Rekursjon

I. TRE AV REKURSIVE KALL,

- **rekursjonsdybde**
- **terminering – ordning**

II. INDUKTIVE DATA TYPER

- **og Rekursjon over slike**

III. "SPLITT OG HERSK" – PROBLEMLØSNING VED REKURSJON (Kap. 8.1.1)

IV. REKURSJONS EFFEKTIVITET

- **"memoisering"**
- **avskjæring**

V. STABEL AV REKURSIVE KALL

- **iterasjon til rekursjon**
- **rekursjon implementert som iterasjon**

VI. KORREKTHET

- **terminering**
- **invarianter** (notat til Krogdahl&Haveraaen)

Et enkelt eksempel

har en metode som

```
/** leser en linje fra terminalen
 *  @return innleste String
 *  @exception IOException – i tilfelle i/o problem
 */
   public String readln()
```

og vil lage en som

```
/** leser en linje fra terminalen
 *     inntil den leser et heltall
 *  @return innleste tall
 *  @exception  ingen unntak
 *     – anta det kommer et heltall
 */
/*  public int iRead() {
 *     String s= readln();
 *     int k= hent int fra s;
 *     while (! alt ok)
 *        gjenta: k = hent int fra neste linje;
 *     return k;
 */
```

```
/* public int myRead() {
 *     String s= readln();
 *     int k= hent int fra s;
 *     if (alt ok) return k;
 *     else   // prøv neste linje
 *        return myRead();
 */   }

public int myRead() {
  try{
      return Integer.parseInt(readln());  }
  catch(IOException e) {
      return myRead(); }
  catch(NumberFormatException e) {
      return myRead(); }
}
```


Iterasjon til rekursjon

```
/** @param n > 0
    @return 1+2+...+n */
int sumW(int n) {
    int res =0;
    while (n > 0) {
        res = res + n;
        n = n–1;
    }
    return res;
}
```

```
/** @param n > 0
    @return 1+2+...+n */
int sumR(int n) {
    if (n == 0) return 0;
    else return n + sumR(n-1);
}
```

Generelt, dog ikke 100% riktig:

```
int Iter(int n) {
    res= init;
    while ( fortsett(n) ) {
        res= Kroppen(n,res);
        oppdater(n);
    }
    return res;
}
```

```
int Rekursiv(int n) {
    if ( !fortsett(n) ) return basetilfelle;
    else return  Kroppen(n, Rekursiv(oppdater(n)));
}
```

*Enhver **iterasjon** kan skrives som **rekursjon***

... t.o.m. som hale-rekursjon

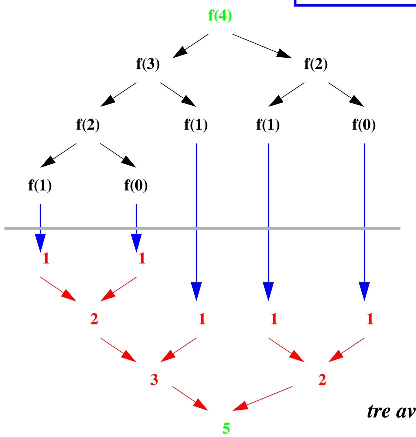
1. Rekursjons*tre* og *-dybde;* Eks: Fibonacci-tallene

fib(0) = 0
fib(1) = 1
fib(n+2) = fib(n) + fib(n+1)

```
public int fib(int n) {
  if (n==0 || n==1) return 1;
  else
    return fib(n-1) + fib(n-2);
}
```

returner i **basistilfelle**

ellers beregn rekursivt **enklere** (mindre) deler og sett disse sammen



tre av rekursive kall

```
f(4) ...?
—— f(3) ...?
—— —— f(2) ...?
—— —— —— f(1) ...?
—— —— —— > 1
—— —— —— f(0) ...?
—— —— —— > 1
—— —— > 2
—— —— f(1) ...?
—— —— > 1
—— > 3
—— f(2) ...?
—— —— f(1) ...?
—— —— > 1
—— —— f(0) ...?
—— —— > 1
—— > 2
> 5
```

rekkefølgen av kall

rekursjonsdybde

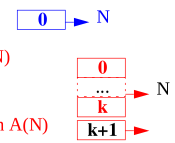
#svarte = #røde linjer = *# rekursive kall .....*

inntil basistilfelle er nådd (=høyden av treet)

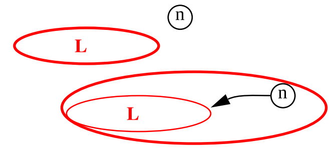
2. Induktive Data Typer *(vilkårlig store men endelige)*

naturlige tall N:
basis: **0** er et N
hvis **n** er et N
så er: **n+1** et N

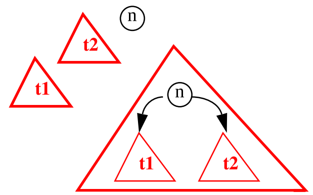
array av N: A(N)
basis **0 -> N** er A(N)
hvis **[0...k] -> N** er A(N)
så er **[0...k,k+1] -> N** en A(N)



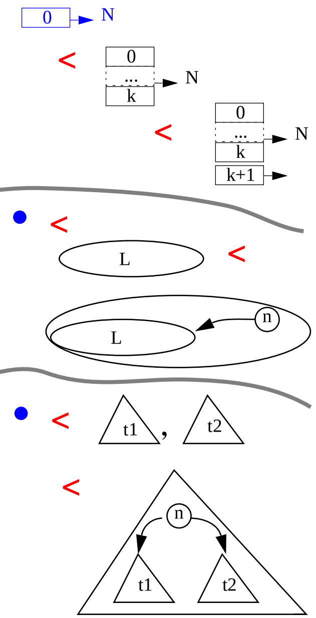
Lister av N: L(N):
basis: **null** er en L(N)
hvis **L** er L(N) og n er N
så er: **(L,n)** en L(N)



Binære Trær av N: BT(N):
basis: **null** er et BT(N)
hvis **t1, t2** er BT(N) og n er N
så er: **(t1, n, t2)** et BT(N)



Strukturell ordering



Variasjoner over tema

induktiv definisjon** = fra basis og oppover* ** ***rekursjon** = fra toppen mot basis*

N
basis: 0
ind: n+1
		int fib(n) {
		if (n==0 || n==1) return 1;
		else return fib(n-1) + fib(n-2);
		}
			int sum(k) {
			if (k==0) return 0;
			else return k + sum(k-1);
			}

Array[N]
basis: [0] -> N
ind: [0.. k, k+1] -> N
		void inc(AN A, int k) {
		A[k]++;
		if (k > 0) inc(A,k-1); }
			int sum(AN A, int k) {
			if (k==0) return A[0];
			else return A[k] + sum(A,k-1); } }

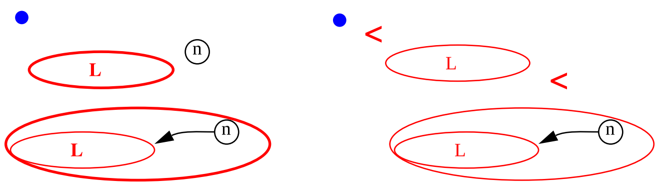
Liste[N]
basis: null
ind: (L,n)
	class LS {
	int hodedata;
	LS restliste; }
		void inc(LS L) {
		if (L==null) { }
		else { hodedata++;
		inc(L.restliste); }
			int sum(LS L) {
			if (L==null) return 0;
			else return sum(L.restliste)+hodedata;
			}

BinærtTre[N]
basis: null
ind: (t1,n,t2)
	class BT {
	int n;
	BT left;
	BT right;}
		void inc(BT B) {
		if (T==null) { }
		else { n++;
		inc(T.left);
		inc(T.right); } }
			int sum(BT T) {
			if (T==null) return 0;
			else return n +
			sum(T.left) +
			sum(T.right) ; }

FRAKTALer

En teknisk bemerkning

Lister av N: L[N]:
basis: **null** er en L[N]
hvis **L** er L[N] og n er N
så er: **(L,n)** en L[N]

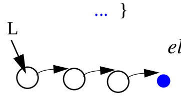


***Rekursjon implementert** "utenfra" datastrukturen :*

```
class LN {
    public int hodedata;
    public LN restliste;
    ...  }
```

```
inc(LN L) {
    if (L==null) {}
    else { L.hodedata++;
        inc(L.restliste); }
```

```
int sum(LN L) {
if (L==null) return 0;
else  return sum(L.restliste)+L.hodedata;
}
```



eller "innenfor" datastrukturen :

```
class LN {
    private int hodedata;
    private LN restliste;
    inc() {...}
    int sum() {...}     }
```

```
inc() {
    hodedata++;
    if (restliste != null)
        restliste.inc(); }

inc(LN L) {
    if (L != null)
        L.inc();
}
```

```
int sum() {
    if (restliste != null)
        return restliste.sum()+hodedata;
    else return hodedata; }

int sum(LN L) {
    if (L != null)
        return L.sum();
    else return 0; }
```

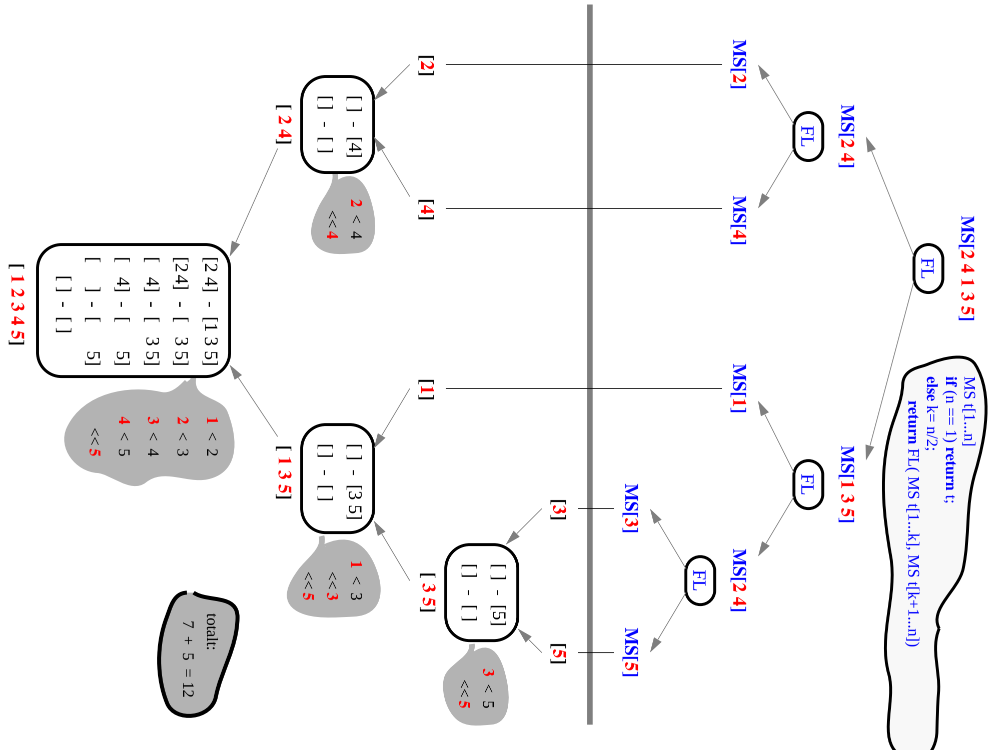

Iterativt eksempel: Seleksjonsortering

```
/*   SS - sorterer input array (SeleksjonSort)
 *       @param  - int tab[0...n]
 *       @return - sortert tab
 *
 *   for (k = 0,1,2...n) {
 *       i = k
 *       for ( j = k+1...n)
 *           if (tab[j] < tab[i]) i = j;
 *       bytt elementene ved indeks k og i
 *       }
 */
```

*for en vlikårlig input tabell med lengde **n**:*

- *utfører **n** iterasjoner (for k=1,2...**n**) og*
- *i hver iterasjon går gjennom sluttsegment **[k...n]**, (for j=k+1...n), dvs.*

tidskompleksistet $SS(n) = \left(\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n \right) = (n + n^2)/2 = \mathbf{O}(n^2)$



3. "Splitt og hersk" (eng: Divide and Conquer)

***Rekursjon* som en generell strategi for problemløsning og algoritmedesign**

Gitt en instans **n** *av et problem* **P** *:*

1. *hva gjør jeg når* **n** *er basis tilfelle*
2. *hvordan konstruere løsning for* **n** *utfra løsninger for noen instanser* **mindre enn n**

P = sorter input array A (n = A.length)

$O(n^2)$

```
/* int[] SS(int[] A,k) {
 * initielt kall med SS(A,0)
 * n = A.length;
 *    if (k==n-1) { return A; }
 *    else {
 *        i= indeksen til minste elementet
 *           i A[k...n-1];
 *        bytt A[k] med A[i];
 *        return SS(A, k+1); } }   */
```

$O(n*\log n)$

```
/* int[] MS(int[] A) { int n= A.length;
 *    if (n == 1) { return A; }
 *    else { del A i midten i
 *        t1= A[0...n/2] og t2= A[n/2+1...lgh];
 *        sorter rekursivt begge (mindre)
 *           r1= MS(t1) og r2= MS(t2)
 *        return flettet resultat av rekursive kall FL(r1,r2)
 * FL - fletter to sorterte array i en sortert array */
```

P = finn et gitt element x i en array A

$O(n)$

Hvis A er usortert : sjekk A[n]*; hvis x ikke er der, lett i* A[0...n–1]

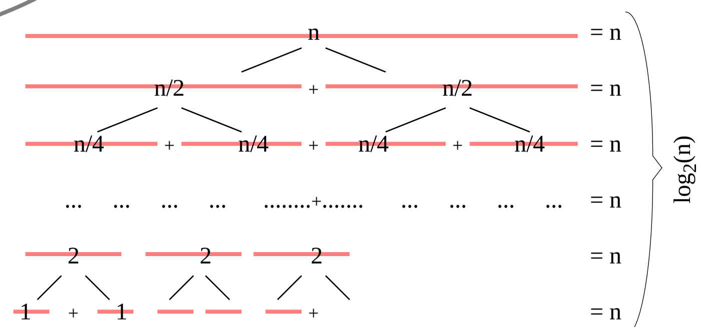
Hvis A er sortert ...

Rekursivt eksempel:MergeSort

```
/*  FL - fletter to sorterte array:
 *      @param  - int t1[0...n1], t2[0...n2] - sorterte
 *      @return - sortert t[0......n1+n2]
 *  gå (samtidig) gjennom t1 og t2 (med i1 og i2)
 *  if      t1[i1] < t2[i2] plasser t1[i1] i t og øk i1, i
 *  else                plasser t2[i2] i t og øk i2, i
 *  hvis noe igjen i t1 eller t2, flytt det til t
 *  return t;
 */
```

$FL(n1,n2) = O(n1+n2)$

```
/*  MS - sorterer input array:
 *      @param  - int tab[0...n-1]
 *      @return - sortert tab
 *  if (n == 1) return tab
 *  else { k= n/2;
 *      return FL ( MS(tab[0...k]), MS(tab[k+1..n-1]) ); }
 */
```



$MS(n) = O(n * \log_2(n))$

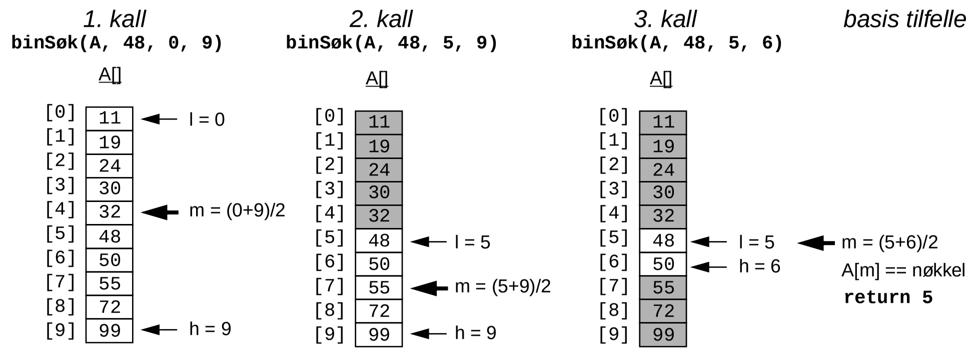
Binær Søk

/* finn indeks i A til et element x:
* **@param A** **int** A[...] sortertint
* **@param x** finn x i A
* **@param l, h** søk i A bare fom. l tom. h
* **@return** indeks til x;
* –1 hvis x ikke finnes
*/

O (log n)

```
int BS(int[] A,x,l,h) {
    m= (l+h) / 2 ;
    if (l > h) return -1;
    else if (A[m] == x) return m;
    else if (A[m] < x) return BS(A,x,m+1,h);
    else return BS(A,x,l,m-1); }
// initielt kall med BS(A, x, 0, A.length–1)
```

Nøkkel er 48

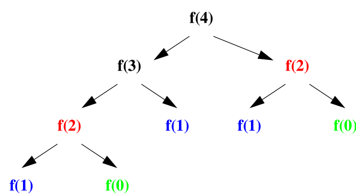


4. Rekursjon og effektivitet

– Reduser antall rekursive kall –

```
int fib(int n) {
    if (n==0 || n==1) return 1;
    else return fib(n-1)+fib(n-2);
}
```

$O(1.6^n)$



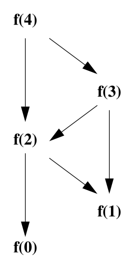
1. "Memoisering" :

*Istedenfor gjentatte rekursive kall til f(k) med samme k, kan **i dette tilfelle** resultatet av f(k) lagres for senere bruk:*

```
int Fib(int n) {
    int[] ar= new int[n+1];
    ar[0]=1; ar[1]=1;
    return fibo(n, ar);
}

int fibo(int n, int[] ar) {
    if (ar[n] > 0) {
        return ar[n]; }
    else {
        int z= fibo(n–1) + fibo(n–2);
        ar[n]= z;
        return z;
} }
```

O(n)



Rekursjon & effektivitet

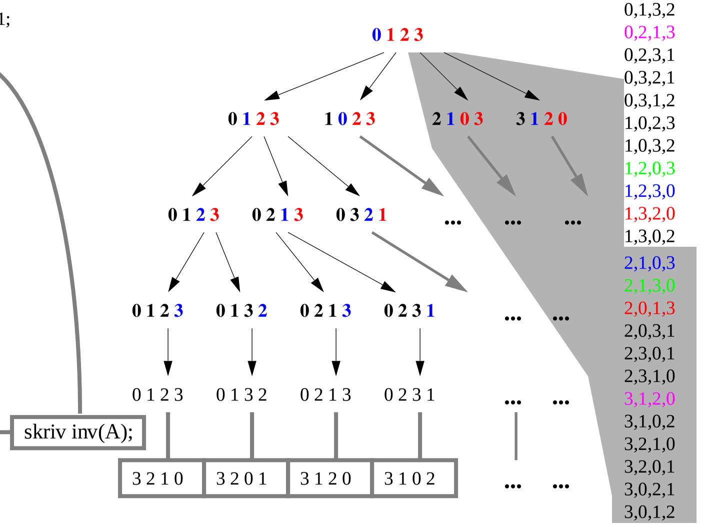
2. Avskjæring

Finn alle permutasjoner av [0,1,2...n-1] (for et partall n)

```
/*  perm(A,n) { int l= A.length-1;
 *  if (n==l) { skriv A; }
 *  else {
 *      for hver ind: n+1...l
 *          perm(A,n+1);
 *          bytt A[n] og A[ind]
 *      perm(A,n+1);
 *      roterL[n...l]; }
 */
```

A[0..n-1] A[n] A[n+1..l]
perm(A,0) skriver alle perm

```
/*  PE(A) { int l= A.length-1;
 *  for hver n: 0...l/2 {
 *      bytt A[0] og A[n];
 *      perm2(A,1);
 *      bytt A[0] og A[n]; }
 */
```



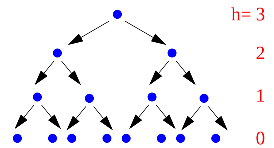
Kompleksitet av en rekursiv funksjon

Analyse vha REKURSJONSTRE

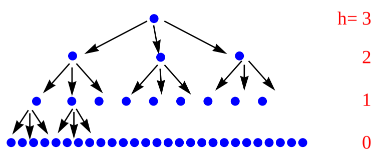
avhenger av

- *"**størrelsen på steget**" i hvert rekursivt kall (høyden av treet)*
- ***antall rekursive kall** i hvert steg ("bredden" av forgreninger)*
- *arbeidsmengden ved "sammensetting" av resultater fra rekursive kall. **Anta dette O(1) i eksemplene under.***

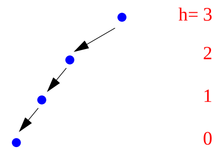
R(0) = 1, R(1) = 1
R(**n+1**) = R(**n**) + R(**n**) $O(2^{n+1} - 1)$



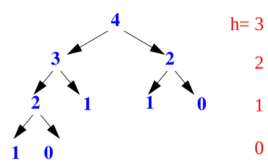
R(0) = 1, R(1) = 1
R(**n+1**) = R(**n**) + R(**n**) + R(**n**) $O(3^{n+1} - 1)$



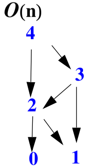
R(0) = 1, R(1) = 1
R(**n+1**) = R(**n**) * 2 O(**n**)



R(0) = 1, R(1) = 1
R(**n+2**) = R(**n+1**) + R(**n**) $O(1.6^n)$

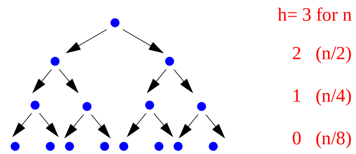


Fibonacci kan dog forenkles til: O(**n**)



R(1) = 1
R(**n**) = R(**n/2**) + R(**n/2**)

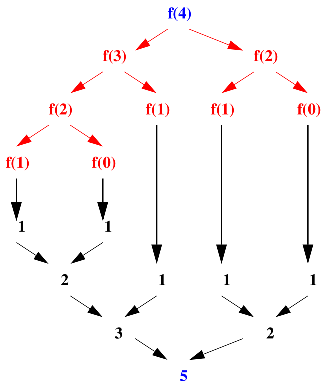
$2^{\log(n)+1} - 1 = 2n - 1 = O(n)$

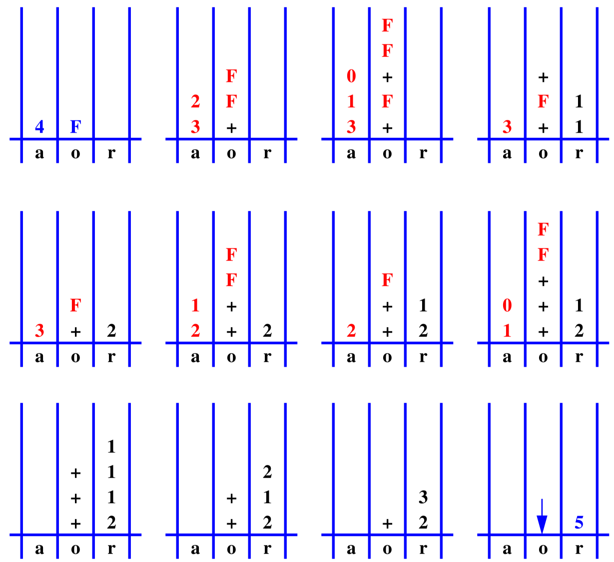


5. Rekursjon implementert med stabel. . .

For Fib kan vi bruke f.eks. 3 stabler ar(argument), op(operator), re(resultat)

```
int Fib(int n) {
if (n==0 || n==1) return 1;
else
    return Fib(n-1) + Fib(n-2);}
```





Rekursjon til iterasjon

(kan alltid omgjøres v.hj.a. Stabel)

```
int Fib(int n) {
  if (n==0 || n==1) return 1;
  else
    return Fib(n-1) + Fib(n-2);
}
```

Noen rekursjoner (f.eks. hale-rekursjon) kan omgjøres til iterasjon på en enklere måte.

```
int fibS(int a) {
  String  o; int n, a1, a2;
  Stack op = new StackImp();
  Stack re = new StackImp();
  Stack ar = new StackImp();

  op.push("F"); ar.push( new Integer(a) );
  while (!op.empty()) {
   o= (String) op.pop();

   if ( o.equals("F") ) {
        n= ( (Integer)ar.pop() ).intValue();
        if (n==0 || n==1) re.push( new Integer(1) );
        else {
            op.push("+"); op.push("F"); op.push("F");
            ar.push( new Integer(n-1) );
            ar.push( new Integer(n-2) ); }

  } else if ( o.equals("+") ) {
        a1= ( (Integer)re.pop() ).intValue();
        a2= ( (Integer)re.pop() ).intValue();
        re.push( new Integer(a1+a2) ); }
  }
  return ( (Integer)re.pop() ).intValue();
}
```


6. Korrekthet

Gitt en instans **n** *av et problem* **P** *:*

1. hva gjør jeg når **n** *er basis tilfelle*

2. hvordan konstruere løsning for **n** *utfra løsninger for noen instanser* **mindre enn n**

P(n)
  if Basis(**n**)
    return ???

  else
    return
    Kombiner(**P(m1)** ... **P(mk)**)

Terminering:

P(n)
  if Basis(**n**)
  – stopper rekursjon

  else
  – garanter at hver **mi < n**, er nærmere Basis

Korrekthet:

P(n)
  if Basis(**n**)
  – kontroller korrekt utførelse

  else HER MÅ VI VISE **HVIS -> SÅ**
  – **HVIS** hvert rekursivt kall **P(mi)** returnerer riktig resultat

  !!! DET OVENSTÅENDE ANTAR VI !!!

  – **SÅ** gir Kombiner(**P(m1)** ... **P(mk)**) riktig resultat

kombinasjon opprettholder
rekursjons-invariant

Korrekthet: rekursjons-invariant

```
/* int[] MS(int[] A) { int n= A.length;
 *   if (n == 1) { return A; }
 *   else {
 *       del A i midten i :
 *       t1= A[0...n/2]  og  t2 = A[n/2+1...n];
 *       sorter rekursivt (mindre) delene
 *          r1= MS(t1) og
 *          r2= MS(t2)
 *       return flettet resultat av
 *          rekursive kall FL(r1,r2) }
 */
```

Invariant:
MS(A) *returnerer sortert argument* A:

if **lgh==1** – ***da er A sortert***

else – deler A i to disjunkte deler

  t1= **A[0...n/2]** og t2= **A[n/2+1...n]**

  r1= MS(**t1**) ***returnerer sortert t1***
  r2= MS(**t2**) ***returnerer sortert t2***

  hvis FL fletter korrekt to sorterte array, så returnerer hele else-grenen sortert A

```
/* int BS(int[] A, int x, int l, int h) {
 *   int m= (l+h) / 2 ;
 *   if (l > h) return –1;
 *   else if (A[m] == x) return m;
 *   else if (A[m] < x) return BS(A, x, m+1, h);
 *   else return BS(A, x, l, m–1); }
 */
```

Invariant:
  argumentet A er sortert &
  er x i A, så er den mellom [l ... h]
  (*initielt kall med* (A, x, 0, A.length-1)

if **l > h** – **x** ***kan ikke være der (–1 er riktig)***

else if **A[m] = x** – ***da har vi funnet den (m er riktig)***

else if **A[m] < x** –

  er x i A, så må den være mellom **[m+1... h]**

  BS(A, x, **m+1**, **h**) ***vil returnere riktig resultat***

else **A[m] > x** –

  er x i A, så må den være mellom **[l ... m–1]**

  BS(A, x, **l**, **m–1**) ***vil returnere riktig resultat***

Løkke-invariant

```
int sum(int n) {
    if (n == 0) return 0;
    else return n + sum(n–1);
```

basis – gir riktig sum(0) =0

hvis sum(n–1) gir riktig = $\sum_{i=0}^{n-1} i$ så er sum(n) = n + sum(n–1) = $\sum_{i=0}^{n} i$

1. Løkke-invariant, LI: r = $\sum_{k=0}^{i} k$

2. Initialisering: i=0 & r=0 = $\sum_{k=0}^{i=0} k$ **=> LI**

3a. hvis LI: r = $\sum_{k=0}^{i} k$ **holder før kroppen**

3b. så holder LI': r' = $\sum_{k=0}^{i'} k$ **etter kroppen**

4. Utgang: LI: r= $\sum_{k=0}^{i} k$ **& i =n =>** r = $\sum_{k=0}^{n} k$

```
int sumw(int n) {

    int i=0, r=0;
    while (i != n)  {
        r= r+i;
        i++;
// r'= r+i, i'=i+1
    }

    return r;
}
```

```
int sumw(int n) {

    int i=0, r=0;
    while (i != n) {
        i++;
        r= r+i;
    // i'= i+1, r'= r+i'
    }

    return r;
}
```


Løkke-invariant: eksempel 1.

/** beregner heltalls kvosient samt resten
@param x >= 0
@param y > 0
@return (q, r) sa. **x= q*y + r & 0 <= r < y & 0 <= q**
*/

divr(int x, int y) {
int q = 0 ; int r = x ;

initialisering: q = 0 & r = x >= 0 → **x= q*y + r & 0 <= r & 0 <= q**

while (**y <= r**) {

LI: 0 <= r & x = q*y + r & 0 <= q

– anta at den gjelder ved inngang, samt **y <= r**

q = q+1 ;
r = r – y;

– da gjelder, etter løkkekroppen:

q' = q+1 & **0 <= q** → **0 <= q'** &

r' = r–y & **0 <= r** & **y <= r** → **0 <= r'**

q'*y + r' = (q+1)*y + (r–y) = q*y + y + r – y = q*y + r = **x**

– dvs. LI opprettholdes gjennom kroppen

}

utgang fra løkken: **LI** & **r<y** → **x = r + q*y & 0 <= r < y & 0 <= q**

return (q, r) ; }

Løkke-invariant: eksempel 2.

/** beregner største felles divisor
@param x1 > 0
@param x2 > 0
@return **y2 = gcd(x1,x2)** */

gcd(x1,x2) {
y1= x1; y2= x2;

initialisering: x1 = y1 & x2 = y2 → **gcd(x1,x2) == gcd(x1,x2)**

while (**y1 != 0**) {

LI: gcd(y1,y2) = gcd(x1,x2) – anta at den gjelder her

if (y2 < y1)
(y1,y2) = (y2,y1); – **gcd(x1,x2)** = gcd(y1,y2) = gcd(y2,y1) = **gcd(y1',y2')**

else // (y2 >= y1)
y2= y2–y1; – **gcd(x1,x2)** = gcd(y1,y2) = gcd(y1,y2-y1) = **gcd(y1,y2')**

LI': cd(y1',y2') = gcd(x1,x2)

}

utgang: **LI & y1 = 0** →
gcd(x1,x2) = gcd(y1,y2)
= gcd(0,y2) = y2

Hvis gcd(y1,y2) = z >=1 & y2 >= y1, så
*) y1 = z*k1 <= z*k2 = y2 & gcd(k1,k2) = 1
Men da:
y2'= y2–y1 = z*(k2–k1) & gcd(k1, k2–k1) = 1
hvis ikke, dvs. gcd(k1,k2–k1) = v > 1, da
k1= v*a & k2–k1= v*b, så
k2= v*b+v*a = v*(b+a)
dvs. da også gcd(k1,k2) = v >1 – motsier *)

return y2;
}

Oppsummering

1. ***Rekursjon*** *– "**Splitt og hersk**"*
   – bestem hva som må gjøres i basis tilfelle(r)
   – konstruer ("hersk") en løsning fra (rekursive) løsninger for ("splitt") noen mindre instanser
2. *Enhver induktiv datatype (nat, int, lister, trær, ...) gir opphav til rekursive algoritmer*
3. *Rekursjon vs. iterasjon (rekursjon implementeres iterativt med bruk av stabel)*
4. *Kompleksitet av rekursiv funksjon avhenger av*
   – antall noder i rekursjonstre ("splitt")
   - *dybden (høyden) av treet – hvor stort steg mot basis utgjør hver "splitting"*
   - *antall rekursive kall (bredden av treet) på hvert nivå*

   – arbeidsmengden for å konstruere en løsning utfra løsninger for mindre instanser ("hersk")
5. ***Korrekthet***
   – bestem rekursjons-invarianten
   - ***verifiser** at basistilfelle(r) etablerer invarianten*
   - *under **antakelse** at rekursive kall etablerer invarianten, **vis** at konstruksjonen vil opprettholde den*

   – bestem løkke-invariant
   - ***vis** at den gjelder etter initialisering (like før inngangen i løkken)*
   - *under **antakelse** at den gjelder før løkkekroppen, **vis** at den gjelder også etter denne*