7	8	9	10	11	13	15	19	20
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

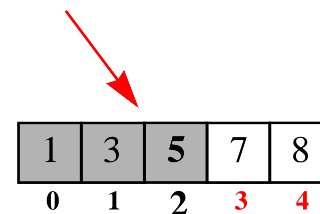


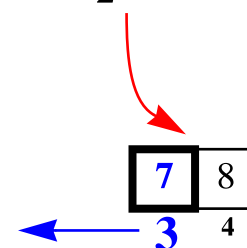
Hvis A er sortert ...

BS(A, 7, 0,11)

```
/*   initielt kall med
* BS(A, x?, 0, A.length) */
int BS(int[] A, x, l, h) {
   m = (l+h) / 2;
   if (l > h) return -1;
   else if (A[m] == x) return m;
   else if (A[m] < x)
      return BS(A, x, m+1, h);
   else return BS(A, x, l, m–1); }
```

1	3	5	7	8	9	10	11	13	15	19	20
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11





3. "Splitt og hersk" (eng: Divide and Conquer)

***Rekursjon* som en generell strategi for problemløsning og algoritmedesign**

Gitt en instans **n** *av et problem* **P** *:*

1. *hva gjør jeg når* **n** *er basis tilfelle*
2. *hvordan konstruere løsning for* **n** *utfra løsninger for noen instanser* **mindre enn n**

P = sorter input array A

3. "Splitt og hersk" (eng: Divide and Conquer)

***Rekursjon* som en generell strategi for problemløsning og algoritmedesign**

Gitt en instans **n** *av et problem* **P** *:*

1. *hva gjør jeg når* **n** *er basis tilfelle*
2. *hvordan konstruere løsning for* **n** *utfra løsninger for noen instanser* **mindre enn n**

P = sorter input array A

```
/* int[] SS(int[] A,k) {
 * initielt kall med SS(A,0)
 * n = A.length;
 *    if (k==n-1) { return A; }
 *    else {
 *        i= indeksen til minste elementet
 *           i A[k...n-1];
 *        bytt A[k] med A[i];
 *        return SS(A, k+1); } }    */
```

3. "Splitt og hersk" (eng: Divide and Conquer)

***Rekursjon* som en generell strategi for problemløsning og algoritmedesign**

Gitt en instans **n** *av et problem* **P** *:*

1. *hva gjør jeg når* **n** *er basis tilfelle*
2. *hvordan konstruere løsning for* **n** *utfra løsninger for noen instanser* **mindre enn n**

P = sorter input array A

```
/* int[] SS(int[] A,k) {
 * initielt kall med SS(A,0)
 * n = A.length;
 *    if (k==n-1) { return A; }
 *    else {
 *       i= indeksen til minste elementet
 *          i A[k...n-1];
 *       bytt A[k] med A[i];
 *       return SS(A, k+1); } }   */
```

```
/* int[] MergeSort ( int[] A )  {
 *    int n = A.length;
 *    if (n == 1) { return A; }
 *    else {
 *       del A i midten i
 *       t1 = A[0...n/2] og t2 = A[n/2+1...n];
 *       sorter rekursivt begge (mindre) array
 *            r1 = MergeSort ( t1 ) og
 *            r2 = MergeSort ( t2 )
 *       return flettet resultat av disse FL(r1,r2)
 *    } }
 * FL - fletter to sorterte array i en sortert array */
```

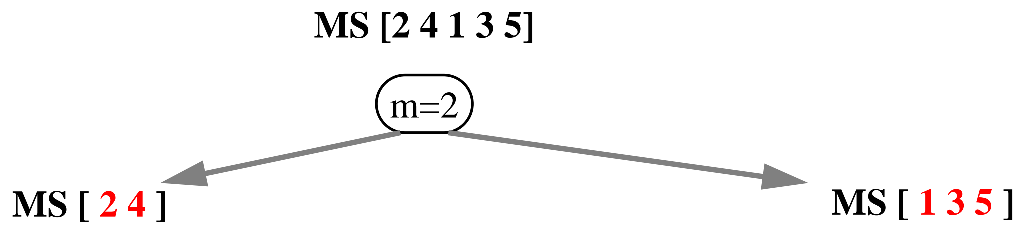
MS [2 4 1 3 5]

```
MS ( Ar[l...h] )
  n = Ar.lenght
  if (n == 1) return Ar;
  else
    m= n/2;
    return FL(
              MS ( Ar[l...m] ),
              MS ( Ar[m+1...h] )
               )
```

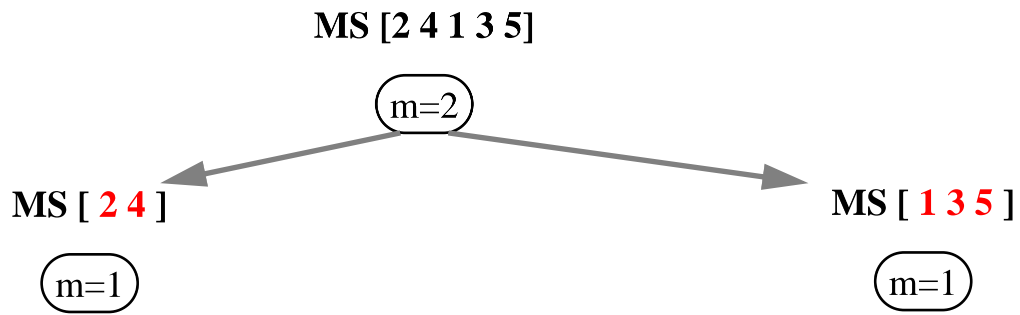
MS [2 4 1 3 5]

m=2

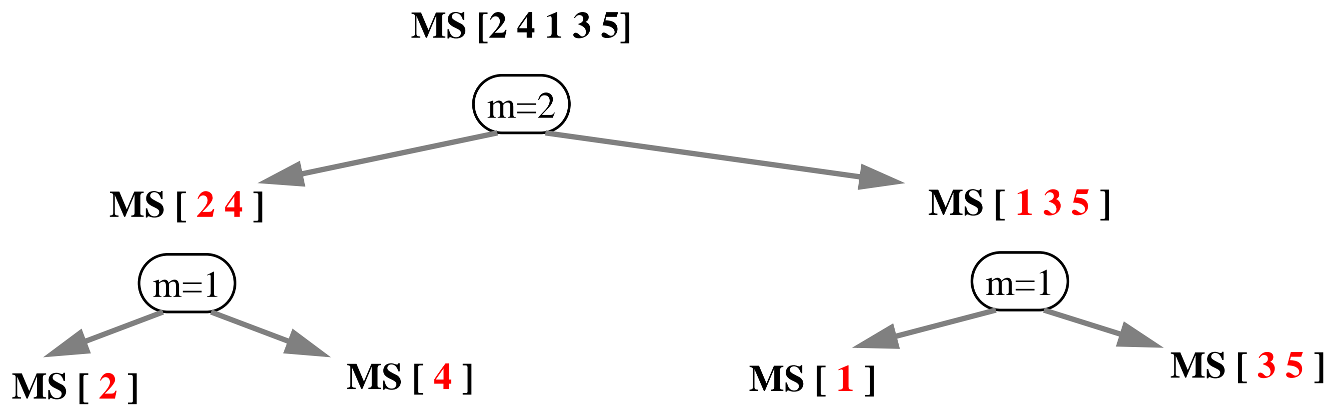
```
MS ( Ar[l...h] )
  n = Ar.lenght
  if (n == 1) return Ar;
  else
  m= n/2;
    return FL(
              MS ( Ar[l...m] ),
              MS ( Ar[m+1...h] )
              )
```



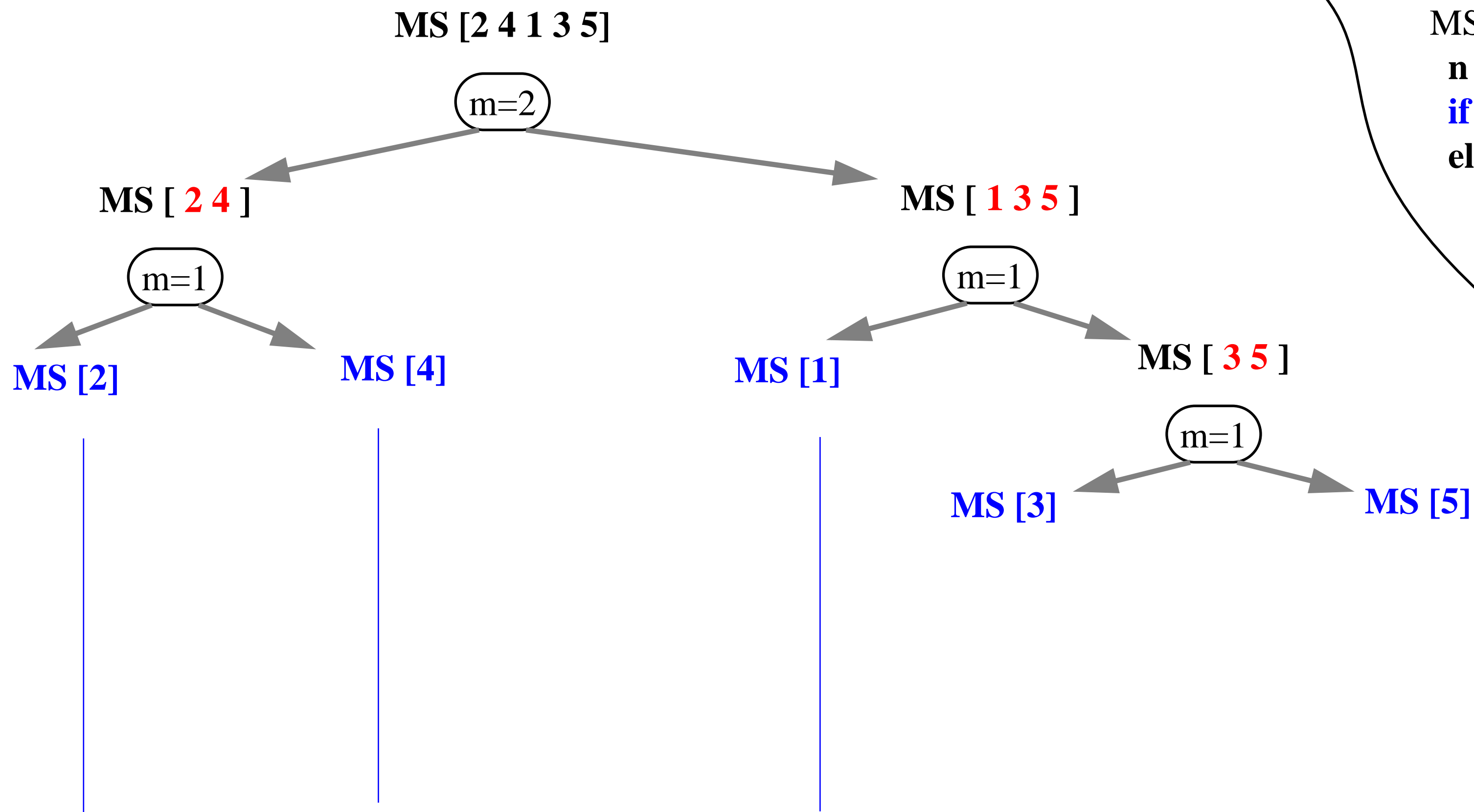

```
MS ( Ar[l...h] )
  n = Ar.lenght
  if (n == 1) return Ar;
  else
    m= n/2;
    return FL(
               MS ( Ar[l...m] ),
               MS ( Ar[m+1...h] )
              )
```



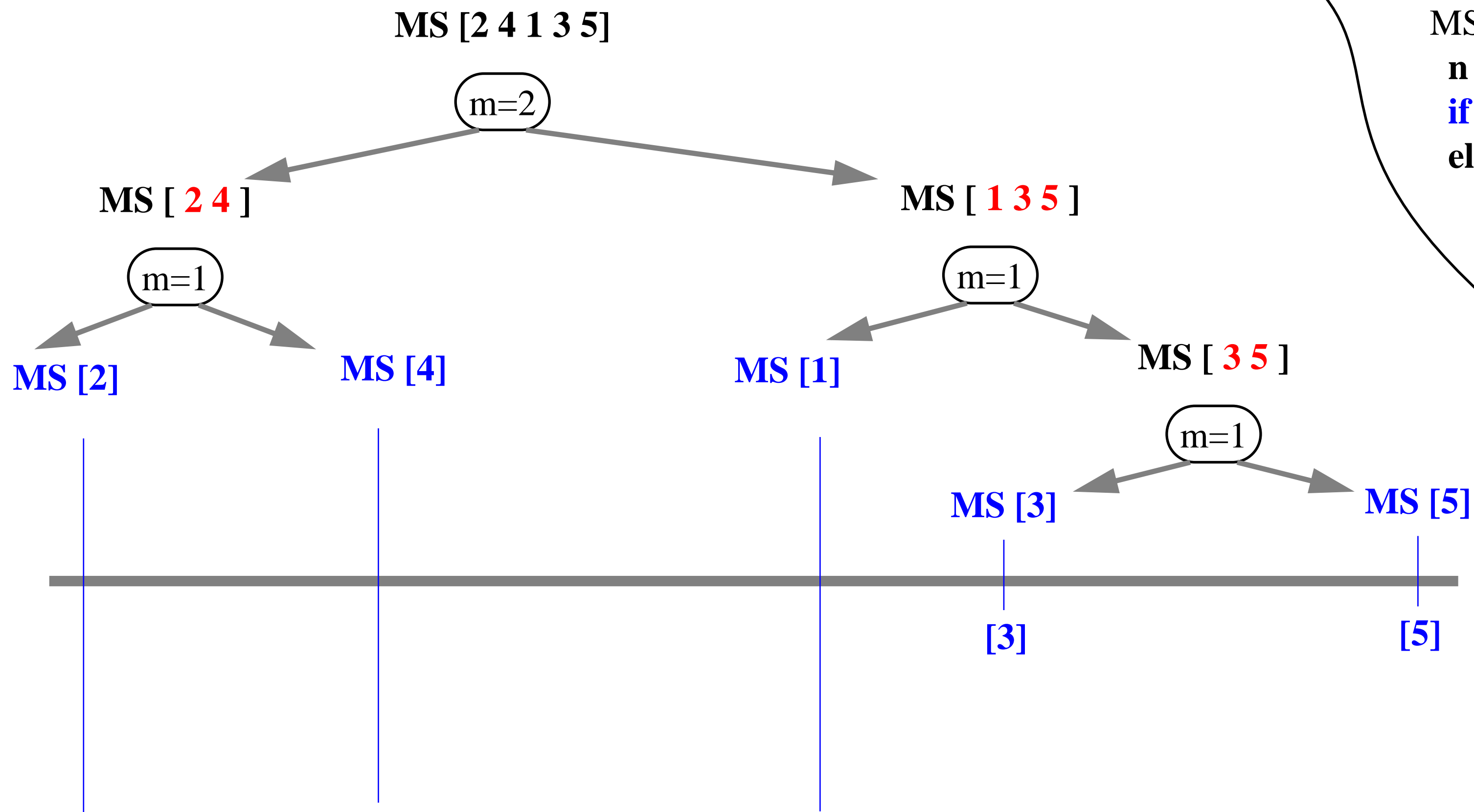

```
MS ( Ar[l...h] )
  n = Ar.lenght
  if (n == 1) return Ar;
  else
   m= n/2;
    return FL(
             MS ( Ar[l...m] ),
             MS ( Ar[m+1...h] )
              )
```



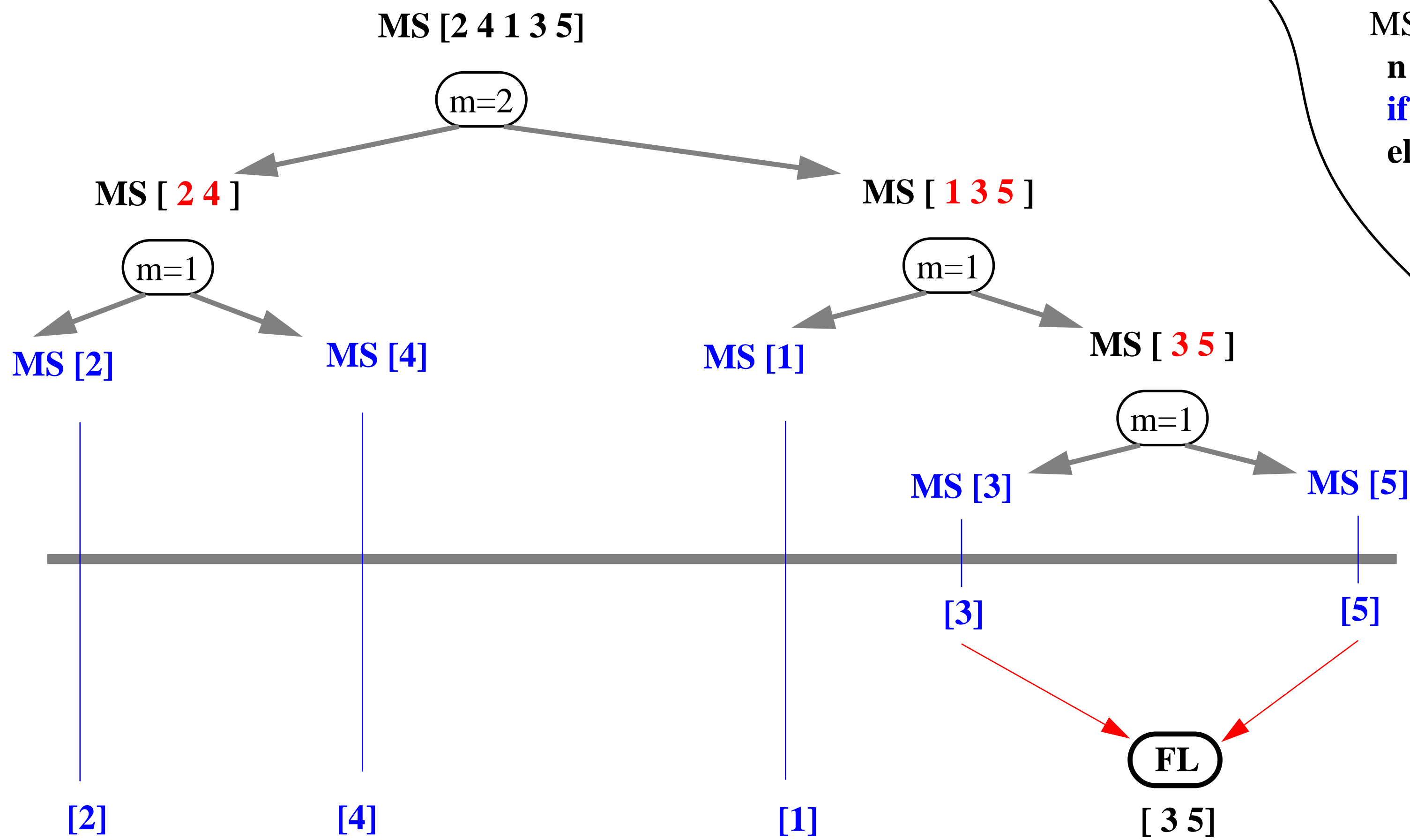

```
MS ( Ar[l...h] )
  n = Ar.lenght
  if (n == 1) return Ar;
  else
    m= n/2;
    return FL(
               MS ( Ar[l...m] ),
               MS ( Ar[m+1...h] )
                )
```



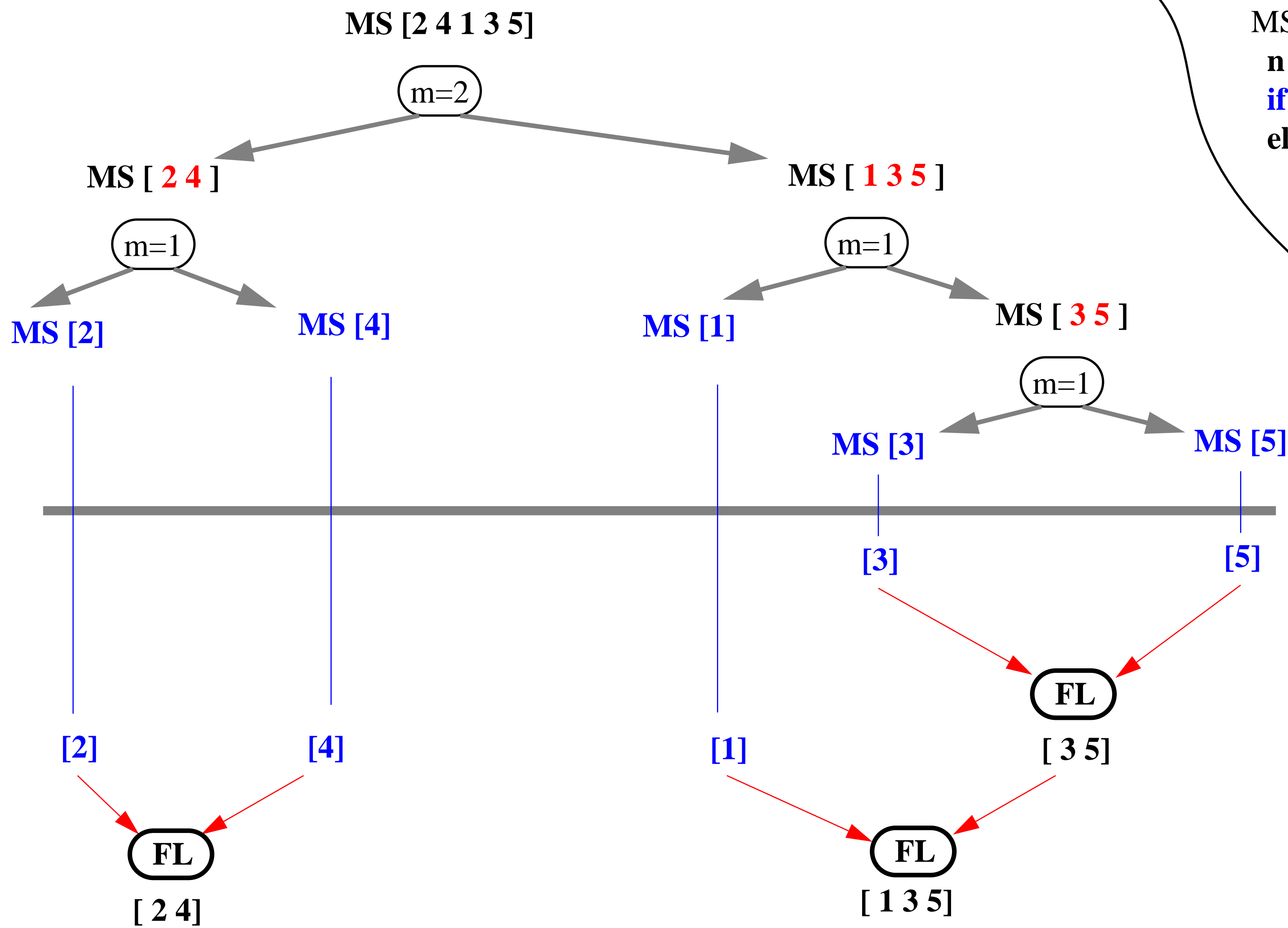

```
MS ( Ar[l...h] )
  n = Ar.lenght
  if (n == 1) return Ar;
  else
     m= n/2;
     return FL(
               MS ( Ar[l...m] ),
               MS ( Ar[m+1...h] )
                )
```



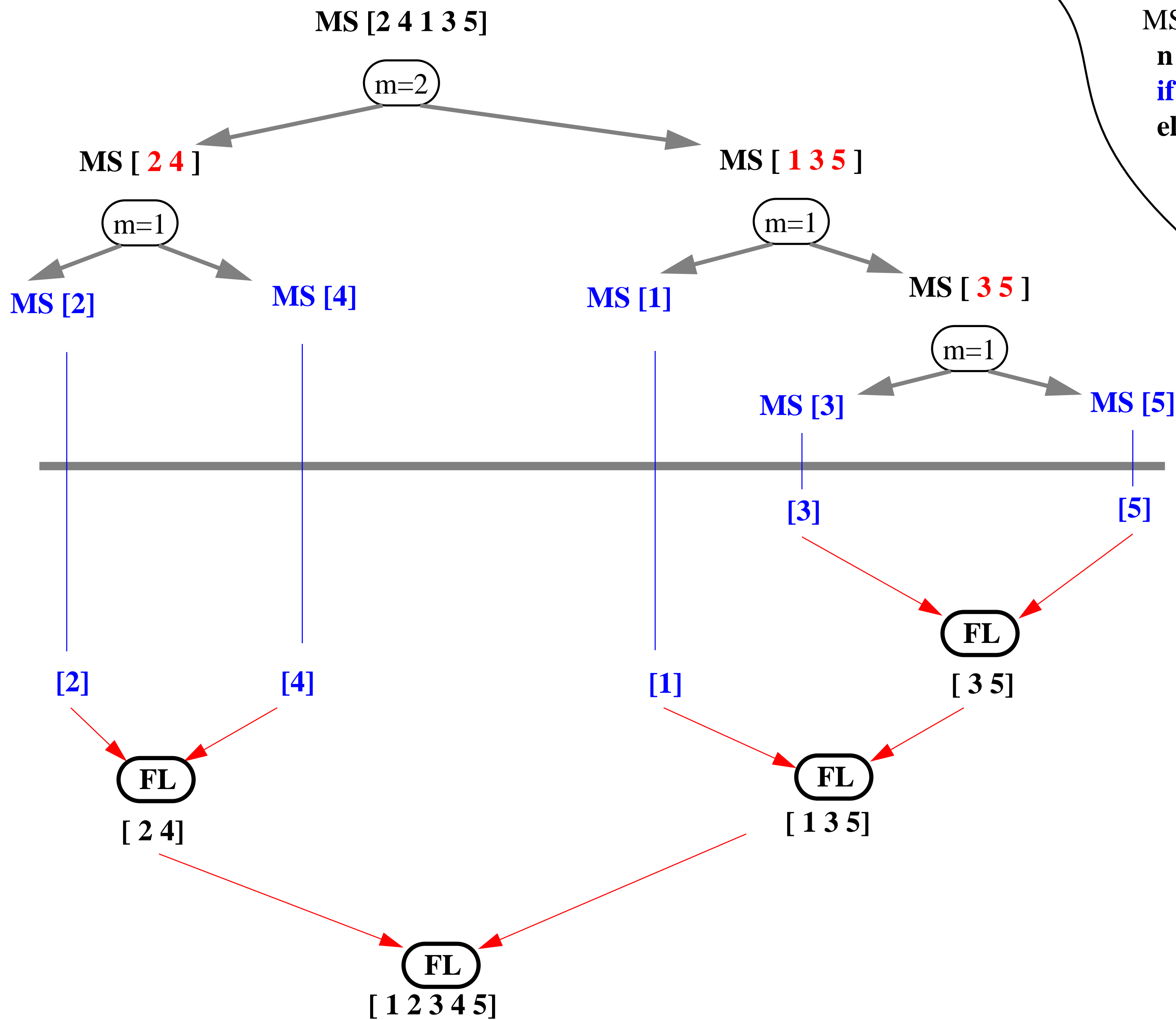

```
MS ( Ar[l...h] )
  n = Ar.lenght
  if (n == 1) return Ar;
  else
    m= n/2;
    return FL(
              MS ( Ar[l...m] ),
              MS ( Ar[m+1...h] )
             )
```




```
MS ( Ar[l...h] )
  n = Ar.lenght
  if (n == 1) return Ar;
  else
    m= n/2;
    return FL(
               MS ( Ar[l...m] ),
               MS ( Ar[m+1...h] )
              )
```




```
MS ( Ar[l...h] )
  n = Ar.lenght
  if (n == 1) return Ar;
  else
    m= n/2;
    return FL(
            MS ( Ar[l...m] ),
            MS ( Ar[m+1...h] )
            )
```




```
MS ( Ar[l...h] )
  n = Ar.lenght
  if (n == 1) return Ar;
  else
     m= n/2;
     return FL(
              MS ( Ar[l...m] ),
              MS ( Ar[m+1...h] )
              )
```

4. Iterasjon til rekursjon

```
/**  @param n > 0
     @return 1+2+...+n */
int sumIter(int n) {
     int res =0;
     while (n > 0) {
         res = res + n;
         n = n–1;
     }
     return res;
}
```

```
/**  @param n > 0
     @return 1+2+...+n */
int sumRek(int n) {
     if (n == 0) return 0;
     else return n + sumR(n-1);
}
```

4. Iterasjon til rekursjon

```
/**  @param n > 0
     @return 1+2+...+n */
int sumIter(int n) {
     int res =0;
     while (n > 0) {
         res = res + n;
         n = n–1;
     }
     return res;
}
```

```
/**  @param n > 0
     @return 1+2+...+n */
int sumRek(int n) {
     if (n == 0) return 0;
     else return n + sumR(n-1);
}
```

Generelt, dog ikke 100% riktig:

```
int Iter(int n) {
     res= init;
     while ( fortsett(n) ) {
         res= Kroppen(n,res);
         oppdater(n);
     }
     return res;
}
```

4. Iterasjon til rekursjon

```
/**  @param n > 0
     @return 1+2+...+n */
int sumIter(int n) {
      int res =0;
      while (n > 0) {
          res = res + n;
          n = n–1;
      }
      return res;
}
```

```
/**  @param n > 0
     @return 1+2+...+n */
int sumRek(int n) {
      if (n == 0) return 0;
      else return n + sumR(n-1);
}
```

Generellt, dog ikke 100% riktig:

```
int Iter(int n) {
      res= init;
      while ( fortsett(n) ) {
          res= Kroppen(n,res);
          oppdater(n);
      }
      return res;
}
```

```
int Rekursiv(int n) {
      if ( !fortsett(n) ) return basetilfelle / init;
      else return  Kroppen(n, Rekursiv(oppdater(n)));
}
```

4. Iterasjon til rekursjon

```
/**  @param n > 0
     @return 1+2+...+n */
int sumIter(int n) {
     int res =0;
     while (n > 0) {
         res = res + n;
         n = n–1;
     }
     return res;
}
```

```
/**  @param n > 0
     @return 1+2+...+n */
int sumRek(int n) {
     if (n == 0) return 0;
     else return n + sumR(n-1);
}
```

Generellt, dog ikke 100% riktig:

```
int Iter(int n) {
     res= init;
     while ( fortsett(n) ) {
         res= Kroppen(n,res);
         oppdater(n);
     }
     return res;
}
```

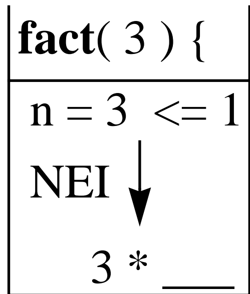
```
int Rekursiv(int n) {
     if ( !fortsett(n) ) return basetilfelle / init;
     else return  Kroppen(n, Rekursiv(oppdater(n)));
}
```

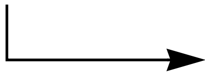
*Enhver **iterasjon** kan skrives som **rekursjon***

... t.o.m. som hale-rekursjon

4a. Rekursjon implementeres med en stabel

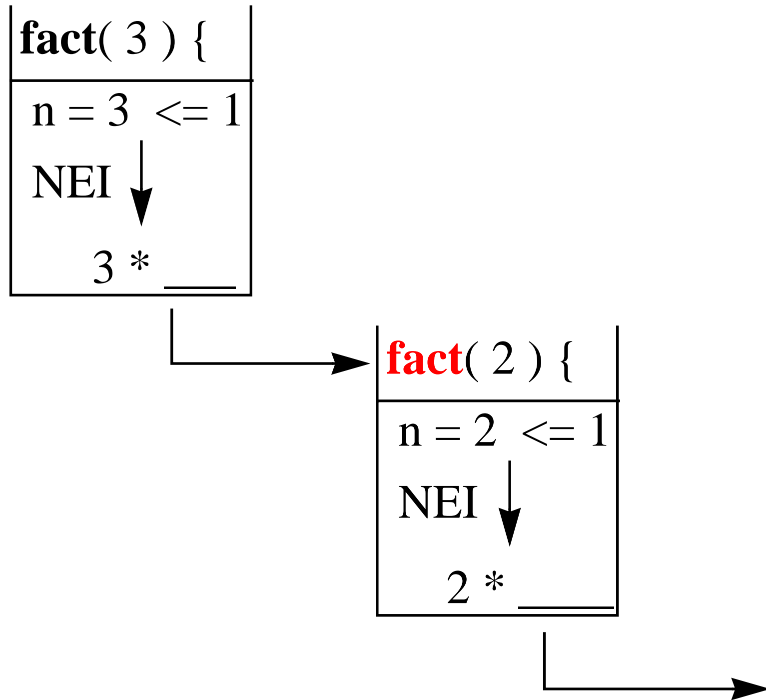
```
public int fact( int n ) {
    if (n <= 1) return 1;
    else  return  n *  fact( n–1 );
}
```





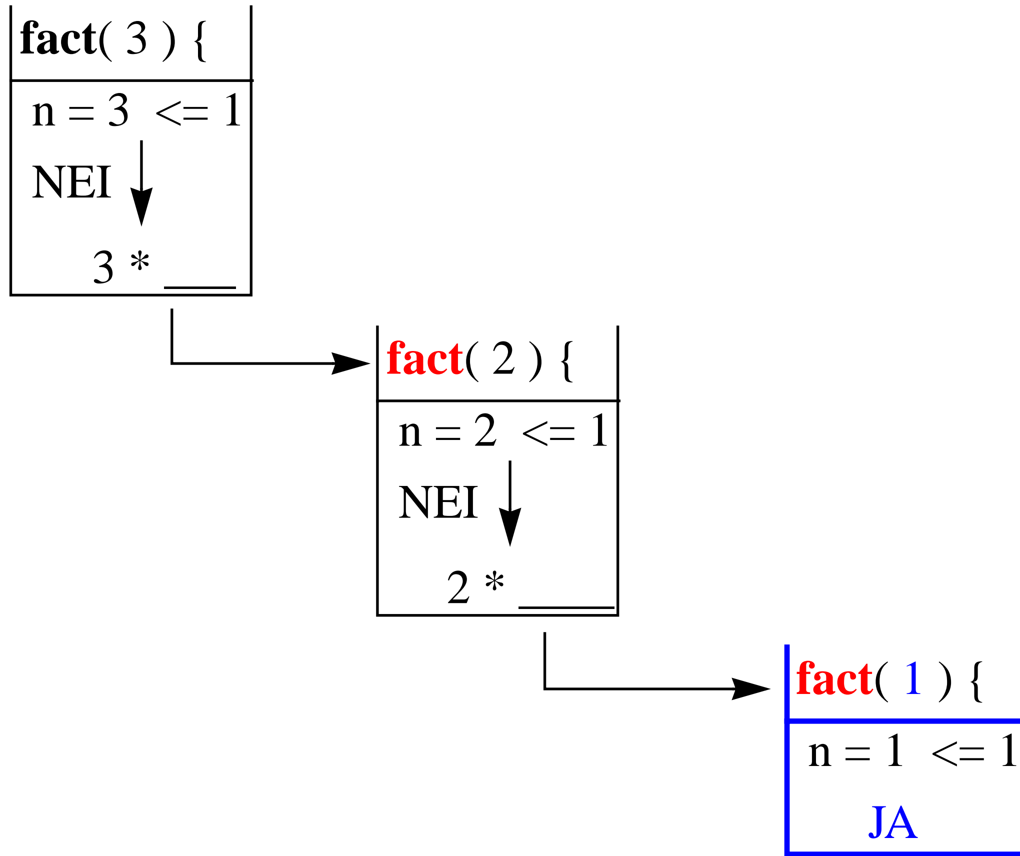
4a. Rekursjon implementeres med en stabel

```
public int fact( int n ) {
    if (n <= 1) return 1;
    else return n * fact( n–1 );
}
```



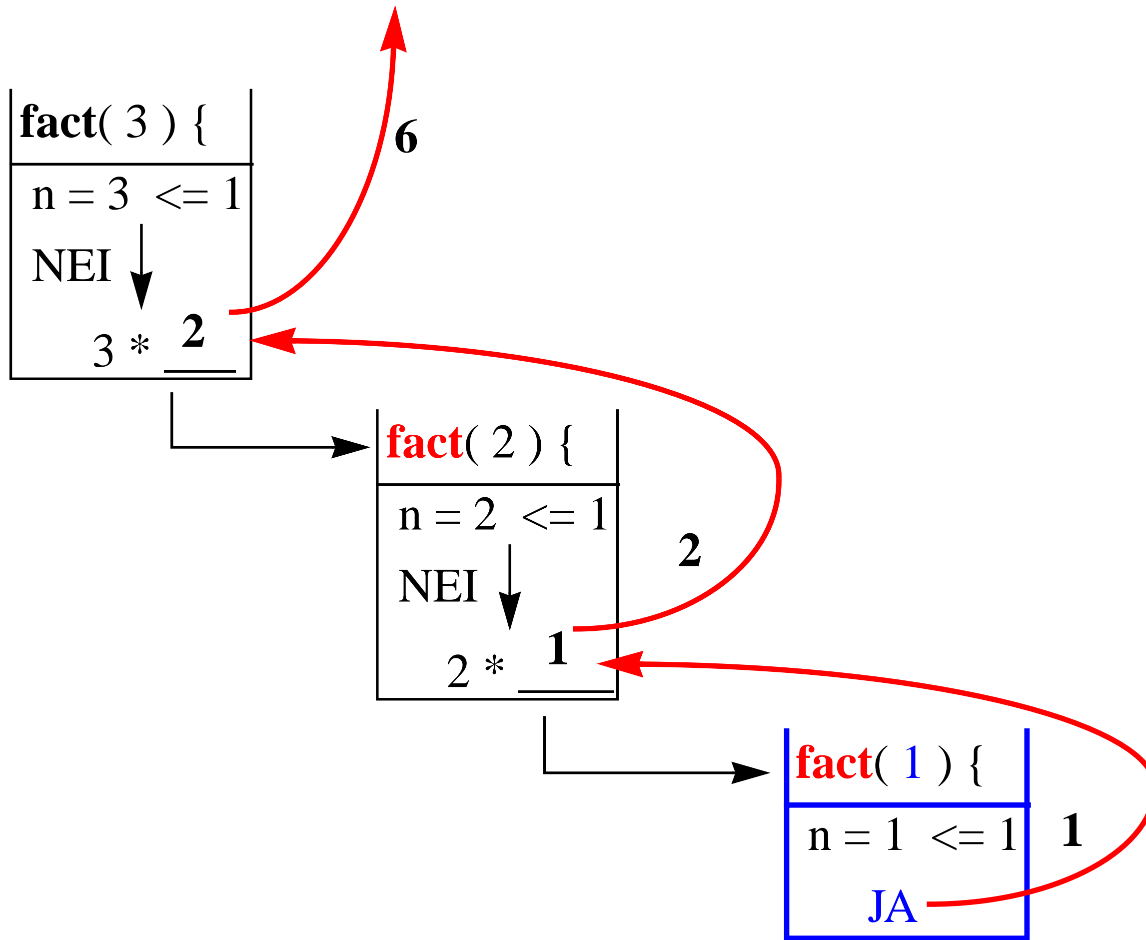
4a. Rekursjon implementeres med en stabel

```
public int fact( int n ) {
    if (n <= 1) return 1;
    else  return  n *  fact( n–1 );
}
```



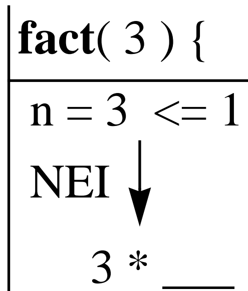
4a. Rekursjon implementeres med en stabel

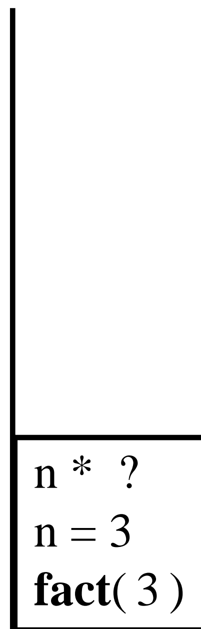
```
public int fact( int n ) {
    if (n <= 1) return 1;
    else  return  n *  fact( n–1 );
}
```



4a. Rekursjon implementeres med en stabel

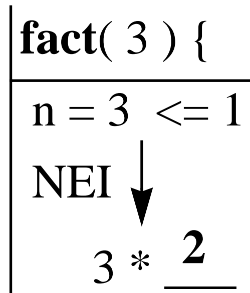
```
public int fact( int n ) {
    if (n <= 1) return 1;
    else  return  n *  fact( n–1 );
}
```

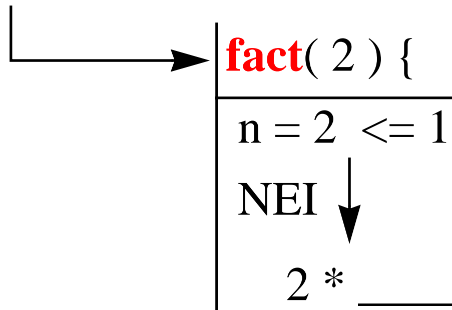


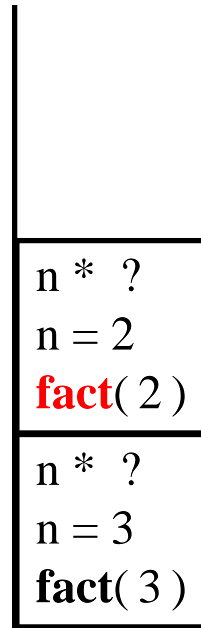


4a. Rekursjon implementeres med en stabel

```
public int fact( int n ) {
   if (n <= 1) return 1;
   else  return  n *  fact( n–1 );
}
```

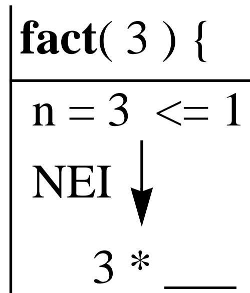


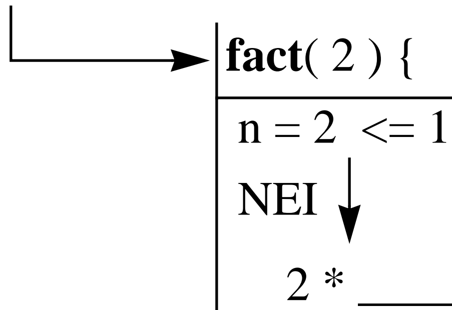


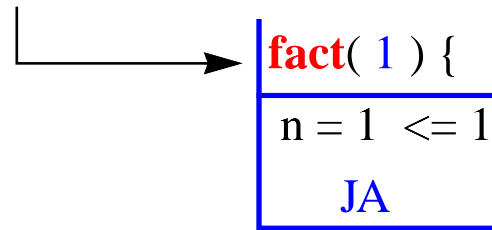


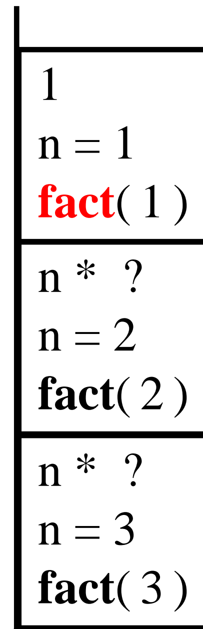
4a. Rekursjon implementeres med en stabel

```
public int fact( int n ) {
    if (n <= 1) return 1;
    else  return  n *  fact( n–1 );
}
```



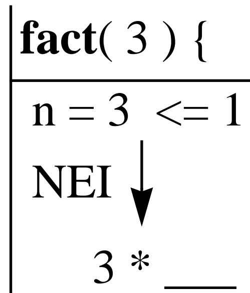


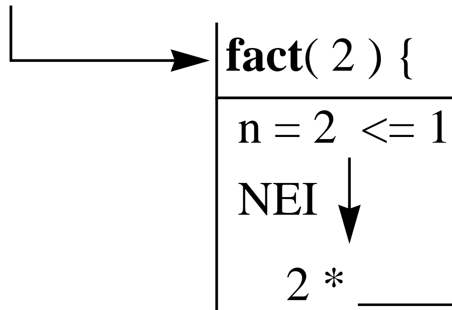


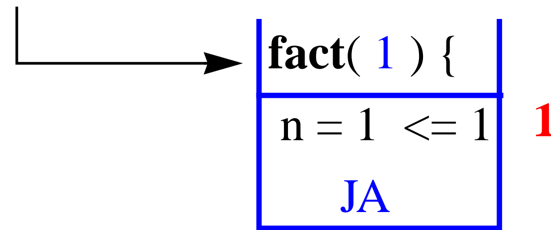


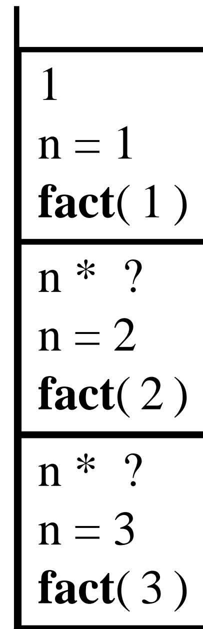
4a. Rekursjon implementeres med en stabel

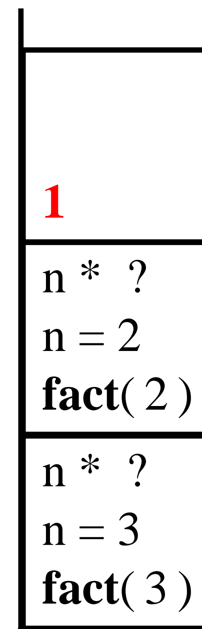
public **int fact**(int n) {
    if (n <= 1) return 1;
    else return n * **fact**(n–1);
}





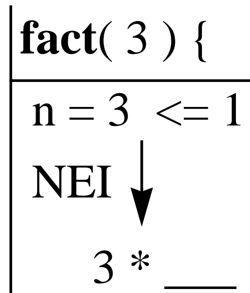


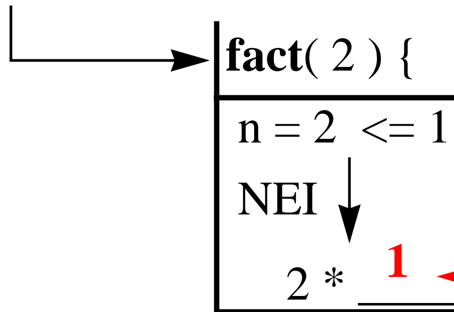


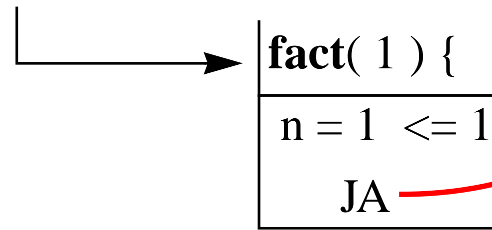


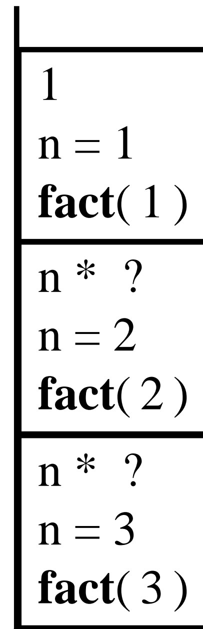
4a. Rekursjon implementeres med en stabel

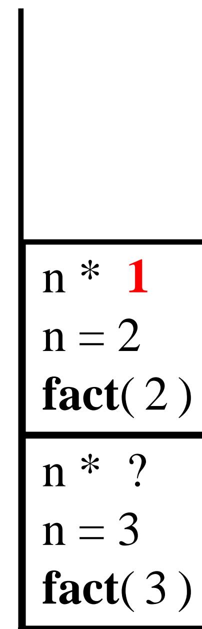
```
public int fact( int n ) {
    if (n <= 1) return 1;
    else return n * fact( n–1 );
}
```





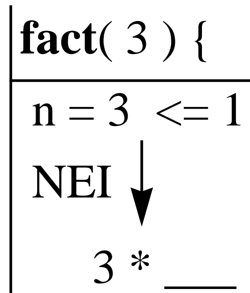


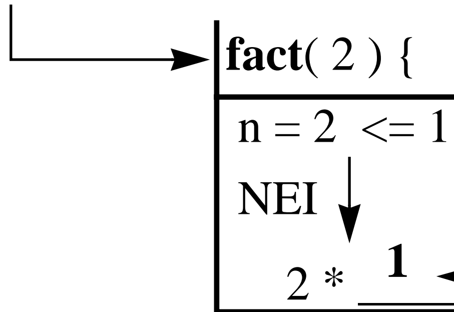


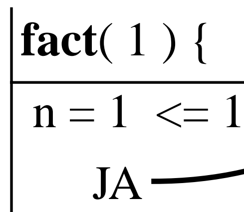


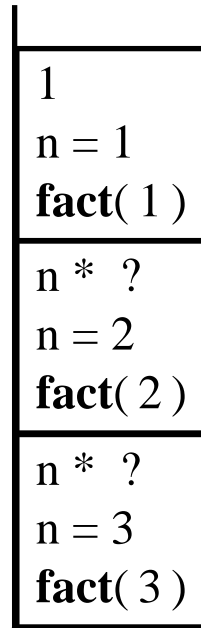
4a. Rekursjon implementeres med en stabel

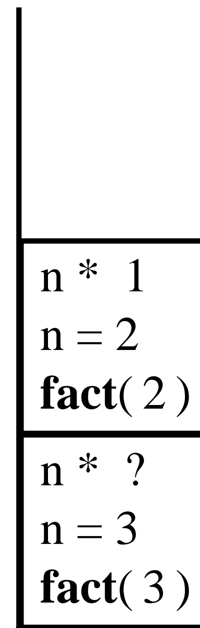
```
public int fact( int n ) {
    if (n <= 1) return 1;
    else  return  n *  fact( n–1 );
}
```

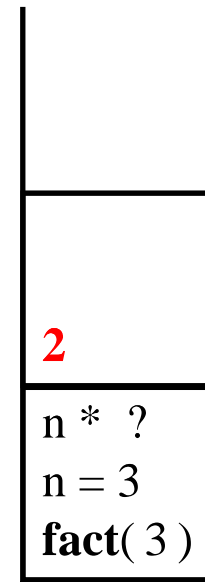






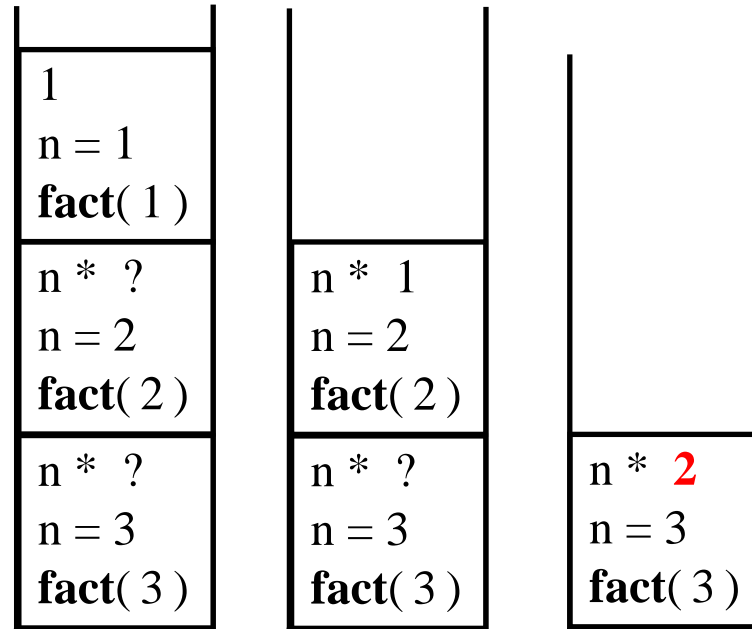


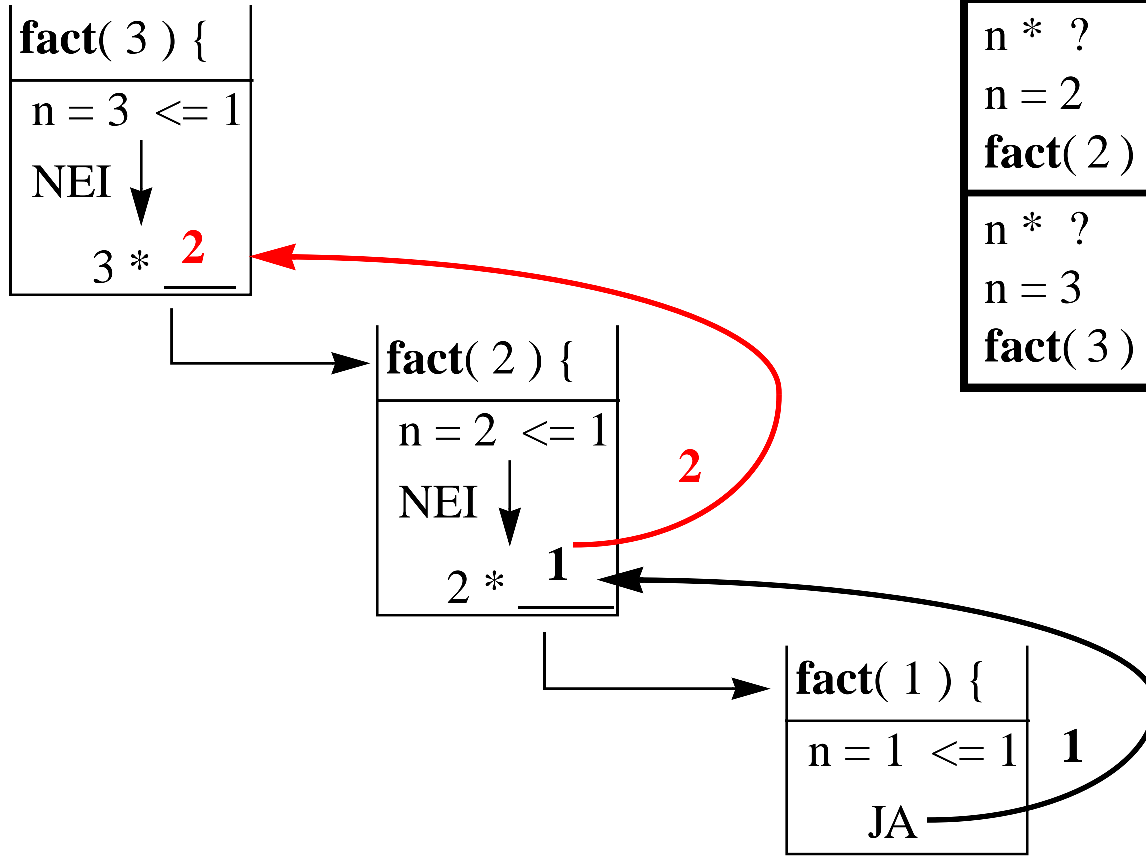




4a. Rekursjon implementeres med en stabel

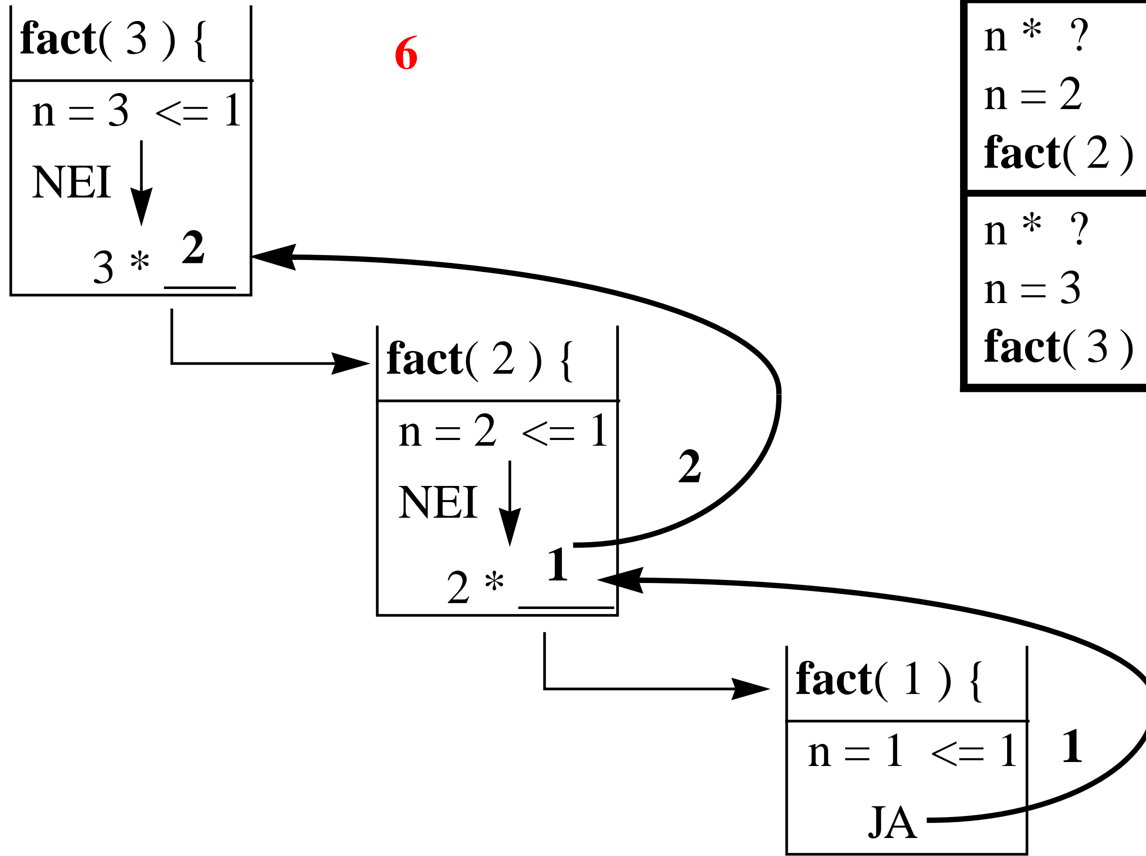
```
public int fact( int n ) {
    if (n <= 1) return 1;
    else  return  n *  fact( n–1 );
}
```

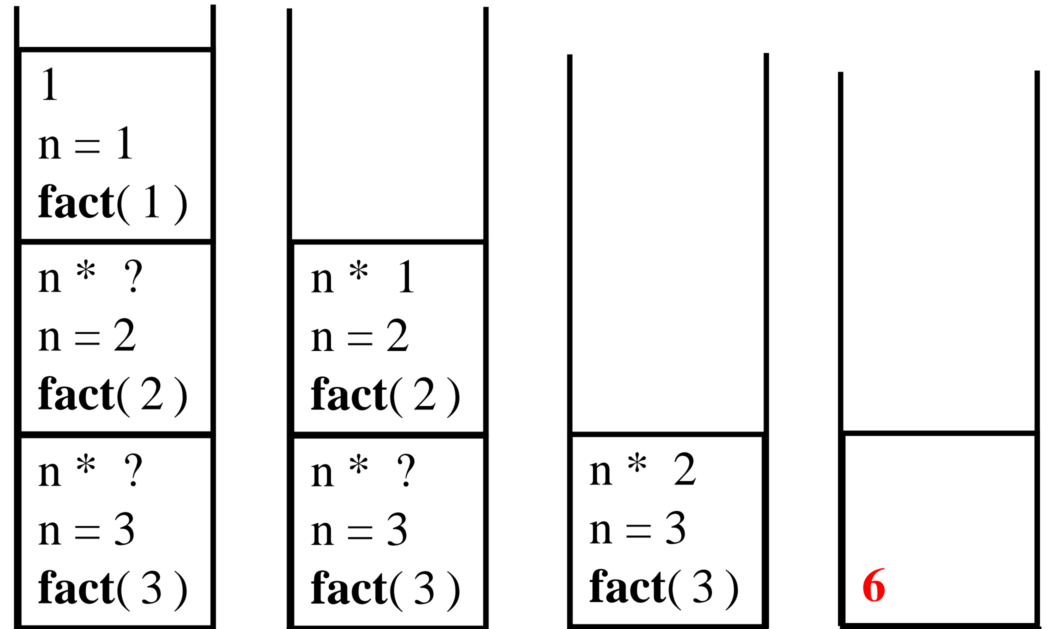




4a. Rekursjon implementeres med en stabel

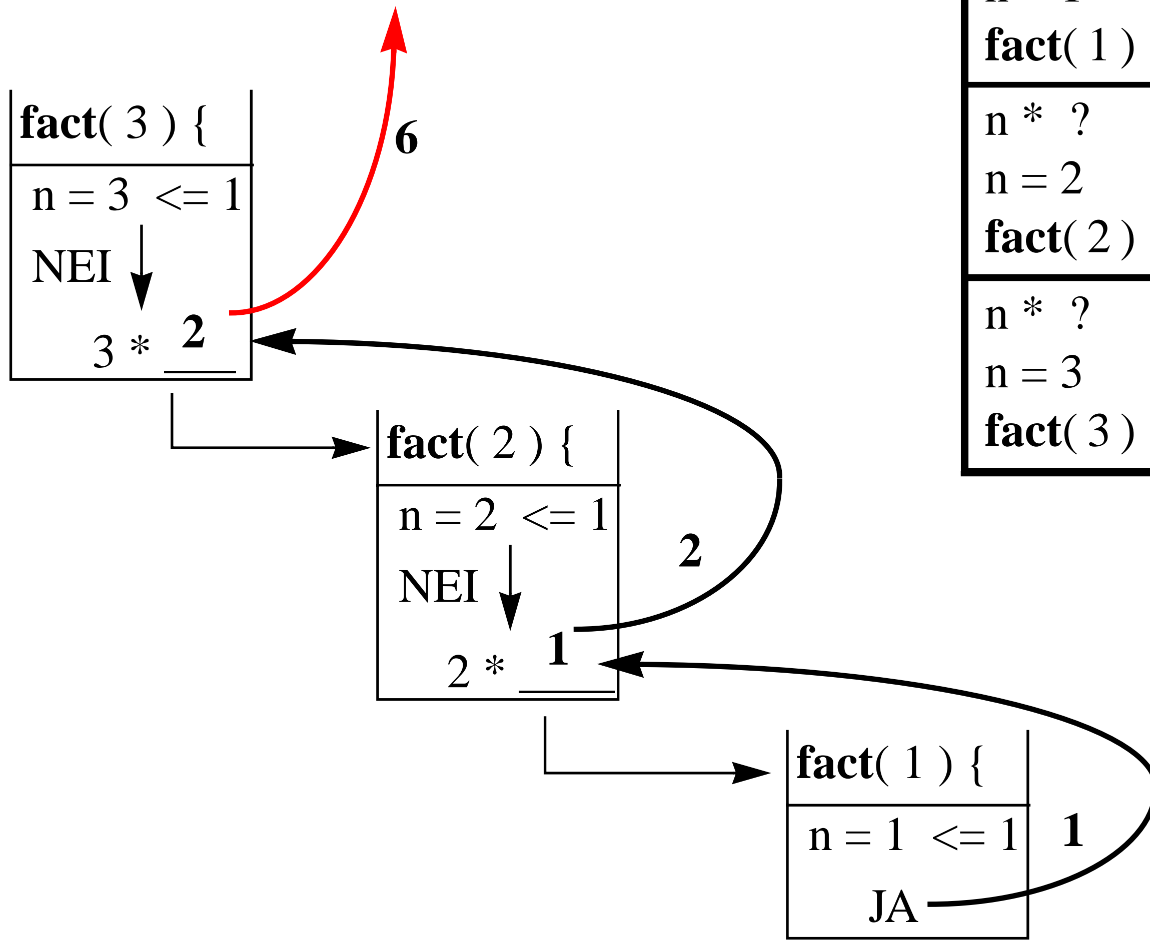
```
public int fact( int n ) {
    if (n <= 1) return 1;
    else  return  n *  fact( n–1 );
}
```

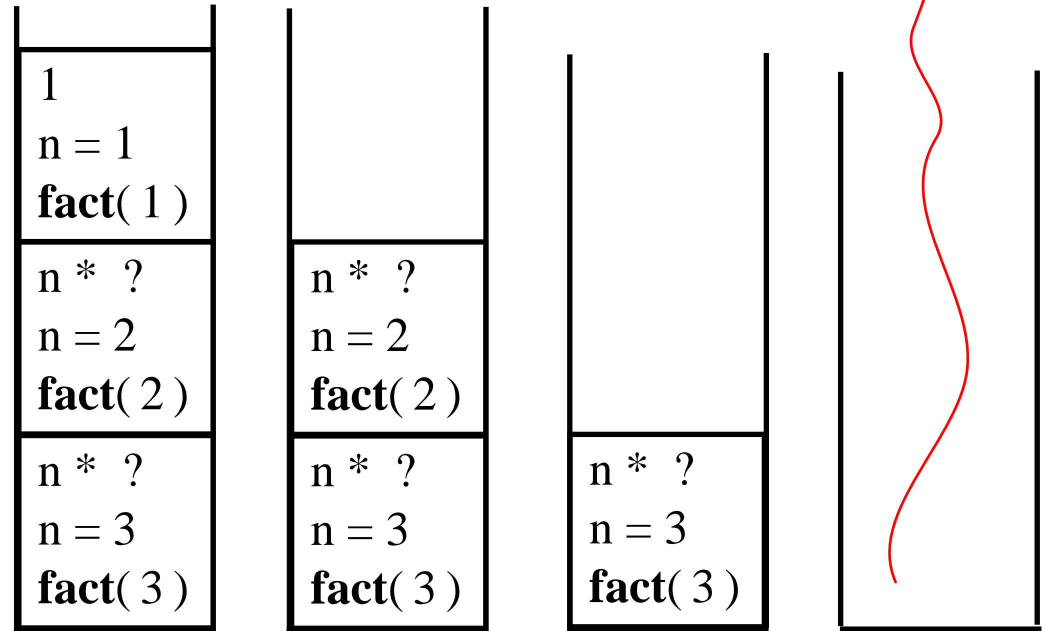




4a. Rekursjon implementeres med en stabel

```
public int fact( int n ) {
    if (n <= 1) return 1;
    else return  n *  fact( n–1 );
}
```

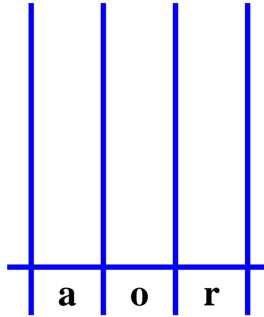




4b. Rekursjon implementeres med en stabel

For Fib kan vi bruke f.eks. 3 stabler ar(argument), op(operator), re(resultat)

```
int Fib(int n) {
if (n==0 || n==1) return 1;
else
      return Fib(n-1) + Fib(n-2);}
```

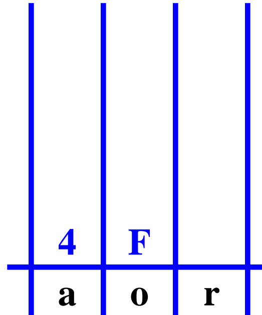


4b. Rekursjon implementeres med en stabel

For Fib kan vi bruke f.eks. 3 stabler ar(argument), op(operator), re(resultat)

```
int Fib(int n) {
if (n==0 || n==1) return 1;
else
      return Fib(n-1) + Fib(n-2);}
```

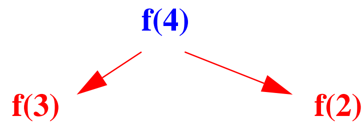
f(4)

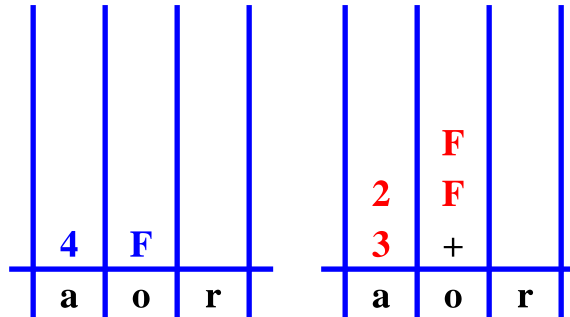


4b. Rekursjon implementeres med en stabel

For Fib kan vi bruke f.eks. 3 stabler ar(argument), op(operator), re(resultat)

```
int Fib(int n) {
if (n==0 || n==1) return 1;
else
      return Fib(n-1) + Fib(n-2);}
```

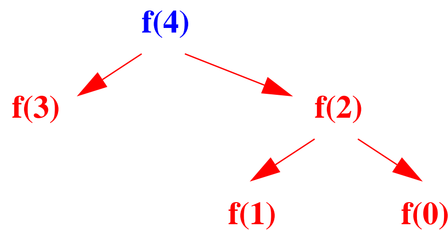


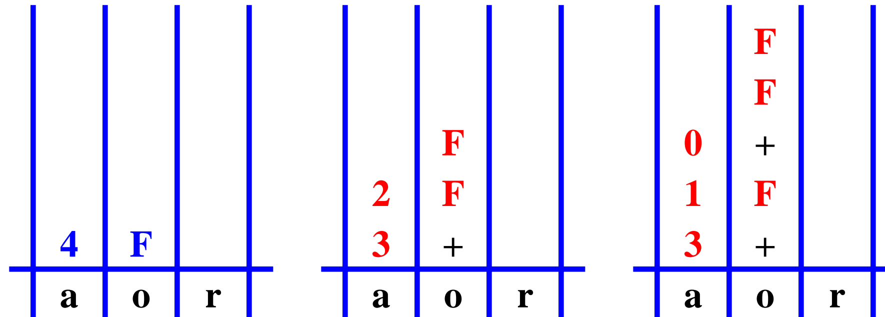


4b. Rekursjon implementeres med en stabel

For Fib kan vi bruke f.eks. 3 stabler ar(argument), op(operator), re(resultat)

```
int Fib(int n) {
if (n==0 || n==1) return 1;
else
      return Fib(n-1) + Fib(n-2);}
```

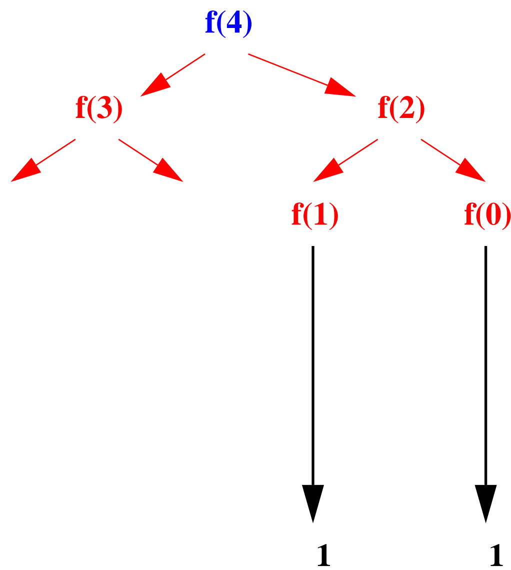


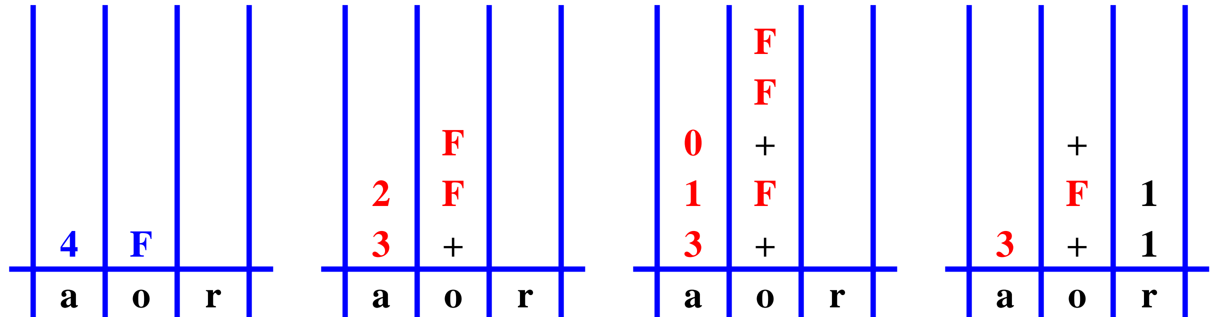


4b. Rekursjon implementeres med en stabel

For Fib kan vi bruke f.eks. 3 stabler ar(argument), op(operator), re(resultat)

```
int Fib(int n) {
if (n==0 || n==1) return 1;
else
      return Fib(n-1) + Fib(n-2);}
```

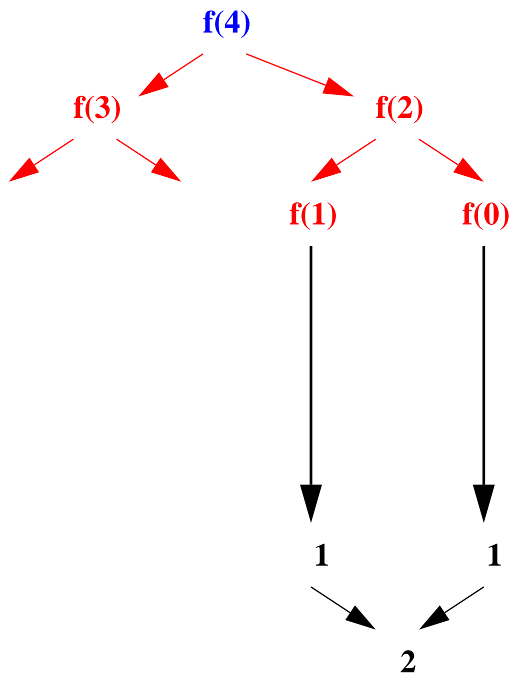


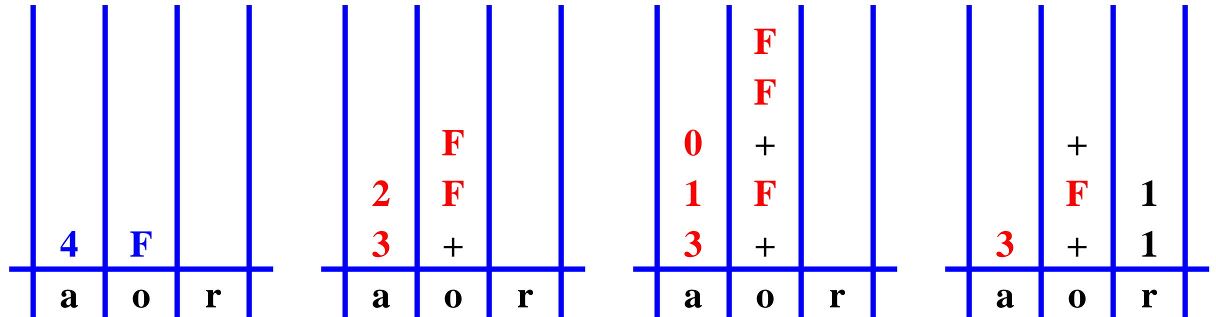


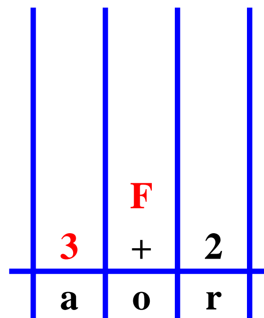
4b. Rekursjon implementeres med en stabel

For Fib kan vi bruke f.eks. 3 stabler ar(argument), op(operator), re(resultat)

```
int Fib(int n) {
if (n==0 || n==1) return 1;
else
      return Fib(n-1) + Fib(n-2);}
```



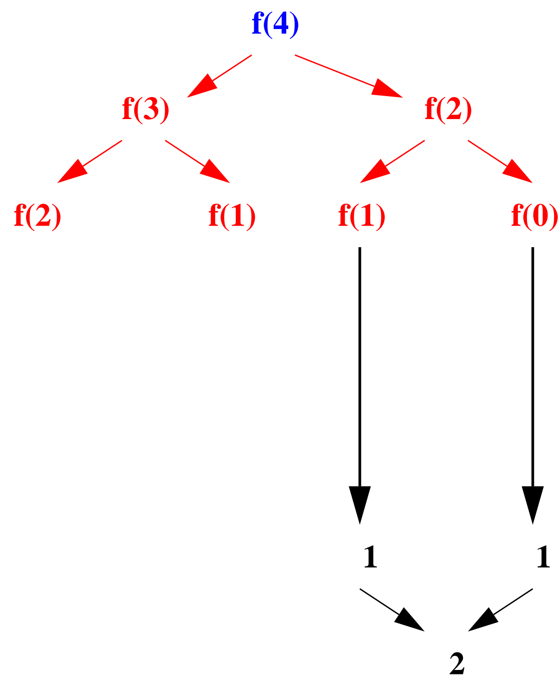


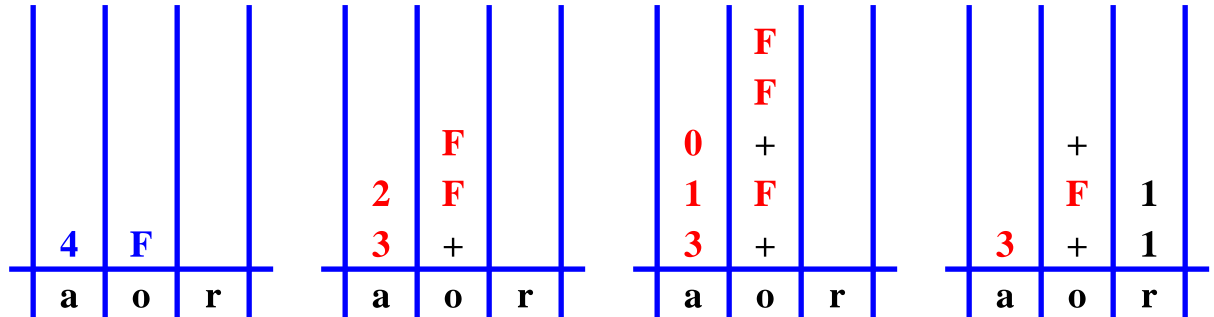


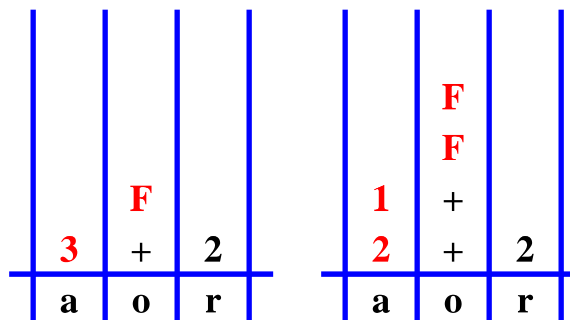
4b. Rekursjon implementeres med en stabel

For Fib kan vi bruke f.eks. 3 stabler ar(argument), op(operator), re(resultat)

```
int Fib(int n) {
if (n==0 || n==1) return 1;
else
      return Fib(n-1) + Fib(n-2);}
```



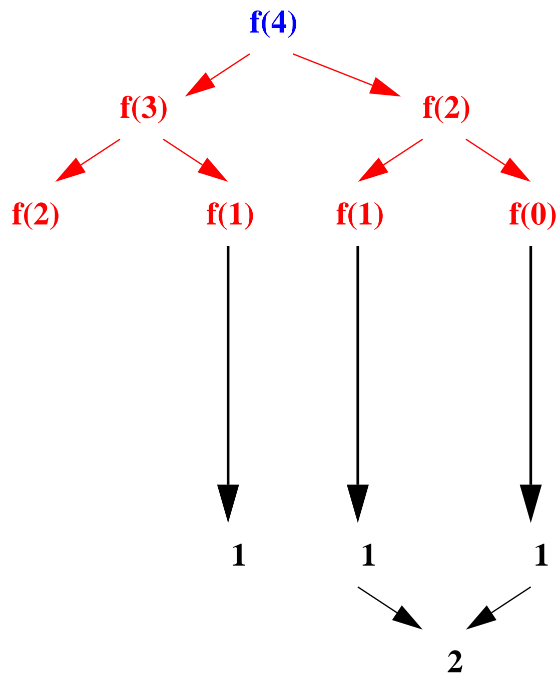


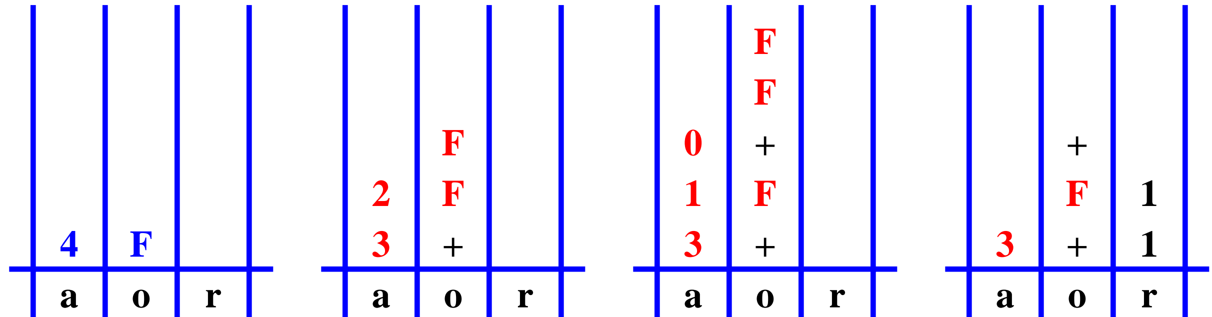


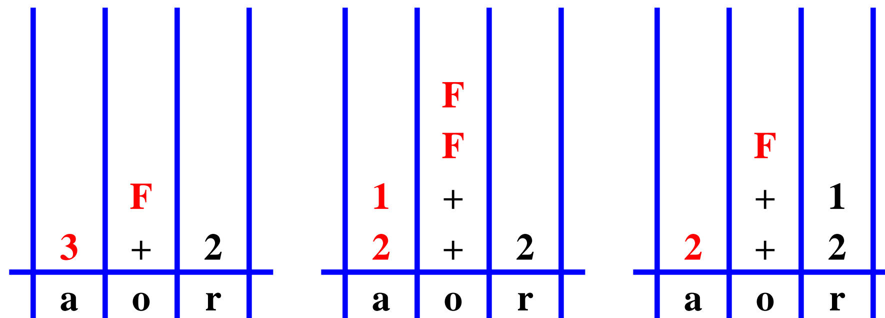
4b. Rekursjon implementeres med en stabel

For Fib kan vi bruke f.eks. 3 stabler ar(argument), op(operator), re(resultat)

```
int Fib(int n) {
if (n==0 || n==1) return 1;
else
      return Fib(n-1) + Fib(n-2);}
```



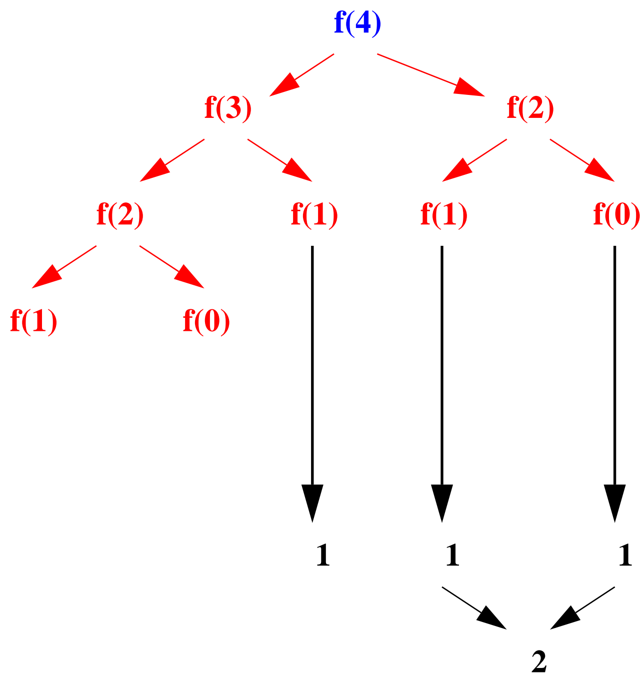


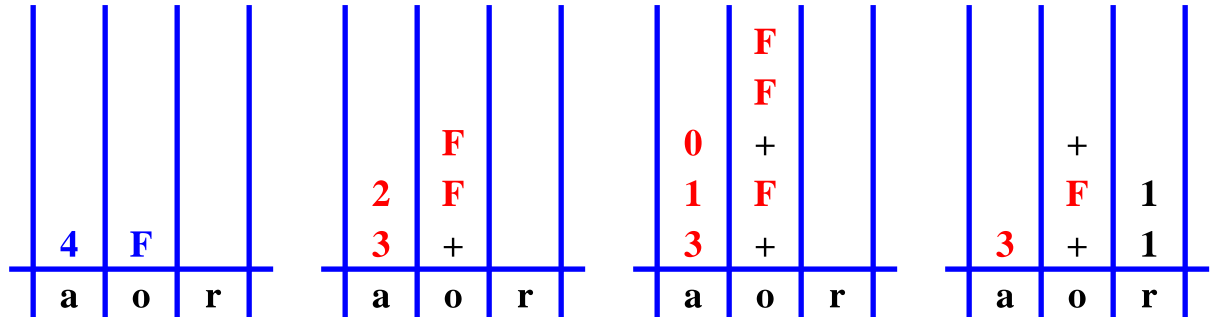


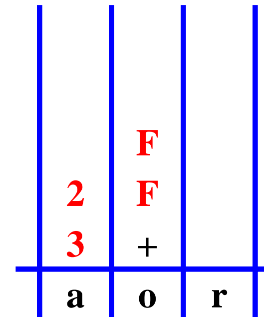
4b. Rekursjon implementeres med en stabel

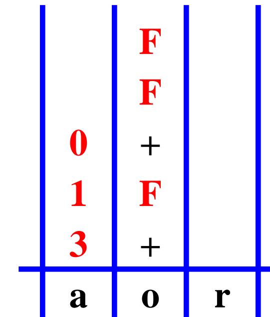
For Fib kan vi bruke f.eks. 3 stabler ar(argument), op(operator), re(resultat)

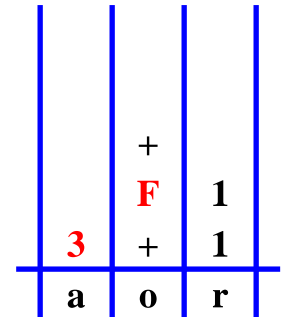
```
int Fib(int n) {
if (n==0 || n==1) return 1;
else
      return Fib(n-1) + Fib(n-2);}
```

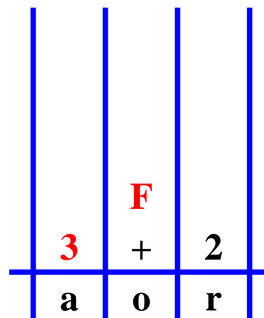


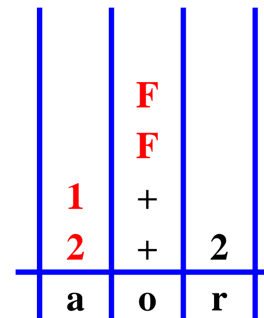


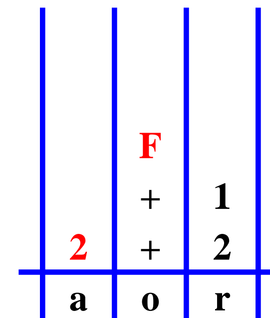


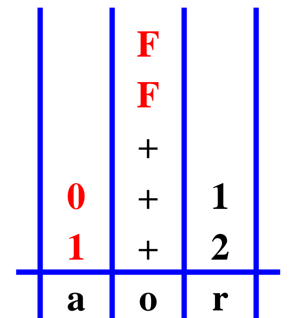








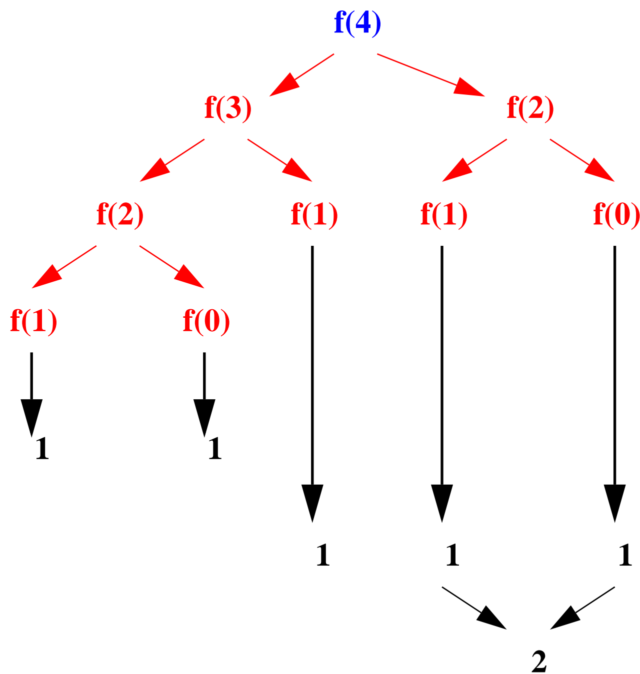


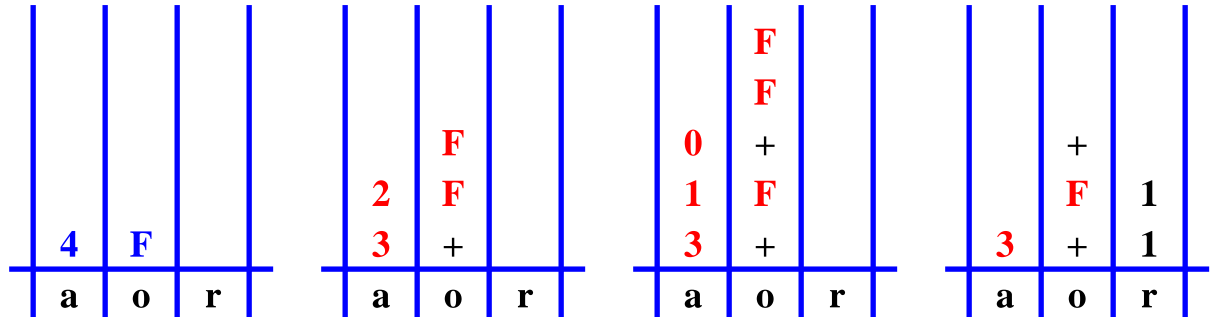


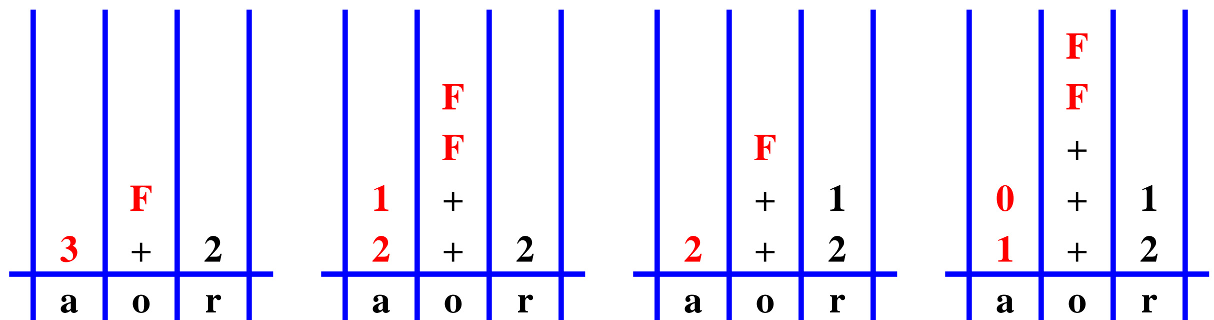
4b. Rekursjon implementeres med en stabel

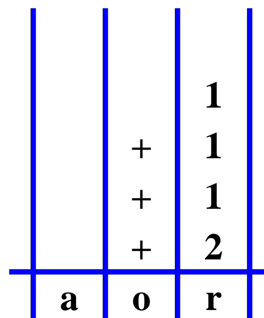
For Fib kan vi bruke f.eks. 3 stabler ar(argument), op(operator), re(resultat)

```
int Fib(int n) {
if (n==0 || n==1) return 1;
else
    return Fib(n-1) + Fib(n-2);}
```





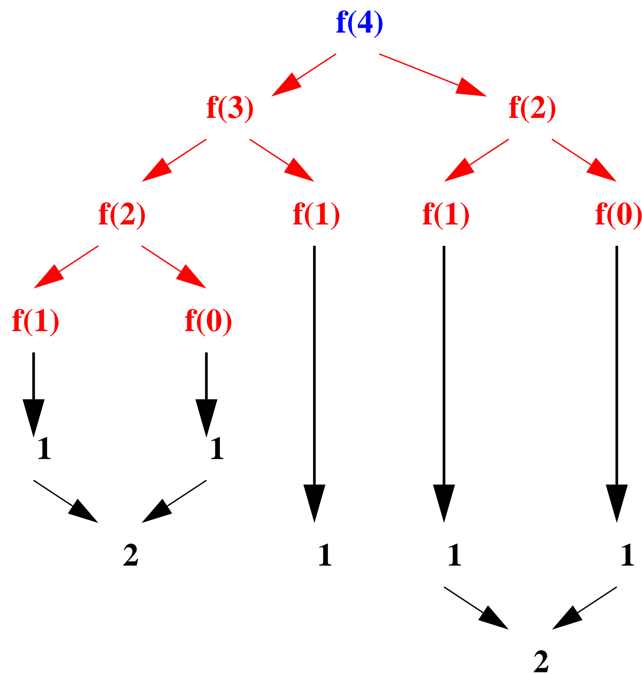




4b. Rekursjon implementeres med en stabel

For Fib kan vi bruke f.eks. 3 stabler ar(argument), op(operator), re(resultat)

```
int Fib(int n) {
if (n==0 || n==1) return 1;
else
    return Fib(n-1) + Fib(n-2);}
```



a	o	r
4	F	

a	o	r
	F	
2	F	
3	+	

a	o	r
	F	
	F	
0	+	
1	F	
3	+	

a	o	r
	+	
	F	1
3	+	1

a	o	r
	F	
3	+	2

a	o	r
	F	
	F	
1	+	
2	+	2

a	o	r
	F	
	+	1
2	+	2

a	o	r
	F	
	F	
	+	
0	+	1
1	+	2

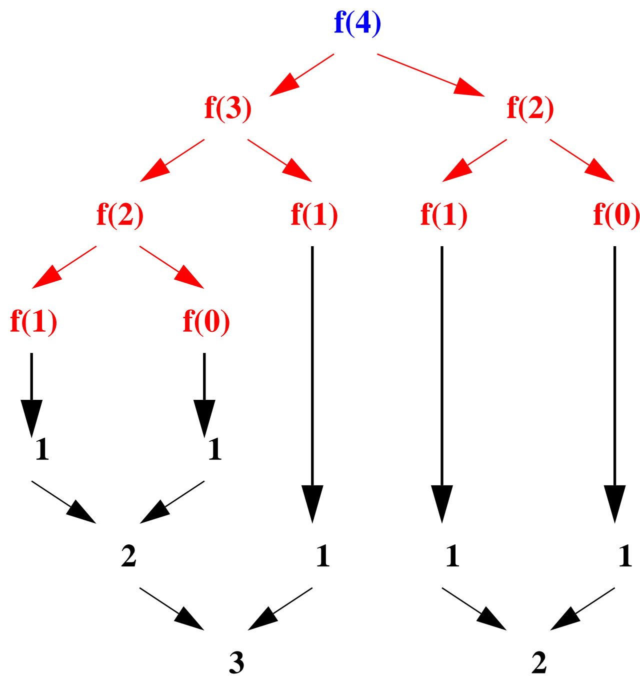
a	o	r
		1
	+	1
	+	1
	+	2

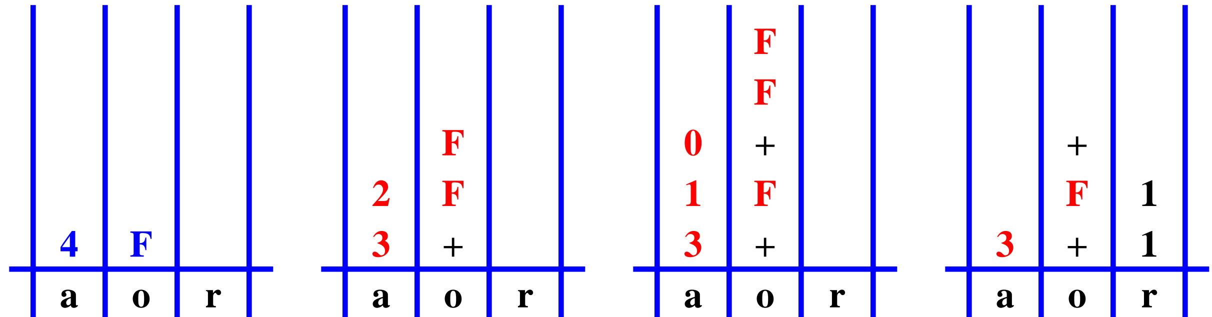
a	o	r
		2
	+	1
	+	2

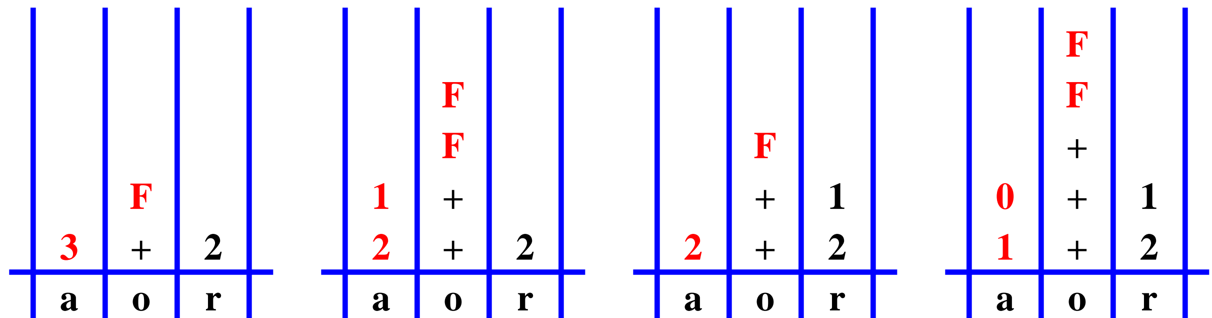
4b. Rekursjon implementeres med en stabel

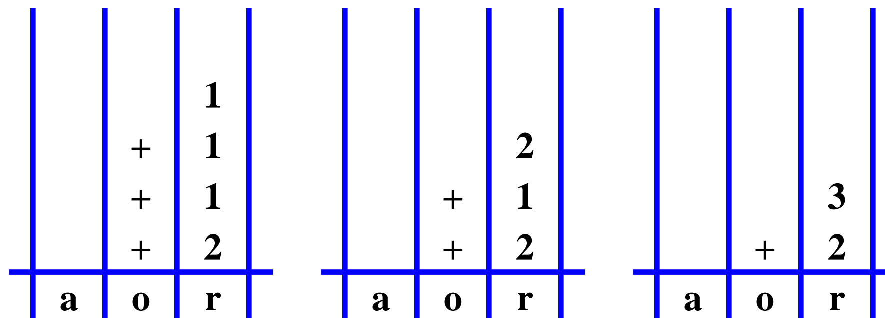
For Fib kan vi bruke f.eks. 3 stabler ar(argument), op(operator), re(resultat)

```
int Fib(int n) {
if (n==0 || n==1) return 1;
else
    return Fib(n-1) + Fib(n-2);}
```









4b. Rekursjon implementeres med en stabel

For Fib kan vi bruke f.eks. 3 stabler ar(argument), op(operator), re(resultat)

```
int Fib(int n) {
if (n==0 || n==1) return 1;
else
      return Fib(n-1) + Fib(n-2);}
```

Rekursjon til iterasjon

(kan alltid omgjøres v.hj.a. Stabel)

```
int Fib(int n) {
  if (n==0 || n==1) return 1;
  else
     return Fib(n-1) + Fib(n-2);
}
```

Noen rekursjoner (f.eks. hale-rekursjon) kan omgjøres til iterasjon på en enklere måte.

```
int fibS(int a) {
  String  o; int n, a1, a2;
  Stack op = new StackImp();
  Stack re = new StackImp();
  Stack ar = new StackImp();

  op.push("F"); ar.push( new Integer(a) );
  while (!op.empty()) {
    o= (String) op.pop();

    if ( o.equals("F") ) {
         n= ( (Integer)ar.pop() ).intValue();
         if (n==0 || n==1) re.push( new Integer(1) );
         else {
             op.push("+"); op.push("F"); op.push("F");
             ar.push( new Integer(n-1) );
             ar.push( new Integer(n-2) ); }

    } else if ( o.equals("+") ) {
         a1= ( (Integer)re.pop() ).intValue();
         a2= ( (Integer)re.pop() ).intValue();
         re.push( new Integer(a1+a2) ); }
  }
  return ( (Integer)re.pop() ).intValue();
}
```

‘Method Stack’

```
main( ) {
    int n=5;
    int z=2;
    . . .
    int a= aa(z);
    . . .
}

int aa(int z) {
    int m=3;
    . . .
    bb(...);
    . . .
    return 8;
}

void bb(...) {
    . . .
}
```

‘Method Stack’

```
    main( ) {
        int n=5;
        int z=2;
        . . .
28      int a= aa(z);
        . . .
    }

    int aa(int z) {
        int m=3;
        . . .
96      bb(...);
        . . .
        return 8;
    }

201 void bb(...) {
        . . .
    }
```

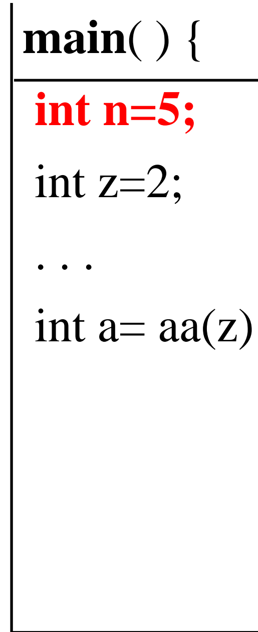
‘Method Stack’

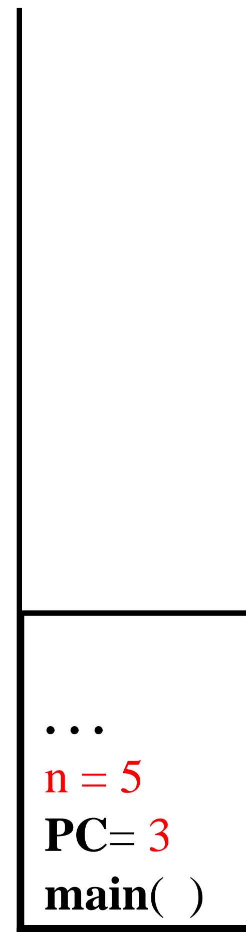
```
     main( ) {
         int n=5;
         int z=2;
         . . .
28       int a= aa(z);
         . . .
     }

     int aa(int z) {
         int m=3;
         . . .
96       bb(...);
         . . .
         return 8;
     }

201  void bb(...) {
         . . .
     }
```

main( ) {
int n=5;
int z=2;
. . .
int a= aa(z)

‘Method Stack’

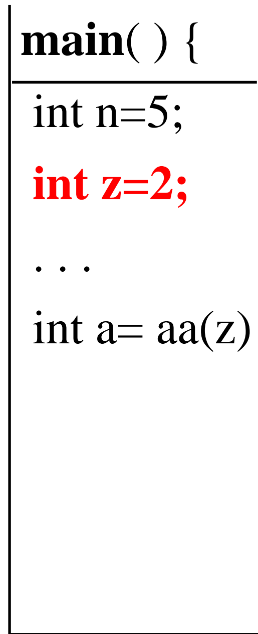
```
      main( ) {
          int n=5;
          int z=2;
          . . .
28        int a= aa(z);
          . . .
      }

      int aa(int z) {
          int m=3;
          . . .
96        bb(...);
          . . .
          return 8;
      }

201   void bb(...) {
          . . .
      }
```

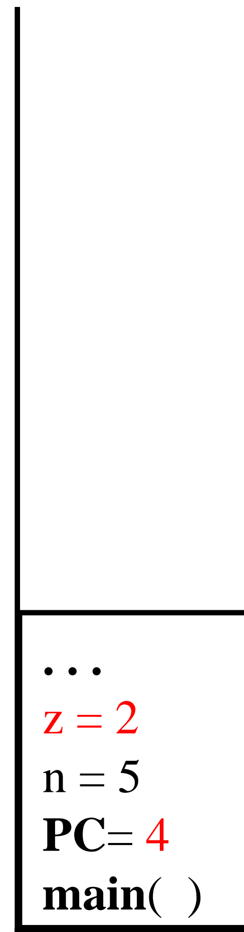




‘Method Stack’

```
      main( ) {
          int n=5;
          int z=2;
          . . .
28        int a= aa(z);
          . . .
      }

      int aa(int z) {
          int m=3;
          . . .
96        bb(...);
          . . .
          return 8;
      }

201   void bb(...) {
          . . .
      }
```

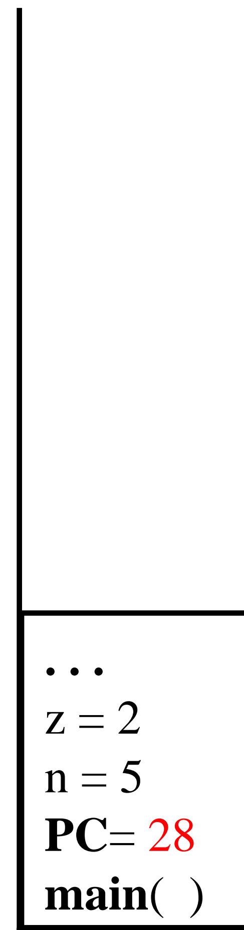




‘Method Stack’

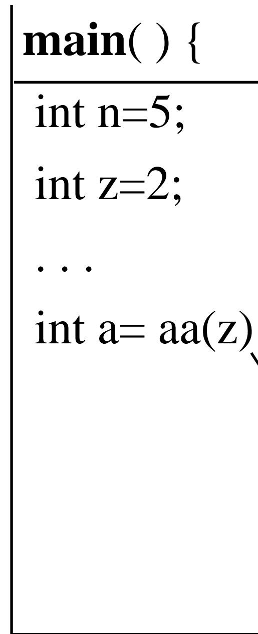
```
        main( ) {
            int n=5;
            int z=2;
            . . .
28          int a= aa(z);
            . . .
        }

        int aa(int z) {
            int m=3;
            . . .
96          bb(...);
            . . .
            return 8;
        }

201     void bb(...) {
            . . .
        }
```

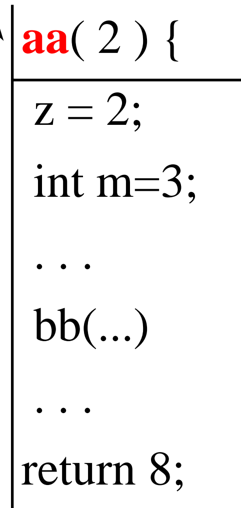
```
main( ) {
-----------
int n=5;
int z=2;
. . .
int a= aa(z)
```

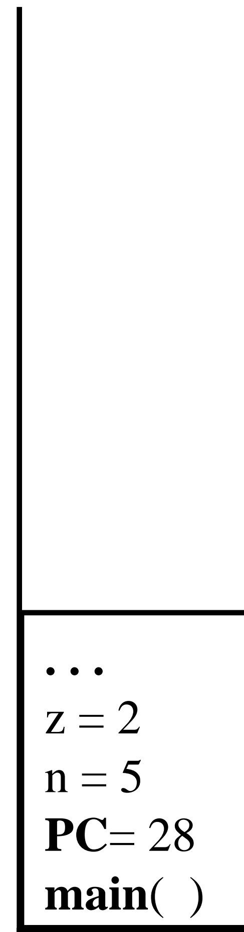


‘Method Stack’

```
     main( ) {
          int n=5;
          int z=2;
          . . .
28        int a= aa(z);
          . . .
     }

85   int aa(int z) {
          int m=3;
          . . .
96        bb(...);
          . . .
          return 8;
     }

201  void bb(...) {
          . . .
     }
```

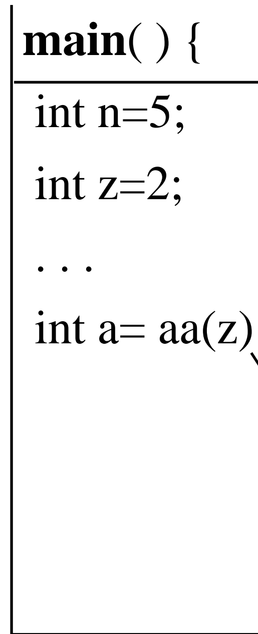


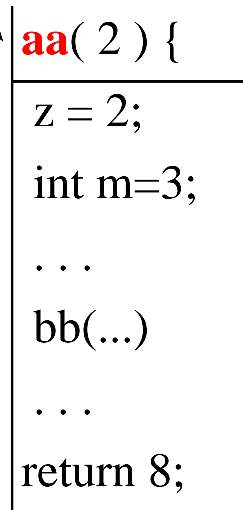


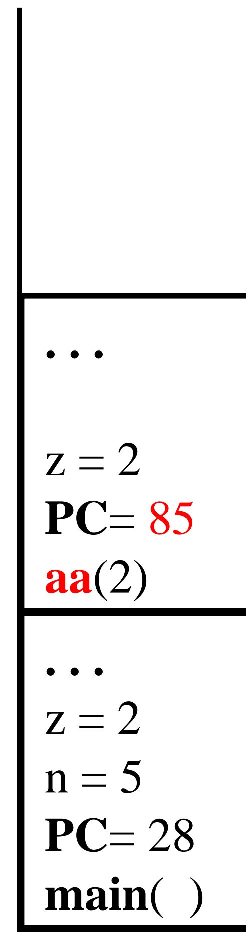


‘Method Stack’

```
     main( ) {
         int n=5;
         int z=2;
         . . .
28       int a= aa(z);
         . . .
     }

85   int aa(int z) {
         int m=3;
         . . .
96       bb(...);
         . . .
         return 8;
     }

201  void bb(...) {
         . . .
     }
```

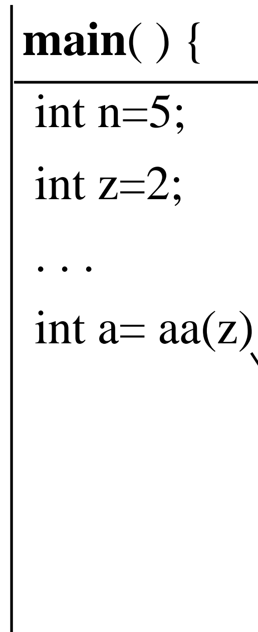


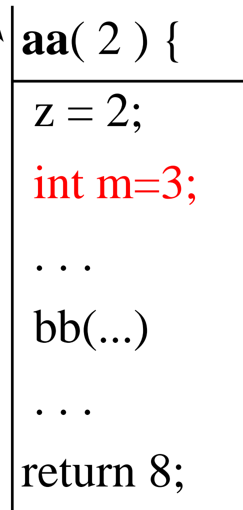


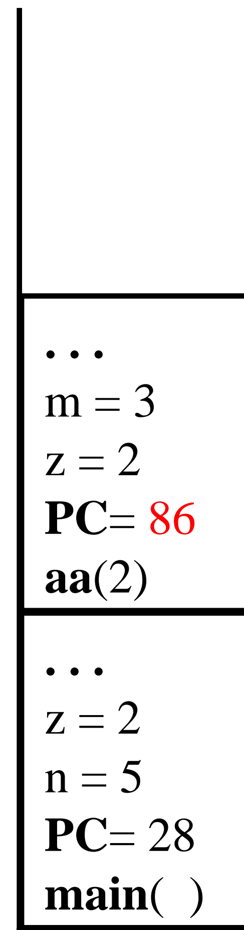


‘Method Stack’

```
     main( ) {
         int n=5;
         int z=2;
         . . .
28       int a= aa(z);
         . . .
     }

85   int aa(int z) {
         int m=3;
         . . .
96       bb(...);
         . . .
         return 8;
     }

201  void bb(...) {
         . . .
     }
```

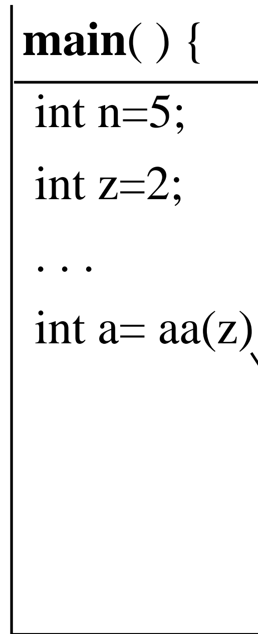


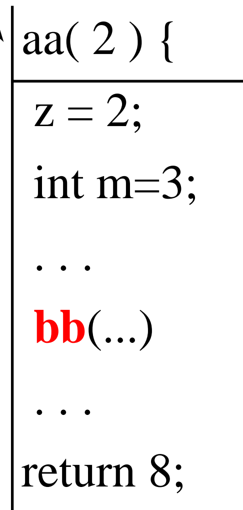


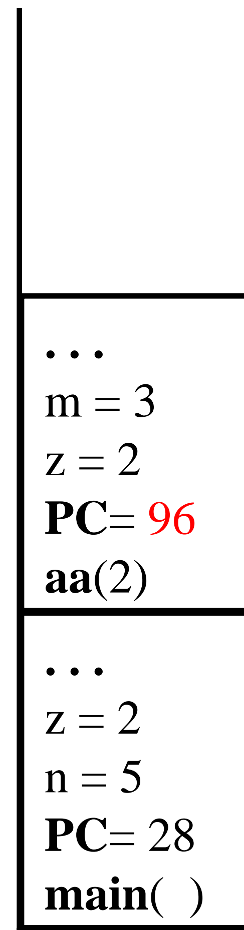


‘Method Stack’

```
       main( ) {
           int n=5;
           int z=2;
           . . .
28         int a= aa(z);
           . . .
       }

85     int aa(int z) {
           int m=3;
           . . .
96         bb(...);
           . . .
           return 8;
       }

201    void bb(...) {
           . . .
       }
```

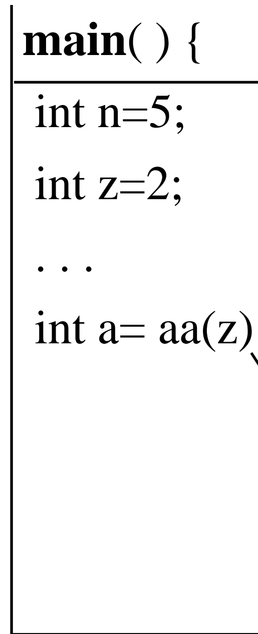


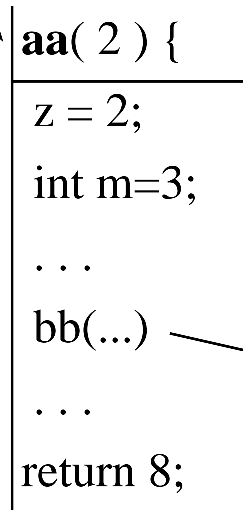


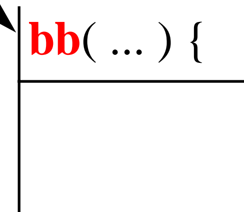


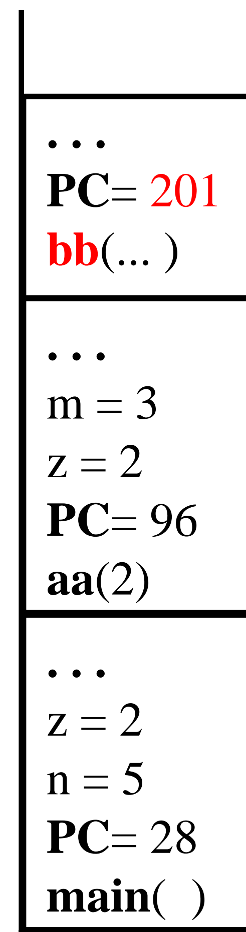
‘Method Stack’

```
     main( ) {
         int n=5;
         int z=2;
         . . .
28       int a= aa(z);
         . . .
     }

     int aa(int z) {
         int m=3;
         . . .
96       bb(...);
         . . .
         return 8;
     }

201  void bb(...) {
         . . .
     }
```



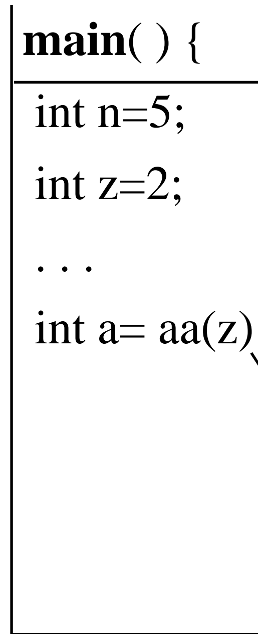


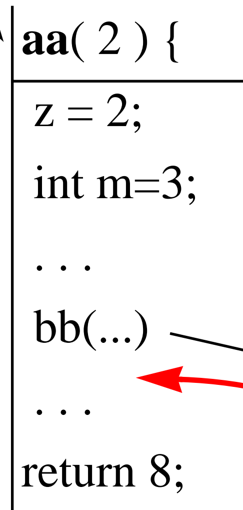


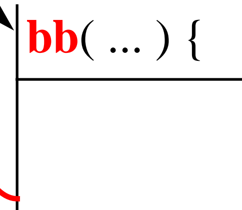


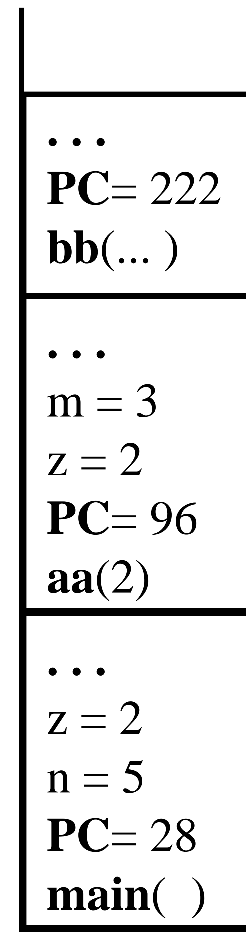
‘Method Stack’

```
     main( ) {
         int n=5;
         int z=2;
         . . .
28       int a= aa(z);
         . . .
     }

     int aa(int z) {
         int m=3;
         . . .
96       bb(...);
         . . .
         return 8;
     }

201  void bb(...) {
         . . .
222  }
```



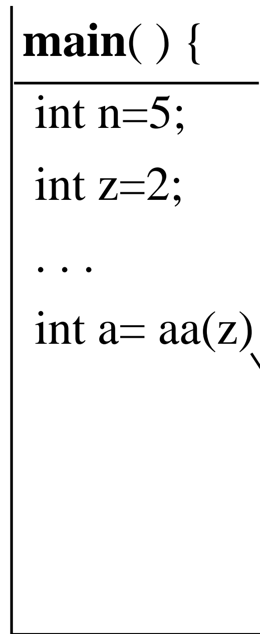


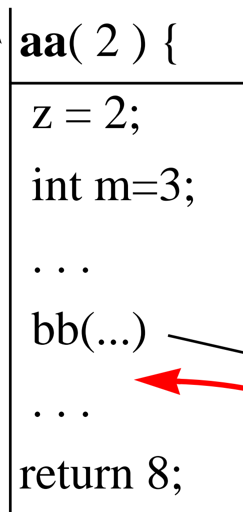




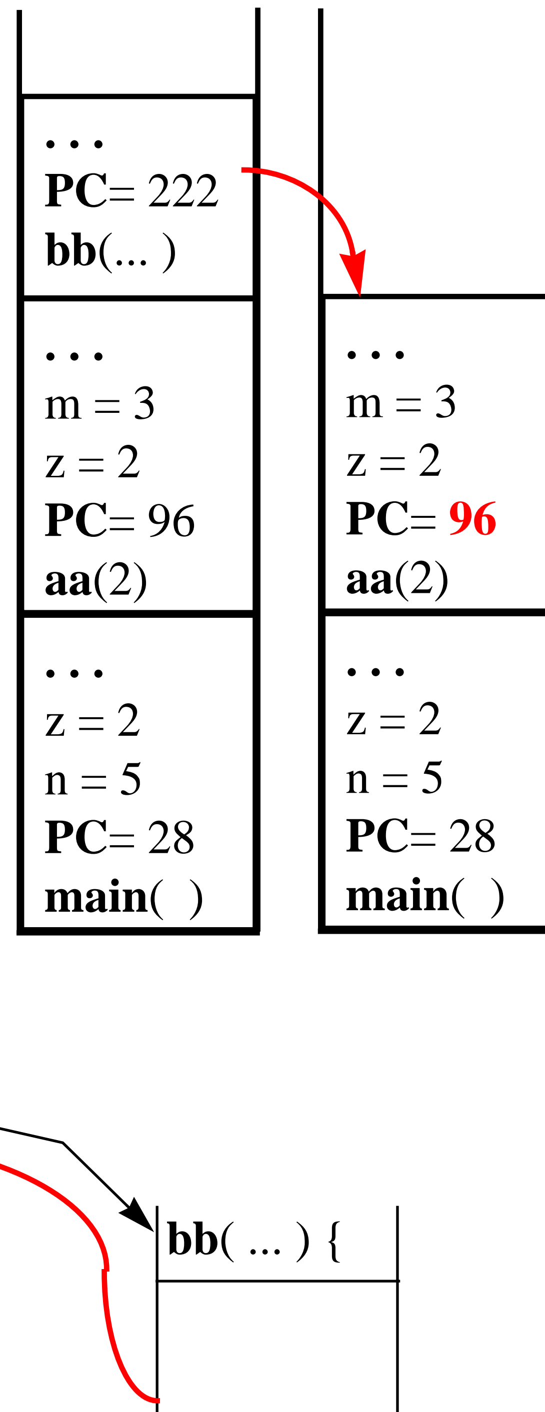
‘Method Stack’

```
     main( ) {
         int n=5;
         int z=2;
         . . .
28       int a= aa(z);
         . . .
     }

     int aa(int z) {
         int m=3;
         . . .
96       bb(...);
         . . .
         return 8;
     }

201  void bb(...) {
         . . .
     }
```



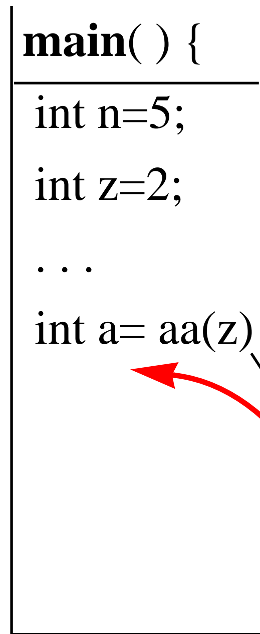


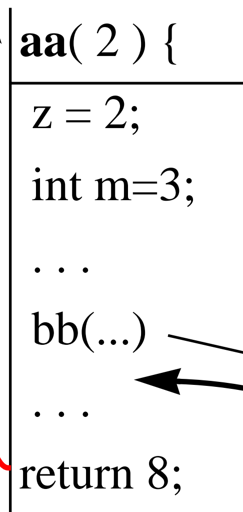
bb(...) {

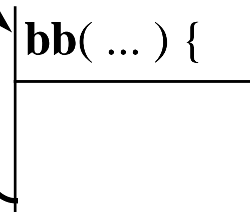


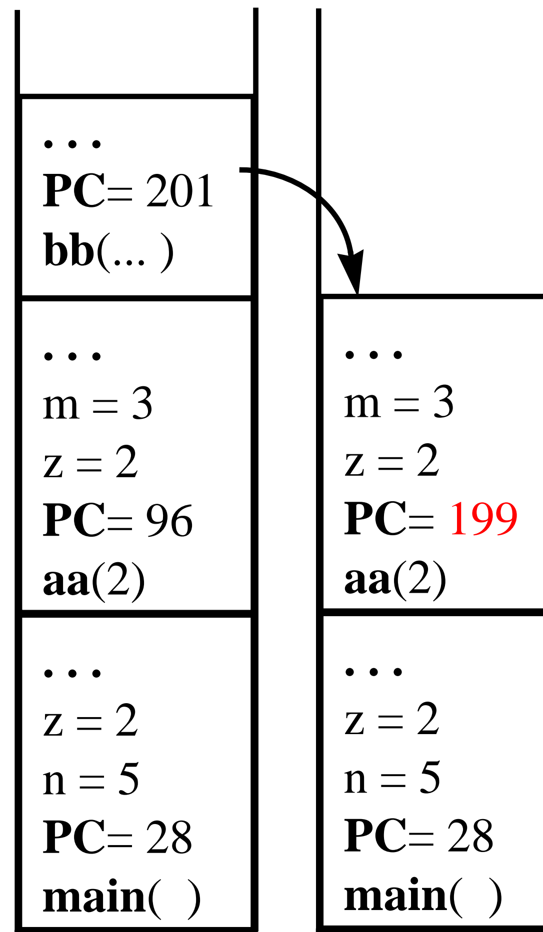
‘Method Stack’

```
      main( ) {
          int n=5;
          int z=2;
          . . .
28        int a= aa(z);
          . . .
      }

      int aa(int z) {
          int m=3;
          . . .
96        bb(...);
          . . .
          return 8;
199   }

201   void bb(...) {
          . . .
      }
```



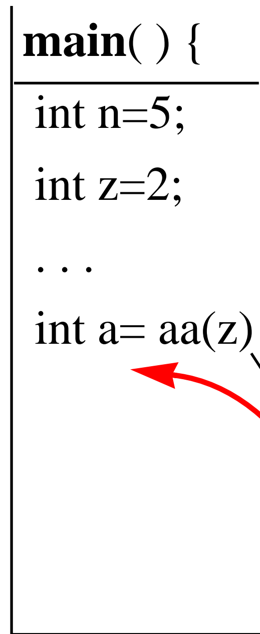


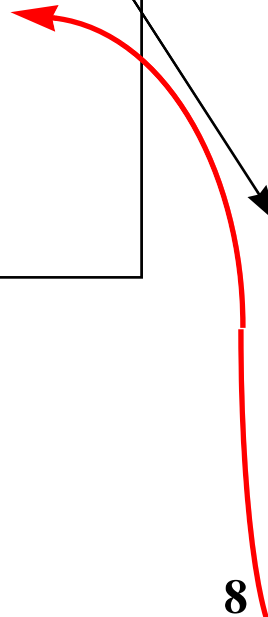


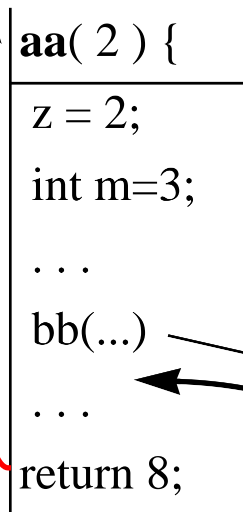


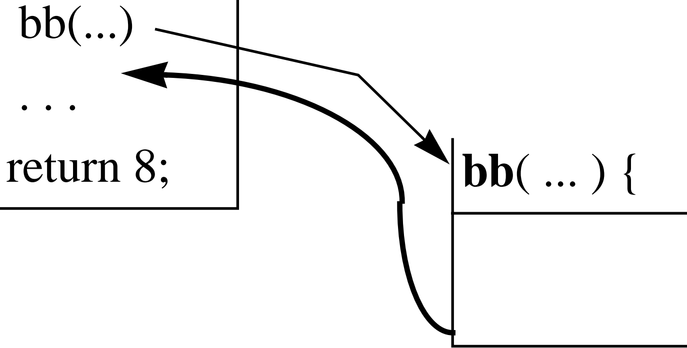
‘Method Stack’

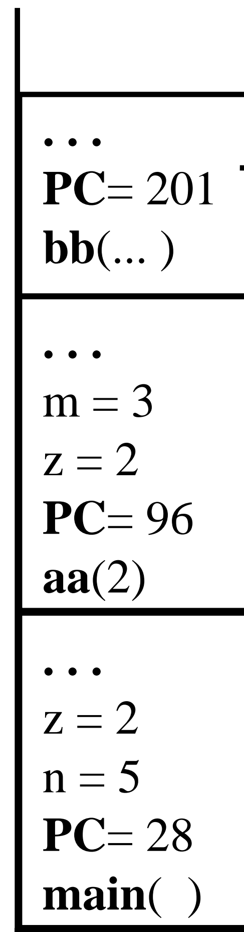
```
        main( ) {
            int n=5;
            int z=2;
            . . .
28          int a= aa(z);
            . . .
        }

        int aa(int z) {
            int m=3;
            . . .
96          bb(...);
            . . .
            return 8;
        }

201     void bb(...) {
            . . .
        }
```

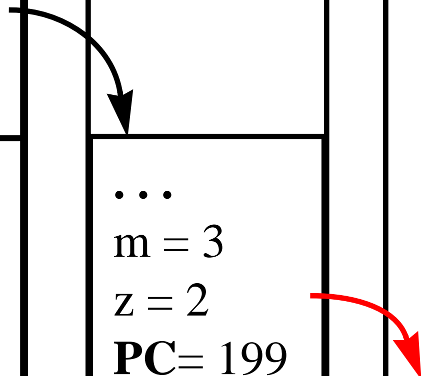


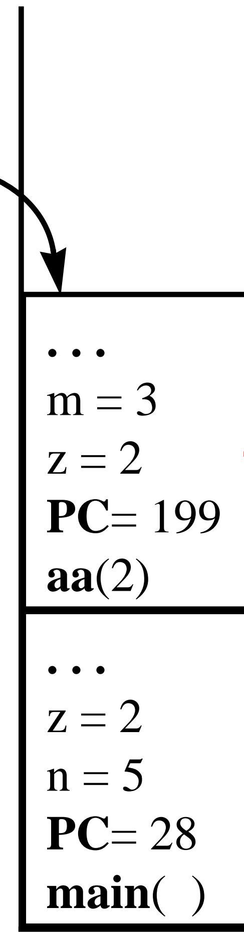


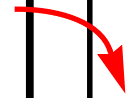


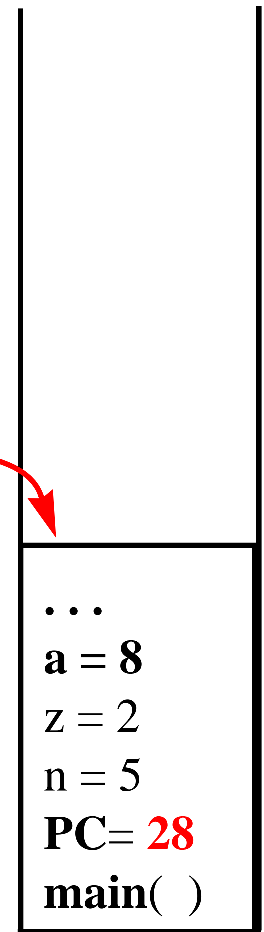






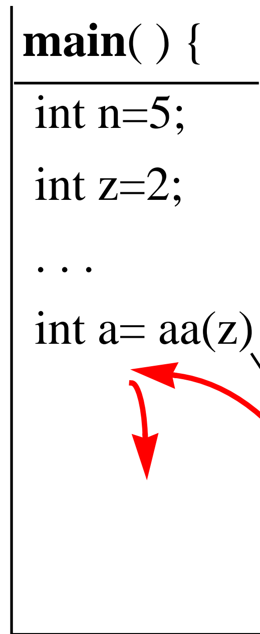


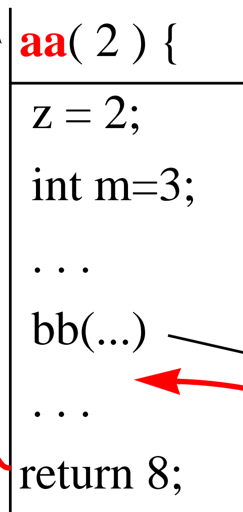


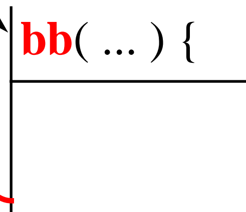


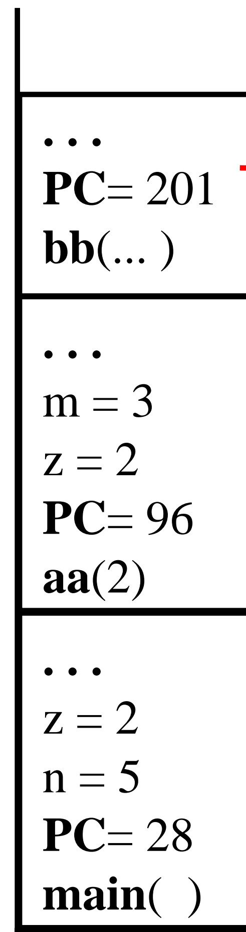
‘Method Stack’

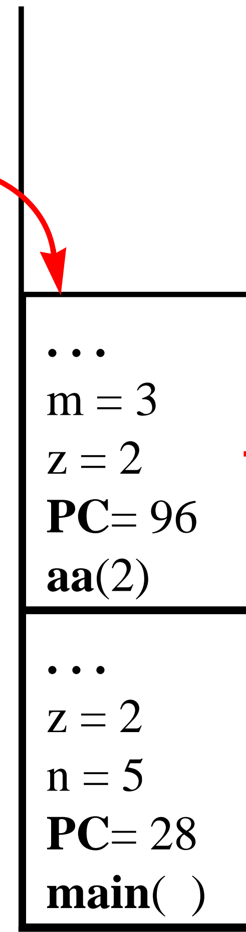
```
     main( ) {
         int n=5;
         int z=2;
         . . .
28       int a= aa(z);
         . . .
     }

     int aa(int z) {
         int m=3;
         . . .
96       bb(...);
         . . .
         return 8;
     }

201  void bb(...) {
         . . .
     }
```

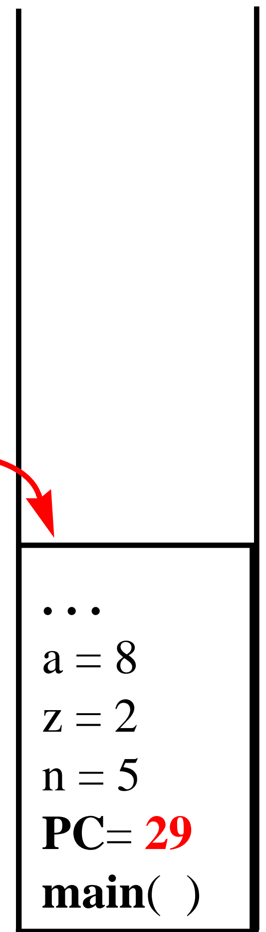












5. Korrekthet

Gitt en instans **n** *av et problem* **P** *:*

1. hva gjør jeg når **n** *er basis tilfelle*

2. hvordan konstruere løsning for **n** *utfra løsninger for noen instanser* **mindre enn n**

P(**n**)
  if Basis(**n**)
    return ???

  else
    return
    Kombiner(**P(m1)** ... **P(mk)**)

5. Korrekthet

Gitt en instans **n** *av et problem* **P** *:*

1. hva gjør jeg når **n** *er basis tilfelle*

2. hvordan konstruere løsning for **n** *utfra løsninger for noen instanser* **mindre enn n**

P(**n**)
  if Basis(**n**)
    return ???

  else
    return
    Kombiner(**P**(**m1**) ... **P**(**mk**))

Terminering:

P(**n**)
  if Basis(**n**)
  – stopper rekursjon

  else
  – garanter at hver **mi < n**,
    er nærmere Basis

5. Korrekthet

Gitt en instans **n** *av et problem* **P** *:*

1. hva gjør jeg når **n** *er basis tilfelle*

2. hvordan konstruere løsning for **n** *utfra løsninger for noen instanser* **mindre enn n**

P(**n**)
  if Basis(**n**)
    return ???

  else
    return
    Kombiner(**P(m1)** ... **P(mk)**)

Terminering:

P(**n**)
  if Basis(**n**)
  – stopper rekursjon

  else
  – garanter at hver **mi < n**, er nærmere Basis

Korrekthet:

P(**n**)
  if Basis(**n**)
  – kontroller korrekt utførelse

5. Korrekthet

Gitt en instans **n** *av et problem* **P** *:*

1. hva gjør jeg når **n** *er basis tilfelle*

2. hvordan konstruere løsning for **n** *utfra løsninger for noen instanser* **mindre enn n**

P(**n**)
  if Basis(**n**)
    return ???

  else
    return
    Kombiner(**P**(**m1**) ... **P**(**mk**))

Terminering:

P(**n**)
  if Basis(**n**)
  – stopper rekursjon

  else
  – garanter at hver **mi < n**, er nærmere Basis

Korrekthet:

P(**n**)
  if Basis(**n**)
  – kontroller korrekt utførelse

  else HER MÅ VI VISE **HVIS -> SÅ**
  – **HVIS** hvert rekursivt kall **P**(**mi**) returnerer riktig resultat

  – **SÅ** gir Kombiner(**P**(**m1**) ... **P**(**mk**)) riktig resultat

5. Korrekthet

Gitt en instans **n** *av et problem* **P** *:*

1. hva gjør jeg når **n** *er basis tilfelle*

2. hvordan konstruere løsning for **n** *utfra løsninger for noen instanser* **mindre enn n**

P(**n**)
  if Basis(**n**)
    return ???

  else
    return
    Kombiner(**P**(**m1**) ... **P**(**mk**))

Terminering:

P(**n**)
  if Basis(**n**)
  – stopper rekursjon

  else
  – garanter at hver **mi < n**, er nærmere Basis

Korrekthet:

P(**n**)
  if Basis(**n**)
  – kontroller korrekt utførelse

  else HER MÅ VI VISE **HVIS -> SÅ**
  – **HVIS** hvert rekursivt kall **P**(**mi**) returnerer riktig resultat

  !!! DET OVENSTÅENDE ANTAR VI !!!

  – **SÅ** gir Kombiner(**P**(**m1**) ... **P**(**mk**)) riktig resultat

5. Korrekthet

Gitt en instans **n** *av et problem* **P** *:*

1. hva gjør jeg når **n** *er basis tilfelle*

2. hvordan konstruere løsning for **n** *utfra løsninger for noen instanser* **mindre enn n**

P(**n**)
  if Basis(**n**)
    return ???

  else
    return
    Kombiner(**P(m1)** ... **P(mk)**)

Terminering:

P(**n**)
  if Basis(**n**)
  – stopper rekursjon

  else
  – garanter at hver **mi < n**, er nærmere Basis

Korrekthet:

P(**n**)
  if Basis(**n**)
  – kontroller korrekt utførelse

  else HER MÅ VI VISE **HVIS -> SÅ**
  – **HVIS** hvert rekursivt kall **P(mi)** returnerer riktig resultat

  !!! DET OVENSTÅENDE ANTAR VI !!!

  – **SÅ** gir Kombiner(**P(m1)** ... **P(mk)**) riktig resultat

kombinasjon opprettholder
rekursjons-invariant

5. Korrekthet

Gitt en instans **n** *av et problem* **P** *:*

1. hva gjør jeg når **n** *er basis tilfelle*

2. hvordan konstruere løsning for **n** *utfra løsninger for noen instanser* **mindre enn n**

```
/** @param n >= 0 */

int sum(n)
  if n == 0
    return 0

  else
    return
     n + sum(n–1)
```

5. Korrekthet

Gitt en instans **n** *av et problem* **P** *:*

1. hva gjør jeg når **n** *er basis tilfelle*

2. hvordan konstruere løsning for **n** *utfra løsninger for noen instanser* **mindre enn n**

```
/** @param n >= 0 */

int sum(n)
  if n == 0
    return 0

  else
    return
     n + sum(n–1)
```

Terminering:

sum(n)
  if **n ==1**
  – stopper rekursjon

  else
  – hver **n–1 < n**,
    er nærmere Basis

5. Korrekthet

Gitt en instans **n** *av et problem* **P** *:*

1. hva gjør jeg når **n** *er basis tilfelle*

2. hvordan konstruere løsning for **n** *utfra løsninger for noen instanser* **mindre enn n**

```
/** @param n >= 0 */

int sum(n)
  if n == 0
    return 0

  else
    return
     n + sum(n–1)
```

Terminering:

sum(n)
if **n ==1**
– stopper rekursjon

else
– hver **n–1 < n**,
er nærmere Basis

Korrekthet:

sum(n)
if **n == 0**

– resultat er 0 : $\sum_{i=0}^{0} i = 0$

5. Korrekthet

Gitt en instans **n** *av et problem* **P** *:*

1. hva gjør jeg når **n** *er basis tilfelle*

2. hvordan konstruere løsning for **n** *utfra løsninger for noen instanser* **mindre enn n**

```
/** @param n >= 0 */

int sum(n)
  if n == 0
    return 0

  else
    return
      n + sum(n–1)
```

Terminering:

sum(**n**)
  if **n** ==**1**
  – stopper rekursjon

  else
  – hver **n–1 < n**,
    er nærmere Basis

Korrekthet:

sum(**n**)
  if **n** == 0

  – resultat er 0 : $\sum_{i=0}^{0} i = 0$

  else HER MÅ VI VISE **HVIS -> SÅ**
  – **HVIS** rekursivt kall **sum(n–1)** returnerer riktig resultat

  – **SÅ** gir n + **sum(n–1)**

    riktig resultat :

5. Korrekthet

Gitt en instans **n** *av et problem* **P** *:*

1. hva gjør jeg når **n** *er basis tilfelle*

2. hvordan konstruere løsning for **n** *utfra løsninger for noen instanser* **mindre enn n**

```
/** @param n >= 0 */

int sum(n)
  if n == 0
    return 0

  else
    return
     n + sum(n–1)
```

Terminering:

sum(n)
- if **n ==1**
  - stopper rekursjon
- else
  - hver **n–1 < n**, er nærmere Basis

Korrekthet:

sum(n)
- if **n == 0**
  - resultat er 0 : $\sum_{i=0}^{0} i = 0$
- else HER MÅ VI VISE **HVIS -> SÅ**
  - **HVIS** rekursivt kall **sum(n–1)** returnerer riktig resultat

    !!! DET OVENSTÅENDE ANTAR VI !!!

  - **SÅ** gir n + **sum(n–1)** = riktig resultat : $\sum_{i=0}^{n-1} i$

5. Korrekthet

Gitt en instans **n** *av et problem* **P** *:*

1. hva gjør jeg når **n** *er basis tilfelle*

2. hvordan konstruere løsning for **n** *utfra løsninger for noen instanser* **mindre enn n**

```
/** @param n >= 0 */

int sum(n)
  if n == 0
    return 0

  else
    return
     n + sum(n–1)
```

Terminering:

sum(n)
if **n ==1**
- stopper rekursjon

else
- hver **n–1 < n**, er nærmere Basis

Korrekthet:

sum(n)
if **n == 0**
- resultat er 0 : $\sum_{i=0}^{0} i = 0$

else HER MÅ VI VISE **HVIS -> SÅ**
- **HVIS** rekursivt kall **sum(n–1)** returnerer riktig resultat

!!! DET OVENSTÅENDE ANTAR VI !!!

- **SÅ** gir n + **sum(n–1)**

riktig resultat : $\sum_{i=0}^{n} i = n + \sum_{i=0}^{n-1} i$

kombinasjon opprettholder

sum(n) = $\sum_{i=0}^{n} i$

Korrekthet: rekursjons-invariant

```
/* int[] MS(int[] A) { int n= A.length;
 *    if (n == 1) { return A; }
 *    else {
 *        del A i midten i :
 *        t1= A[0...n/2]  og  t2 = A[n/2+1...n];
 *        sorter rekursivt (mindre) delene
 *            r1= MS(t1) og
 *            r2= MS(t2)
 *        return flettet resultat av
 *            rekursive kall FL(r1,r2) }
 */
```

Korrekthet: rekursjons-invariant

```
/* int[] MS(int[] A) { int n= A.length;
 *    if (n == 1) { return A; }
 *    else {
 *        del A i midten i :
 *        t1= A[0...n/2]  og  t2 = A[n/2+1...n];
 *        sorter rekursivt (mindre) delene
 *            r1= MS(t1) og
 *            r2= MS(t2)
 *        return flettet resultat av
 *            rekursive kall FL(r1,r2) }
 */
```

Invariant:

MS(A) *returnerer sortert argument* A:

Korrekthet: rekursjons-invariant

```
/* int[] MS(int[] A) { int n= A.length;
 *    if (n == 1) { return A; }
 *    else {
 *        del A i midten i :
 *        t1= A[0...n/2]  og  t2 = A[n/2+1...n];
 *        sorter rekursivt (mindre) delene
 *            r1= MS(t1) og
 *            r2= MS(t2)
 *        return flettet resultat av
 *            rekursive kall FL(r1,r2) }
 */
```

Invariant:

MS(A) *returnerer sortert argument* A:

if **lgh==1** – ***da er A sortert***

Korrekthet: rekursjons-invariant

```
/* int[] MS(int[] A) { int n= A.length;
 *    if (n == 1) { return A; }
 *    else {
 *        del A i midten i :
 *        t1= A[0...n/2]  og  t2 = A[n/2+1...n];
 *        sorter rekursivt (mindre) delene
 *            r1= MS(t1) og
 *            r2= MS(t2)
 *        return flettet resultat av
 *            rekursive kall FL(r1,r2) }
 */
```

Invariant:

MS(A) *returnerer sortert argument* A:

<u>if **lgh==1** – ***da er A sortert***</u>

else – deler A i to disjunkte deler

t1= **A[0...n/2]** og t2= **A[n/2+1...n]**

r1= MS(**t1**) ***returnerer sortert* t1**

r2= MS(**t2**) ***returnerer sortert* t2**

hvis FL *fletter korrekt to sorterte array,*

så returnerer hele else-grenen sortert A

Korrekthet: rekursjons-invariant

```
/* int[] MS(int[] A) { int n= A.length;
 *    if (n == 1) { return A; }
 *    else {
 *        del A i midten i :
 *        t1= A[0...n/2]  og  t2 = A[n/2+1...n];
 *        sorter rekursivt (mindre) delene
 *            r1= MS(t1) og
 *            r2= MS(t2)
 *        return flettet resultat av
 *            rekursive kall FL(r1,r2) }
 */
```

Invariant:

MS(A) *returnerer sortert argument* A:

if **lgh==1** – ***da er A sortert***

else – deler A i to disjunkte deler

t1= **A[0...n/2]** og t2= **A[n/2+1...n]**

r1= MS(**t1**) ***returnerer sortert* t1**

r2= MS(**t2**) ***returnerer sortert* t2**

!

hvis FL *fletter korrekt to sorterte array,*

så returnerer hele else-grenen sortert A

Korrekthet: rekursjons-invariant

```
/* int[] MS(int[] A) { int n= A.length;
 *    if (n == 1) { return A; }
 *    else {
 *        del A i midten i :
 *        t1= A[0...n/2]  og  t2 = A[n/2+1...n];
 *        sorter rekursivt (mindre) delene
 *            r1= MS(t1) og
 *            r2= MS(t2)
 *        return flettet resultat av
 *            rekursive kall FL(r1,r2) }
 */
```

Invariant:

MS(A) *returnerer sortert argument* A:

<u>if **lgh==1** – ***da er A sortert***</u>

else – deler A i to disjunkte deler

t1= **A[0...n/2]** og t2= **A[n/2+1...n]**

r1= MS(**t1**) ***returnerer sortert t1***

r2= MS(**t2**) ***returnerer sortert t2***

hvis FL *fletter korrekt to sorterte array,*

så returnerer hele else-grenen sortert A

```
/* int BS(int[] A, int x, int l, int h) {
 *    int m= (l+h) / 2 ;
 *    if (l > h) return –1;
 *    else if (A[m] == x) return m;
 *    else if (A[m] < x) return BS(A, x, m+1, h);
 *    else return BS(A, x, l, m–1); }
 */
```

Korrekthet: rekursjons-invariant

```
/* int[] MS(int[] A) { int n= A.length;
 *    if (n == 1) { return A; }
 *    else {
 *        del A i midten i :
 *        t1= A[0...n/2]  og  t2 = A[n/2+1...n];
 *        sorter rekursivt (mindre) delene
 *            r1= MS(t1) og
 *            r2= MS(t2)
 *        return flettet resultat av
 *            rekursive kall FL(r1,r2) }
 */
```

Invariant:

MS(A) *returnerer sortert argument* A:

<u>if **lgh==1** – ***da er A sortert***</u>

else – deler A i to disjunkte deler

t1= **A[0...n/2]** og t2= **A[n/2+1...n]**

r1= MS(**t1**) ***returnerer sortert*** **t1**

r2= MS(**t2**) ***returnerer sortert*** **t2**

hvis FL *fletter korrekt to sorterte array,*

så returnerer hele else-grenen sortert A

```
/* int BS(int[] A, int x, int l, int h) {
 *    int m= (l+h) / 2 ;
 *    if (l > h) return –1;
 *    else if (A[m] == x) return m;
 *    else if (A[m] < x) return BS(A, x, m+1, h);
 *    else return BS(A, x, l, m–1); }
 */
```

Invariant:

argumentet A *er sortert* &

er x *i* A, *så er den mellom* [l ... h]

(*initielt kall med* (A, x, 0, A.length-1)

Korrekthet: rekursjons-invariant

```
/* int[] MS(int[] A) { int n= A.length;
 *    if (n == 1) { return A; }
 *    else {
 *        del A i midten i :
 *        t1= A[0...n/2]  og  t2 = A[n/2+1...n];
 *        sorter rekursivt (mindre) delene
 *            r1= MS(t1) og
 *            r2= MS(t2)
 *        return flettet resultat av
 *            rekursive kall FL(r1,r2) }
 */
```

Invariant:

MS(A) *returnerer sortert argument* A:

if **lgh==1** – ***da er A sortert***

else – deler A i to disjunkte deler

t1= **A[0...n/2]** og t2= **A[n/2+1...n]**

r1= MS(**t1**) ***returnerer sortert t1***

r2= MS(**t2**) ***returnerer sortert t2***

hvis FL *fletter korrekt to sorterte array,*

så returnerer hele else-grenen sortert A

```
/* int BS(int[] A, int x, int l, int h) {
 *    int m= (l+h) / 2 ;
 *    if (l > h) return –1;
 *    else if (A[m] == x) return m;
 *    else if (A[m] < x) return BS(A, x, m+1, h);
 *    else return BS(A, x, l, m–1); }
 */
```

Invariant:

argumentet A *er sortert* &

er x *i* A, *så er den mellom* [l ... h]

(*initielt kall med* (A, x, 0, A.length-1)

if **l > h** – **x** ***kan ikke være der (–1 er riktig)***

else if **A[m] = x** – ***da har vi funnet den (m er riktig)***

Korrekthet: rekursjons-invariant

```
/* int[] MS(int[] A) { int n= A.length;
 *    if (n == 1) { return A; }
 *    else {
 *        del A i midten i :
 *        t1= A[0...n/2]  og  t2 = A[n/2+1...n];
 *        sorter rekursivt (mindre) delene
 *            r1= MS(t1) og
 *            r2= MS(t2)
 *        return flettet resultat av
 *            rekursive kall FL(r1,r2) }
 */
```

Invariant:

MS(A) *returnerer sortert argument* A:

if **lgh==1** – *da er A sortert*

else – deler A i to disjunkte deler

t1= **A[0...n/2]** og t2= **A[n/2+1...n]**

r1= MS(**t1**) ***returnerer sortert* t1**

r2= MS(**t2**) ***returnerer sortert* t2**

hvis FL *fletter korrekt to sorterte array,*

så returnerer hele else-grenen sortert A

```
/* int BS(int[] A, int x, int l, int h) {
 *   int m= (l+h) / 2 ;
 *   if (l > h) return –1;
 *   else if (A[m] == x) return m;
 *   else if (A[m] < x) return BS(A, x, m+1, h);
 *   else return BS(A, x, l, m–1); }
 */
```

Invariant:

argumentet A *er sortert* &

er x *i* A, *så er den mellom* [l ... h]

(*initielt kall med* (A, x, 0, A.length-1)

if **l > h** – **x** ***kan ikke være der (–1 er riktig)***

else if **A[m] = x** – ***da har vi funnet den (m er riktig)***

else if **A[m] < x** –

er x *i* A, *så må den være mellom* **[m+1... h]**

else **A[m] > x** –

er x *i* A, *så må den være mellom* **[l ... m–1]**

Korrekthet: rekursjons-invariant

```
/* int[] MS(int[] A) { int n= A.length;
 *    if (n == 1) { return A; }
 *    else {
 *       del A i midten i :
 *       t1= A[0...n/2]  og  t2 = A[n/2+1...n];
 *       sorter rekursivt (mindre) delene
 *          r1= MS(t1) og
 *          r2= MS(t2)
 *       return flettet resultat av
 *          rekursive kall FL(r1,r2) }
 */
```

Invariant:

MS(A) *returnerer sortert argument* A:

if **lgh==1** – ***da er A sortert***

else – deler A i to disjunkte deler

t1= **A[0...n/2]** og t2= **A[n/2+1...n]**

r1= MS(**t1**) ***returnerer sortert t1***

r2= MS(**t2**) ***returnerer sortert t2***

hvis FL *fletter korrekt to sorterte array,*

så returnerer hele else-grenen sortert A

```
/* int BS(int[] A, int x, int l, int h) {
 *    int m= (l+h) / 2 ;
 *    if (l > h) return –1;
 *    else if (A[m] == x) return m;
 *    else if (A[m] < x) return BS(A, x, m+1, h);
 *    else return BS(A, x, l, m–1); }
 */
```

Invariant:

argumentet A *er sortert &*

er x *i* A, *så er den mellom* [l ... h]

(*initielt kall med* (A, x, 0, A.length-1)

if **l > h** – **x** ***kan ikke være der (–1 er riktig)***

else if **A[m] = x** – ***da har vi funnet den (m er riktig)***

else if **A[m] < x** –

er x *i* A, *så må den være mellom* **[m+1... h]**

BS(A, x, **m+1**, **h**) ***vil returnere riktig resultat*** !

else **A[m] > x** –

er x *i* A, *så må den være mellom* **[l ... m–1]**

BS(A, x, **l**, **m–1**) ***vil returnere riktig resultat*** !

Løkke-invariant

```
int sum(int n) {
    if (n == 0) return 0;
    else return n + sum(n–1);
```

basis – gir riktig sum(0) =0

hvis sum(n–1) gir riktig = $\sum_{i=0}^{n-1} i$ så er sum(n) = n + sum(n–1) = $\sum_{i=0}^{n} i$

Løkke-invariant

```
int sum(int n) {
    if (n == 0) return 0;
    else return n + sum(n–1);
```

basis – gir riktig sum(0) =0

hvis sum(n–1) gir riktig = $\sum_{i=0}^{n-1} i$ så er sum(n) = n + sum(n–1) = $\sum_{i=0}^{n} i$

1. **Løkke-invariant, LI:** $r = \sum_{k=0}^{i} k$

Løkke-invariant

```
int sum(int n) {
      if (n == 0) return 0;
      else return n + sum(n–1);
```

basis – gir riktig sum(0) =0

hvis sum(n–1) gir riktig = $\sum_{i=0}^{n-1} i$ så er sum(n) = n + sum(n–1) = $\sum_{i=0}^{n} i$

1.

Løkke-invariant, LI: $r = \sum_{k=0}^{i} k$

```
int sumw(int n) {

      int i=0, r=0;

      while (i != n)  {

          r= r+i;
          i++;

      }


      return r;
}
```

Løkke-invariant

```
int sum(int n) {
    if (n == 0) return 0;
    else return n + sum(n–1);
```

basis – gir riktig sum(0) =0

hvis sum(n–1) gir riktig = $\sum_{i=0}^{n-1} i$ så er sum(n) = n + sum(n–1) = $\sum_{i=0}^{n} i$

```
int sumw(int n) {

    int i=0, r=0;

    while (i != n)  {

        r= r+i;
        i++;

    }


    return r;
}
```

1. **Løkke-invariant, LI:** r = $\sum_{k=0}^{i} k$

2. **Initialisering:** i=0 & r=0 = $\sum_{k=0}^{i=0} k$ **=> LI**

Løkke-invariant

```
int sum(int n) {
    if (n == 0) return 0;
    else return n + sum(n–1);
```

basis – gir riktig sum(0) =0

hvis sum(n–1) gir riktig = $\sum_{i=0}^{n-1} i$ så er sum(n) = n + sum(n–1) = $\sum_{i=0}^{n} i$

```
int sumw(int n) {
    int i=0, r=0;
    while (i != n)  {
        r= r+i;
        i++;
    }
    return r;
}
```

1. **Løkke-invariant, LI:** r = $\sum_{k=0}^{i} k$

2. **Initialisering:** i=0 & r=0 = $\sum_{k=0}^{i=0} k$ **=> LI**

Utgang: **LI:** r= $\sum_{k=0}^{i} k$ **& i =n =>** r = $\sum_{k=0}^{n} k$

Løkke-invariant

```
int sum(int n) {
    if (n == 0) return 0;
    else return n + sum(n–1);
```

basis – gir riktig sum(0) =0

hvis sum(n–1) gir riktig = $\sum_{i=0}^{n-1} i$ så er sum(n) = n + sum(n–1) = $\sum_{i=0}^{n} i$

```
int sumw(int n) {
    int i=0, r=0;
    while (i != n) {
        r= r+i;
        i++;
    }
    return r;
}
```

1. Løkke-invariant, LI: r = $\sum_{k=0}^{i} k$

2. Initialisering: i=0 & r=0 = $\sum_{k=0}^{i=0} k$ **=> LI**

3a. hvis LI: r = $\sum_{k=0}^{i} k$ **holder før kroppen**

3b. så holder LI': r' = $\sum_{k=0}^{i'} k$ **etter kroppen**

4. Utgang: LI: r= $\sum_{k=0}^{i} k$ **& i =n =>** r = $\sum_{k=0}^{n} k$

Løkke-invariant

```
int sum(int n) {
    if (n == 0) return 0;
    else return n + sum(n–1);
```

basis – gir riktig sum(0) =0

hvis sum(n–1) gir riktig = $\sum_{i=0}^{n-1} i$ så er sum(n) = n + sum(n–1) = $\sum_{i=0}^{n} i$

```
int sumw(int n) {
    int i=0, r=0;
    while (i != n)  {
        r= r+i;
        i++;
// r'= r+i, i'= i+1
    }
    return r;
}
```

1. Løkke-invariant, LI: r = $\sum_{k=0}^{i} k$

2. Initialisering: i=0 & r=0 = $\sum_{k=0}^{i=0} k$ **=> LI**

3a. hvis LI: r = $\sum_{k=0}^{i} k$ **holder før kroppen**

3b. så holder LI': r' = $\sum_{k=0}^{i'} k$ **etter kroppen**

4. Utgang: LI: r= $\sum_{k=0}^{i} k$ **& i =n =>** r = $\sum_{k=0}^{n} k$

Løkke-invariant

```
int sum(int n) {
    if (n == 0) return 0;
    else return n + sum(n–1);
```

basis – gir riktig sum(0) =0

hvis sum(n–1) gir riktig = $\sum_{i=0}^{n-1} i$ så er sum(n) = n + sum(n–1) = $\sum_{i=0}^{n} i$

```
int sumw(int n) {

    int i=0, r=0;

    while (i != n)  {

        r= r+i;
        i++;
// r'= r+i, i'=i+1
    }

    return r;
}
```

1. **Løkke-invariant, LI:** $r = \sum_{k=0}^{i} k$

2. **Initialisering:** i=0 & r=0 = $\sum_{k=0}^{i=0} k$ **=> LI**

3a. **hvis LI:** $r = \sum_{k=0}^{i} k$ **holder før kroppen**

3b. **så holder LI':** $r' = \sum_{k=0}^{i'} k$ **etter kroppen**

4. **Utgang: LI:** $r = \sum_{k=0}^{i} k$ **& i =n => ** $r = \sum_{k=0}^{n} k$

```
int sumw(int n) {

    int i=0, r=0;

    while (i != n) {

        i++;
        r= r+i;
    // i'= i+1, r'= r+i'
    }

    return r;
}
```

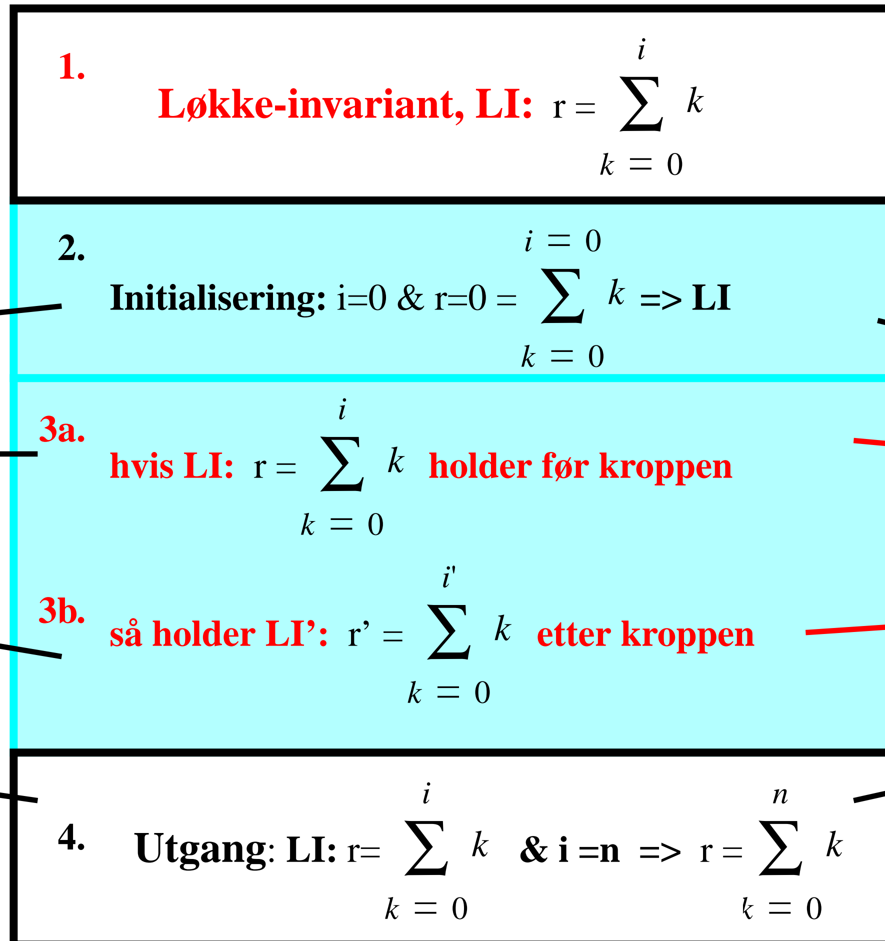
Løkke-invariant

```
int sum(int n) {
    if (n == 0) return 0;
    else return n + sum(n–1);
```

basis – gir riktig sum(0) =0

hvis sum(n–1) gir riktig = $\sum_{i=0}^{n-1} i$ så er sum(n) = n + sum(n–1) = $\sum_{i=0}^{n} i$

```
int sumw(int n) {

    int i=0, r=0;

    while (i != n)  {

        r= r+i;
        i++;
// r'= r+i, i'=i+1
    }

    return r;
}
```




```
int sumw(int n) {

    int i=0, r=0;

    while (i != n) {

        i++;
        r= r+i;
    // i'= i+1, r'= r+i'
    }

    return r;
}
```

Løkke-invariant: eksempel 1.

```
/**  beregner heltalls kvosient samt resten
     @param x >= 0
     @param y > 0
     @return (q, r) sa. x= q*y + r  &  0 <= r < y  &  0 <= q
*/
divr(int x, int y)  {
  int q = 0 ; int r = x ;
```

← initialisering: q = 0 & r = x >= 0 → **x= q*y + r & 0 <= r & 0 <= q**

```
  while (y <= r)  {
```

LI: 0 <= r & x = q*y + r & 0 <= q

← – anta at den gjelder ved inngang, samt **y <= r**

```
     q = q+1 ;
     r = r – y;
```

– da gjelder, etter løkkekroppen:

q' = q+1 & **0 <= q** → **0 <= q'** &

r' = r–y & **0 <= r** & **y <= r** → **0 <= r'**

q'*y + r' = (q+1)*y + (r–y) = q*y + y + r – y = q*y + r = **x**

← – dvs. LI opprettholdes gjennom kroppen

```
  }
```

← utgang fra løkken: **LI** & **r<y** → **x = r + q*y & 0 <= r < y & 0 <= q**

```
  return (q, r) ;  }
```

Løkke-invariant: eksempel 2.

```
/**     beregner største felles divisor
        @param x1 > 0
        @param x2 > 0
        @return y2 = gcd(x1,x2) */
gcd(x1,x2) {
    y1= x1; y2= x2;      <----  initialisering: x1 = y1 & x2 = y2 → gcd(x1,x2) == gcd(x1,x2)

    while (y1 != 0) {
                         <----  LI:  gcd(y1,y2) = gcd(x1,x2) – anta at den gjelder her
        if (y2 < y1)
            (y1,y2) = (y2,y1);      – gcd(x1,x2) = gcd(y1,y2) = gcd(y2,y1) = gcd(y1',y2')

        else // (y2 >= y1)
            y2= y2–y1;              – gcd(x1,x2) = gcd(y1,y2) = gcd(y1,y2-y1) = gcd(y1,y2')

                         <----  LI': cd(y1',y2') = gcd(x1,x2)
    }
                                utgang: LI  &  y1 = 0  →
                         <----      gcd(x1,x2) = gcd(y1,y2)
                                                = gcd(0,y2) = y2

    return y2;
}
```

Hvis gcd(y1,y2) = z >=1 & y2 >= y1, så

*) y1 = z*k1 <= z*k2 = y2 & gcd(k1,k2) = 1

Men da:

y2'= y2–y1 = z*(k2–k1) & gcd(k1, k2–k1) = 1

hvis ikke, dvs. gcd(k1,k2–k1) = v > 1, da

k1= v*a & k2–k1= v*b, så

k2= v*b+v*a = v*(b+a)

dvs. da også gcd(k1,k2) = v >1 – motsier *)

Oppsummering

1. ***Rekursjon*** *–* ***"Splitt og hersk"***

– bestem hva som må gjøres i basis tilfelle(r)

– konstruer ("hersk") en løsning fra (rekursive) løsninger for ("splitt") noen mindre instanser

Oppsummering

1. ***Rekursjon** – “**Splitt og hersk**”*

   – bestem hva som må gjøres i basis tilfelle(r)

   – konstruer (“hersk”) en løsning fra (rekursive) løsninger for (“splitt”) noen mindre instanser

2. *Enhver induktiv datatype (nat, int, lister, trær, ...) gir opphav til rekursive algoritmer*

Oppsummering

1. ***Rekursjon** – “**Splitt og hersk**”*

   – bestem hva som må gjøres i basis tilfelle(r)

   – konstruer (“hersk”) en løsning fra (rekursive) løsninger for (“splitt”) noen mindre instanser

2. *Enhver induktiv datatype (nat, int, lister, trær, ...) gir opphav til rekursive algoritmer*

3. *Rekursjon vs. iterasjon (rekursjon implementeres iterativt med bruk av stabel)*

Oppsummering

1. ***Rekursjon** – "**Splitt og hersk**"*

   – bestem hva som må gjøres i basis tilfelle(r)

   – konstruer ("hersk") en løsning fra (rekursive) løsninger for ("splitt") noen mindre instanser

2. *Enhver induktiv datatype (nat, int, lister, trær, ...) gir opphav til rekursive algoritmer*

3. *Rekursjon vs. iterasjon (rekursjon implementeres iterativt med bruk av stabel)*

4. ***Korrekthet***

   – bestem rekursjons-invarianten

   - ***verifiser** at basistilfelle(r) etablerer invarianten*
   - *under **antakelse** at rekursive kall etablerer invarianten, **vis** at konstruksjonen vil opprettholde den*

   – bestem løkke-invariant

   - ***vis** at den gjelder etter initialisering (like før inngangen i løkken)*
   - *under **antakelse** at den gjelder før løkkekroppen, **vis** at den gjelder også etter denne*