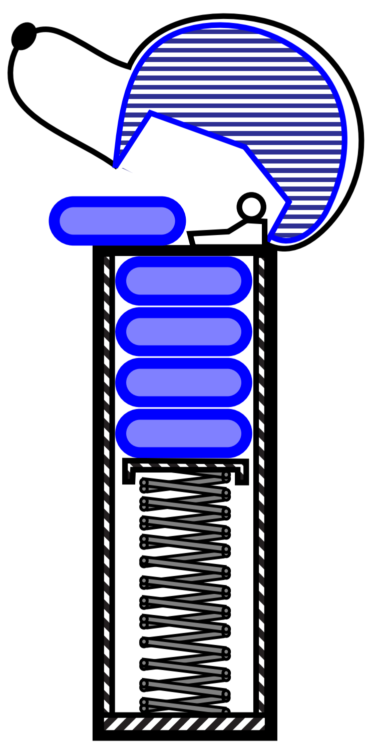
# Stabler og Rekursjon

- Abstrakte Data Typer (ADT)
- Stabler
- Eksempel: Aksjeanalyse
- Unntakshåndtering i Java
- 2 stabel-implementasjoner
- Rekursjon

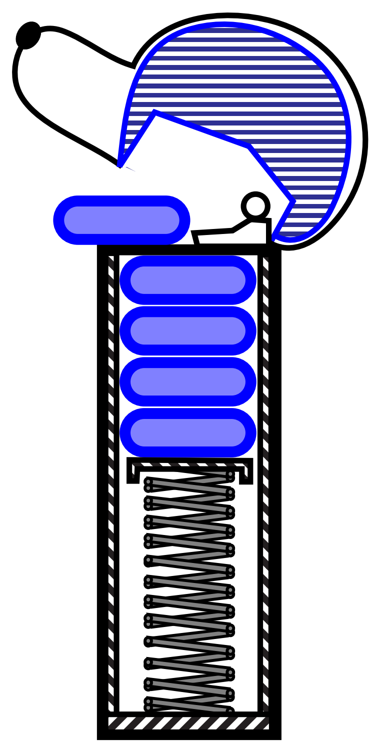


# Abstrakte Data Typer (ADT)

- En **Abstrakt Data Type** er en abstraksjon av en data struktur: ingen implementering er involvert.
- ADT spesifiserer:
  - hva kan lagres i denne ADT
  - hvilke operasjoner kan utføres på/av ADT
- Det finnes flere standard ADTer, og i dette kurset vil vi se noen (stabler, køer, trær...)

# Stabler

- En stabel er en beholder for objekter som settes inn og taes ut etter last-in-first-out (LIFO) prinsippet.
- Objekter kan innsettes når som helst, men bare det siste innsatte objektet kan taes ut.
- Å sette inn et objekt kalles å “PUSH”e objektet på stabelen. Å ta et objekt ut av en stabel kalles å “POP”e det.
- En PEZ® sukkertøysbeholder (eller en stabel med tallerkener på en kafeteria) er en analogi:

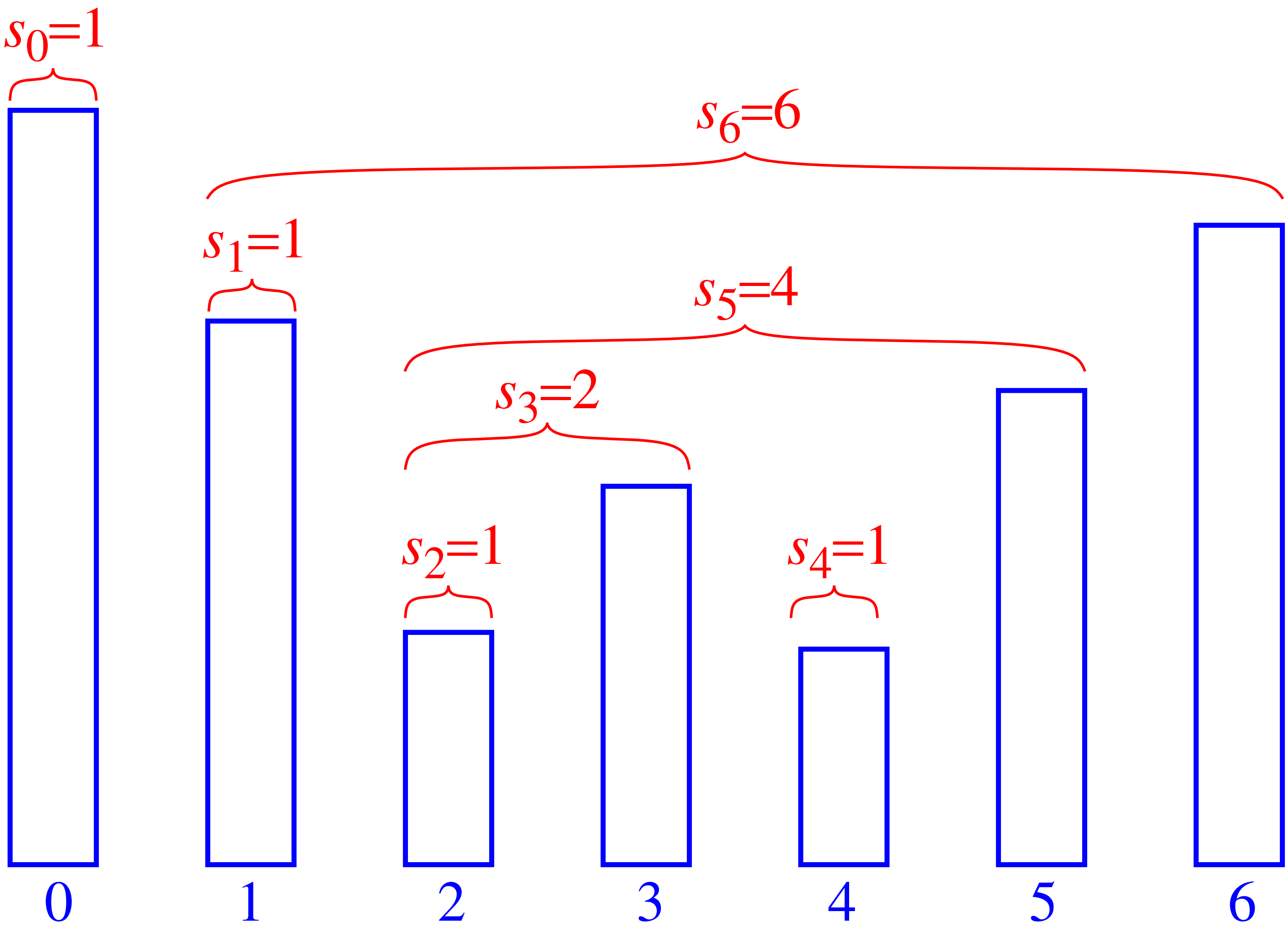


# ADT Stabel

- ADT stabel har to hovedmetoder:
  - push(*o*): Inserts object *o* onto top of stack
  - pop(): Removes the top object of stack and returns it; if stack is empty an error occurs
- Følgende hjelpemetoder kan også defineres:
  - size(): Returns the number of objects in stack
  - isEmpty(): Return a boolean indicating if stack is empty.
  - top(): return the top object of the stack, without removing it; if the stack is empty an error occurs.

# Eksempel

- En aksjes ***spenn (eng span)*** for en gitt dag $d$, er det høyeste antall påfølgende dager fram til dag $d$ hvor prisen på aksjen ikke oversteg prisen på dag $d$.



# En første Algoritme for spenn

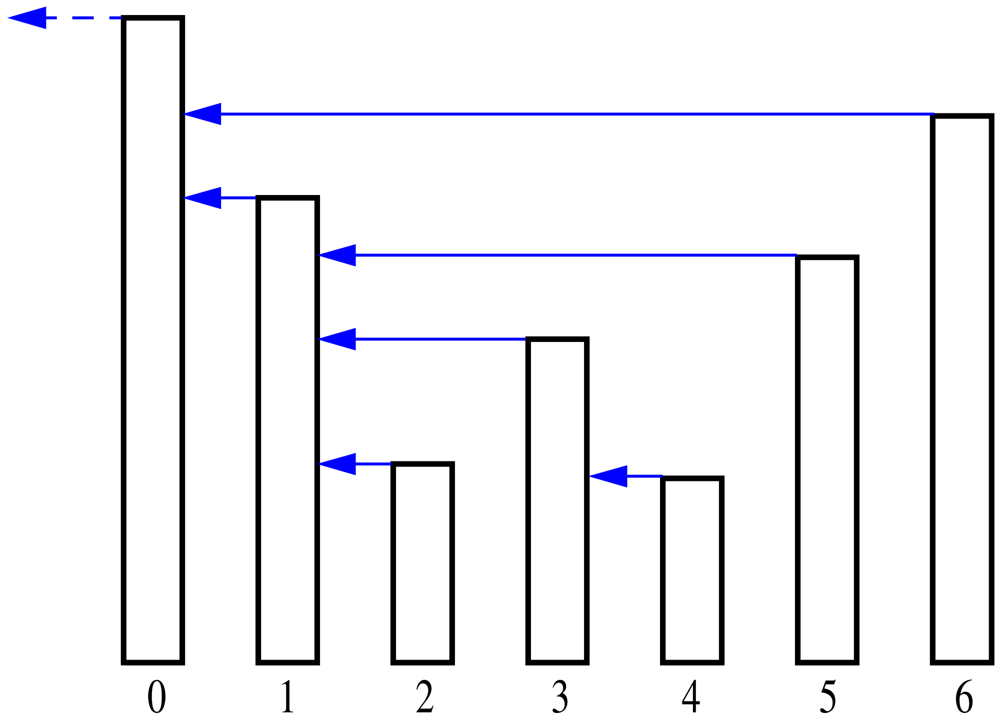
- Vi beregner spennet for hver av $n$ dager:

**Algorithm** computeSpans1($P$):
Input: An $n$-element array $P$ of numbers
Output: An $n$-element array $S$ of numbers such that
$S[i]$ is the span of the stock on day $i$.
Let $S$ be an array of $n$ numbers
**for** $i=0$ **to** $n-1$ **do**
  $k \leftarrow 0$
  $done \leftarrow$ **false**
  **repeat**
    **if** $P[i-k] \leq P[i]$ **then**
      $k \leftarrow k+1$
    **else**
      $done \leftarrow$ **true**
  **until** $(k=i)$ **or** $done$
  $S[i] \leftarrow k$
**return** array $S$

- Kjøretid er $O(n^2)$. Hvorfor?

# Bruk en stabel!

- For en gitt dag $i$, må vi holde tritt med $h_i$ = 'den nærmeste dagen, forut for dag $i$, hvor prisen er høyere enn den er for dag $i$'
- Spennet for dag $i$ blir da ganske enkelt $s_i = i - h_i$




Vi kan bruke en ***stabel*** for å beregne $h_i$

# En bedre algoritme vha stabel:

**Algorithm** computeSpan2($P$):
  Input: An $n$-element array $P$ of numbers
  Output: An $n$-element array $S$ of numbers such that
      $S[i]$ is the span of the stock on day $i$.
  Let $S$ be an array of $n$ numbers and $D$ an empty stack
  **for** $i$=0 **to** $n$-1 **do**
    $done$←**false**
    **while not**($D$.isEmpty() **or** $done$) **do**
      **if** $P[i] \geq P[D.\text{top}()]$ **then**
        $D$.pop()
      **else**
        $done$←**true**
    **if** $D$.isEmpty() **then**
      $h$← -1
    **else**
      $h$←$D$.top()
    $S[i]$←$i$-$h$
    $D$.push($i$)
  **return** array $S$

- Hva med computeSpan2's kjøretid...?

# Et grensesnitt for stabler i Java

- Stabel (stack) er en innebygget klasse i Java's java.util pakke, men man kan også definere sin egen stabel:

- public interface Stack {

```
// accessor methods

   public int size(); // return the number of
                      // elements in the stack

   public boolean isEmpty();  // see if the stack
                              // is empty

   public Object top() // return the top element

      throws StackEmptyException; // if called on
                                  // an empty stack

// update methods

   public void push (Object element); // push an
         // element onto the stack. Note that
         // the type of the parameter is
         // specified as an Object

   public Object pop() // return and remove the
                       // top element of the stack
      throws StackEmptyException; // if called on
                                  // an empty stack

}
```

# Unntak (eng: Exceptions)

- **Unntak** er et nyttig programmeringsbegrep.
- Brukes for håndtering av feil. Feilsituasjoner markeres ved å ***heve (eng: throw)*** et unntak.
- Eksempel

```
public void spisPizza() throws OverSpistException
{
   ...

   if (spistForMye)
      throw new OverSpistException(“Raaap”);

   ...
}
```

- Såsnart unntaket heves, vil kontrollflyten endres ved at inneværende metode forlates.
- Når OverSpistException heves, forlater vi spisPizza() og fortsetter i den metoden hvor kallet kom fra.

# Unntak

- Anta spisPizza() ble kallt som følger:

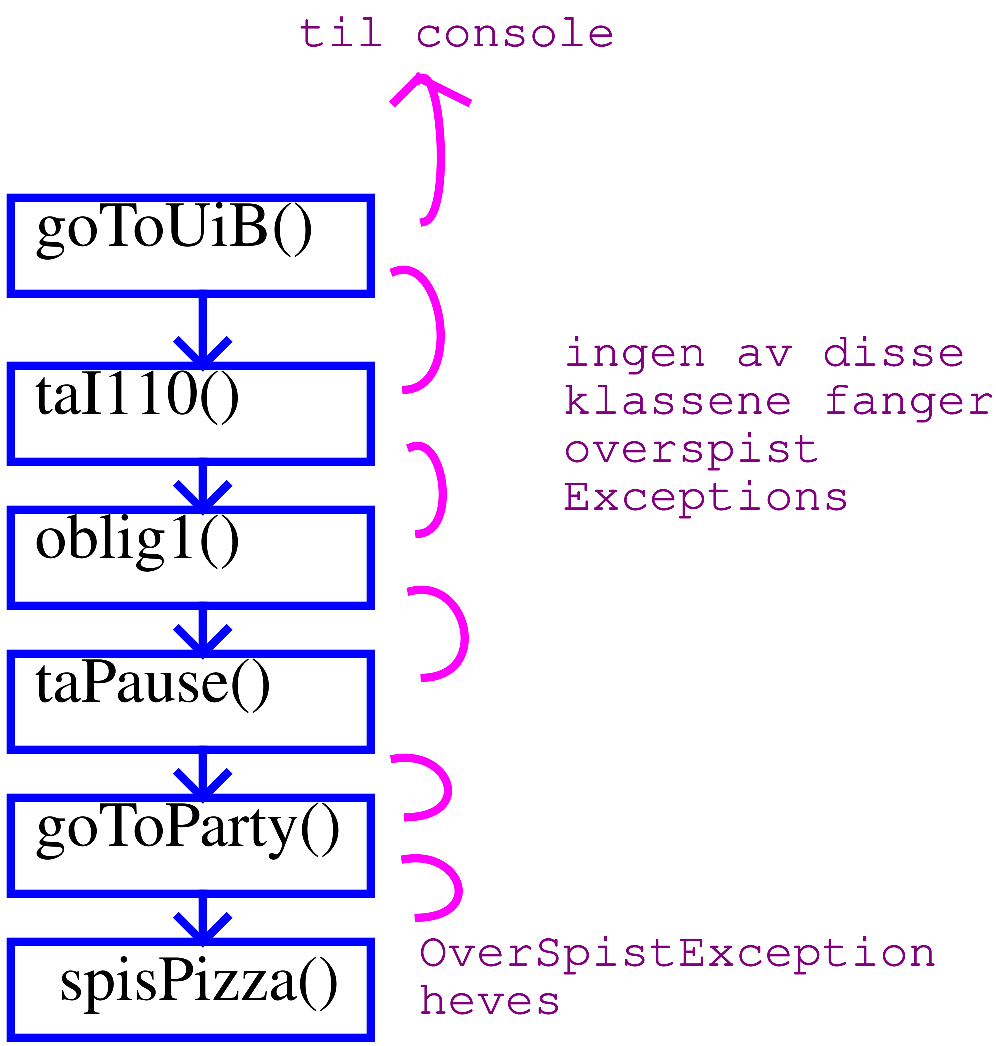
```
private void simulateMeeting()
{
    ...
    try
      {
        graadig.spisPizza();
      }
    catch(OverSpistException e)
      {
        System.out.println("Noen har overspist");
      }
    ...
}
```

# Mer om unntak

- Kontrollen returnerer til graadig.spisPizza(); fordi et unntak ble hevet i spisPizza().
- Gjennom programblokkene try og catch venter vi på unntak som spesifisert i catch parameteren.
- Siden catch venter pår OverSpistException, vil kontorllflyten gå til catch og System.out.println vil utføres.
- En catch kan inneholde hva som helst, ikke nødvendigvis System.out.println. Programmereren bestemmer selv hvordan unntaket skal håndteres, unntaket kan også bli hevet videre.
- Hvis en metode kan heve et unntak må den ha throws rett etter metodenavnet.
- Hvorfor bruke unntak? Fordi feilhåndtering da kan foretaes på et ‘høyere nivå’ i programmet, ansvaret sendes tilbake til den som gjorde kallet. Og dette er tydelig i grensesnittet for metoden, gjennom throws.

# Mer om unntak

- Om et unntak aldri håndteres, men bare heves videre, vil det propagere oppover i metodekallene inntil brukeren ser det:



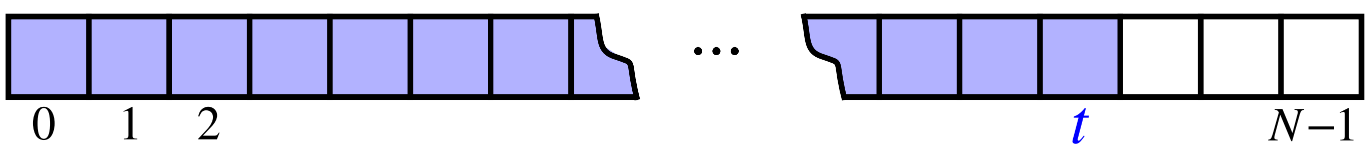
# Siste om unntak

- Men hva er et unntak i Java? Svar: En klasse.
- Se på OverSpistException.

```
public class OverSpistException extends
   RuntimeException {
   public OverSpistException(String err)
      {
         super(err);
      }
}
```

# En tabell-basert stabel

- Lag en stabel vha en array med max-størrelse $N$ f.eks. $N = 1{,}024$, og en peker t til 'øverste' elementet i stabelen.
-




- Array indeks starter på 0, så vi initialiserer $t$ til -1
- Pseudokode

**Algorithm** size():
  **return** $t$ +1

**Algorithm** isEmpty():
  **return** ($t$ < 0)

**Algorithm** top():
  **if** isEmpty() **then**
    **throw** a StackEmptyException
  **return** $S[t]$
**...**

# Tabell-basert stabel

- Pseudokode

**Algorithm** push($o$):
  **if** size() = $N$ **then**
    **throw** a StackFullException
  $t \leftarrow t + 1$
  $S[t] \leftarrow o$

**Algorithm** pop():
  **if** isEmpty() **then**
    **throw** a StackEmptyException
  $e \leftarrow S[t]$
  $S[t] \leftarrow$ **null**
  $t \leftarrow t - 1$
  **return** $e$

- Hver metode har konstant kjøretid $O(1)$.
- Array-implementeringen er enkel og effektiv..
- Men...vi har en øvre grense, $N$, på stabelstørrelsen. For en gitt applikasjon kan $N$ være for liten, eller kanskje for stor...

# Java-kode

```
public class ArrayStack implements Stack {
   // Implementation of the Stack interface
   // using an array.

   public static final int CAPACITY = 1000; // default
                          // capacity of the stack
   private int capacity; // maximum capacity of the
                          // stack.
   private Object S[ ]; // S holds the elements of
                         // the stack
   private int top = -1; // the top element of the
                          // stack.

   public ArrayStack( ) { // Initialize the stack
       this(CAPACITY);// with default capacity
   }

   public ArrayStack(int cap) { // Initialize the
                     // stack with given capacity
       capacity = cap;
       S = new Object[capacity];
   }
```

# Tebell-basert stabel i Java

```
public int size( ) { //Return the current stack
                   // size
    return (top + 1);
}
public boolean isEmpty( ) {  // Return true iff
                            // the stack is empty
    return (top < 0);
}


public void push(Object obj) { // Push a new
                            // object on the stack
    if (size() == capacity) {
      throw new StackFullException("Stack overflow.");
    }
    S[++top] = obj;
}


public Object top( ) // Return the top stack
                    // element
    throws StackEmptyException {
    if (isEmpty( )) {
      throw new StackEmptyException("Stack is
        empty.");
      }
    return S[top];
}
```

# Tabell-basert stabel i Java

```
public Object pop() // Pop off the stack element
   throws StackEmptyException {
   Object elem;
      if (isEmpty( )) {
        throw new StackEmptyException(“Stack is Empty.”);
      }
   elem = S[top];
   S[top--] = null; // Dereference S[top] and
                    // decrement top
   return elem;
   }
```

# Tabell-basert stabel og utvidelse

- Istedetfor å heve en StackFullException, kan vi bytte ut array $S$ med en større array og fortsette med flere push-operasjoner..

**Algorithm** push($o$):
  **if** size() = $N$ **then**
    $A \leftarrow$ *new array of length f(N)*
   **for** $i \leftarrow 0$ **to** $N - 1$
     $A[i] \leftarrow S[i]$
   $S \leftarrow A$
  $t \leftarrow t + 1$
  $S[t] \leftarrow o$

- ***Hvor stor skal den nye array være?***
  - ***konstantvekst-strategi*** : $f(N) = N + c$, $c$ konstant
  - ***doblingsvekst-strategi*** : $f(N) = 2N$

- For å sammenlikne de to strategier, bruker vi følgende kostnadsmodell:

| | |
|---|---|
| vanlig push operasjon: ett nytt elmt | 1 |
| spesiell push operasjon: lag array med $f(N)$ elmt, kopier over $N$ elmt, og legg til ett nytt elmt | $f(N) + N + 1$ |

# Konstantvekst-Strategi ($c$=4)

- begynner med array størrelse 0
- spesiell push koster $2N + 5$

| push | fase | $n$ | $N$ | kost |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 5 |
| 2 | 1 | 1 | 4 | 1 |
| 3 | 1 | 2 | 4 | 1 |
| 4 | 1 | 3 | 4 | 1 |
| 5 | 2 | 4 | 4 | 13 |
| 6 | 2 | 5 | 8 | 1 |
| 7 | 2 | 6 | 8 | 1 |
| 8 | 2 | 7 | 8 | 1 |
| 9 | 3 | 8 | 8 | 21 |
| 10 | 3 | 9 | 12 | 1 |
| 11 | 3 | 10 | 12 | 1 |
| 12 | 3 | 11 | 12 | 1 |
| 13 | 4 | 12 | 12 | 29 |

# Kjøretid for konstantvekst-strategi

- Anta $k$ faser, hvor $k = n/c$, $n$ antall push totalt
- Hver fase tilsvarer en ny array størrelse
- Fase $i$ koster $2ci$
- Totalkostnad av $n$ push operasjoner er totalkostnad for $k$ faser, hvor $k = n/c$:

  $2c\ (1 + 2 + 3 + ... + k)$,

  som er $O(k^2)$ og $\mathbf{O(n^2)}$.

# Doblingsvekst-strategi

- begynn med array størrelse 0, så 1, 2, 4, 8, ...
- spesiell push koster nå $3N + 1$ for $N > 0$

| push | fase | $n$ | $N$ | kost |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 4 |
| 3 | 2 | 2 | 2 | 7 |
| 4 | 2 | 3 | 4 | 1 |
| 5 | 3 | 4 | 4 | 13 |
| 6 | 3 | 5 | 8 | 1 |
| 7 | 3 | 6 | 8 | 1 |
| 8 | 3 | 7 | 8 | 1 |
| 9 | 4 | 8 | 8 | 25 |
| 10 | 4 | 9 | 16 | 1 |
| 11 | 4 | 10 | 16 | 1 |
| 12 | 4 | 11 | 16 | 1 |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| 16 | 4 | 15 | 16 | 1 |
| 17 | 5 | 16 | 16 | 49 |

# Kjøretid for doblingsvekst-strategi

- Anta $k$ faser, hvor $k = \log n$, $n$ antall push totalt
- Hver fase tilsvarer en ny array størrelse
- Fase $i$ koster $2^{i+1}$
- Totalkostnad for $n$ push operasjoner er totalkostnad for $k$ faser, hvor $k = \log n$

  $2 + 4 + 8 + ... + 2^{\log n + 1} =$

  $2n + n + n/2 + n/4 + ... + 8 + 4 + 2 = 4n - 1$

- Dette er O(n). Doblingsvekst-strategien er best!

# Støping (eng: Casting) med en generisk stabel

- Bruk ArrayStack som lagrer Integer objekter.
- For å bruke en generisk stabel, må return objektet støpes om til den korrekte data type.
- Java kode eksempel (reverser en tabell av integer):

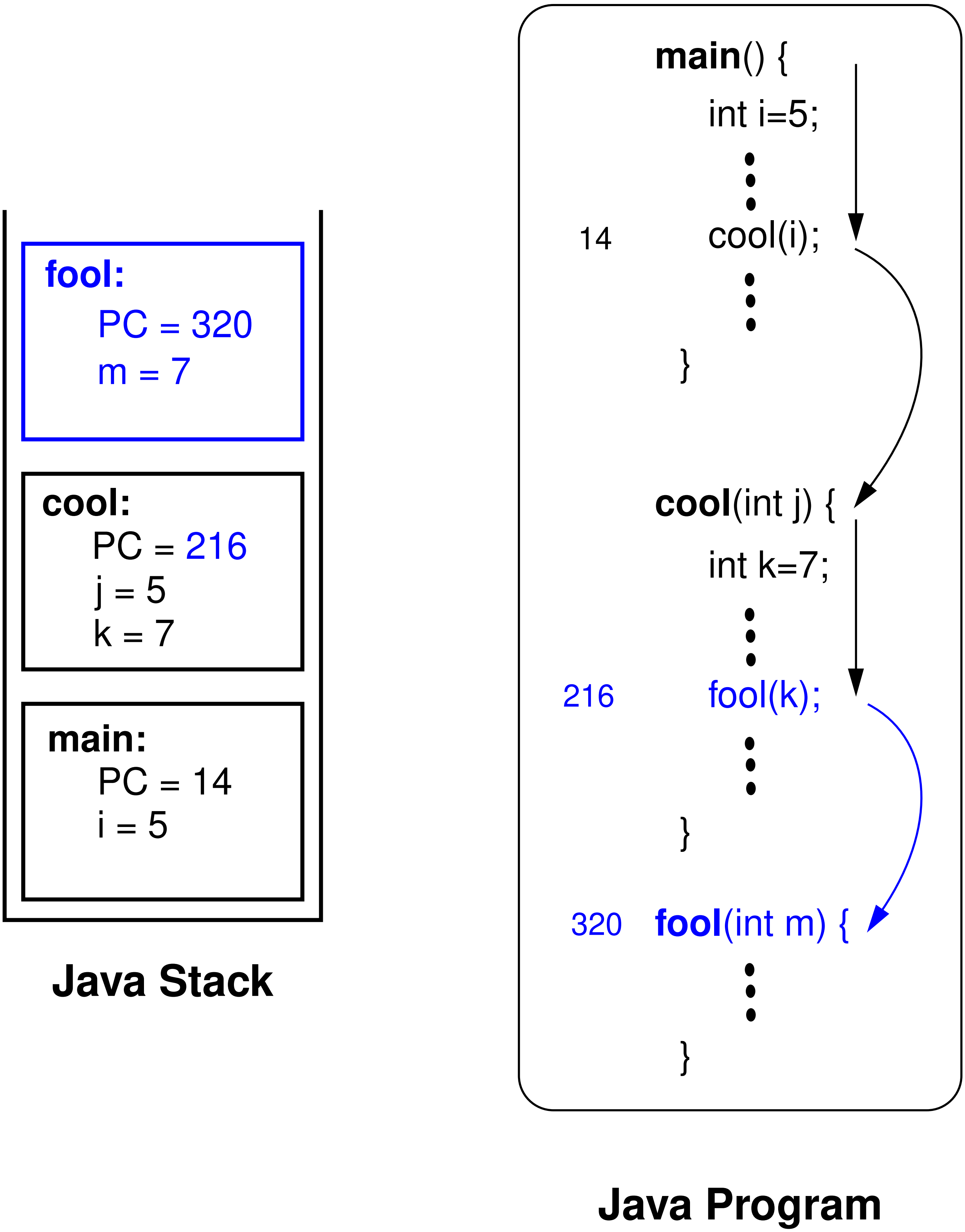
```
public static Integer[] reverse(Integer[] a) {
   ArrayStack S = new ArrayStack(a.length);
   Integer[] b = new Integer[a.length];
   for (int i = 0; i < a.length; i++)
      S.push(a[i]);
   for (int i = 0; i < a.length; i++)
      b[i] = (Integer)(S.pop()); // the popping
        // operation gave us an Object, and we
        // casted it to an Integer before
        // assigning it to b[i].
   return b;
}
```

# Stabler i Java Virtual Machine

- Hver prossess i et Java program har sin egen Java Method Stack.
- Hver gang en metode kalles, push'es informasjon om metoden (eng: frame) på stabelen.
- Ved å bruke en stabel kan Java oppnå:
  - Utføring av rekursive metodekall
  - Skriv ut stabel 'trace' for å oppdage feil
- Java har også en operand-stabel som brukes til å evaluere aritmetiske uttrykk:
- Mer om dette i kap.5. Veldig forenklet:

  Integer add(*a*, *b*):
    OperandStack Op
    Op.push(*a*)
    Op.push(*b*)
    *temp1* ← Op.pop()
    *temp2* ← Op.pop()
    Op.push(*temp1* + *temp2*)
    **return** Op.pop()

# Java Method Stack



# Rekursjon

- Metode kaller seg selv som subrutine.
- n! = 1*2*3*...*(n-1)*n (eng: n factorial)
- Defineres induktivt ved 1!=1 og n!=n*(n-1)!, n>1.

```
Algorithm fact(n);
    Input: integer n>0
    Output:n!
  if (n <= 1) return 1;
  else return n*fact(n-1);
```

- Metoden fact kaller seg selv rekursivt med ny parameterverdi n-1. Når dette rekursive kallet returnerer med (n-1)! vil denne verdien multipliseres med n og gi svaret n!.
- Metodens stabel vil inneholde n kall, fact(n)-fact(n-1)-...fact(3)-fact(2)-fact(1), og det siste kallet fact(1) vil returnere 1.
- fact(n) vil alltid terminere. Hvorfor? Kjøretid?
- Hva med

```
Algorithm hack(n);
  if (n <= 1) return 1;
  else return n*hack(n+1);
```