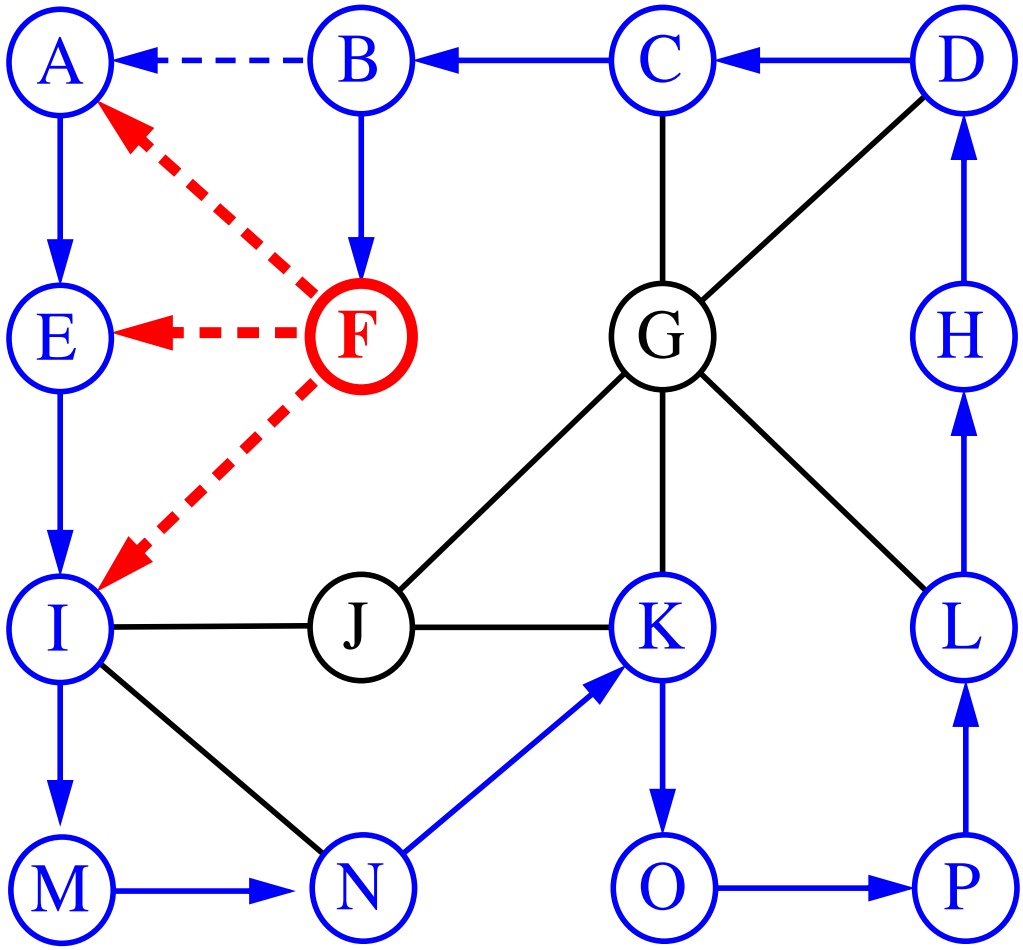
GRAF-TRAVERSERING

- Dybde-Først Søk
- Bredde-Først Søk
- Bruk av 'MetodeMal' som designmønster (Template Method Pattern

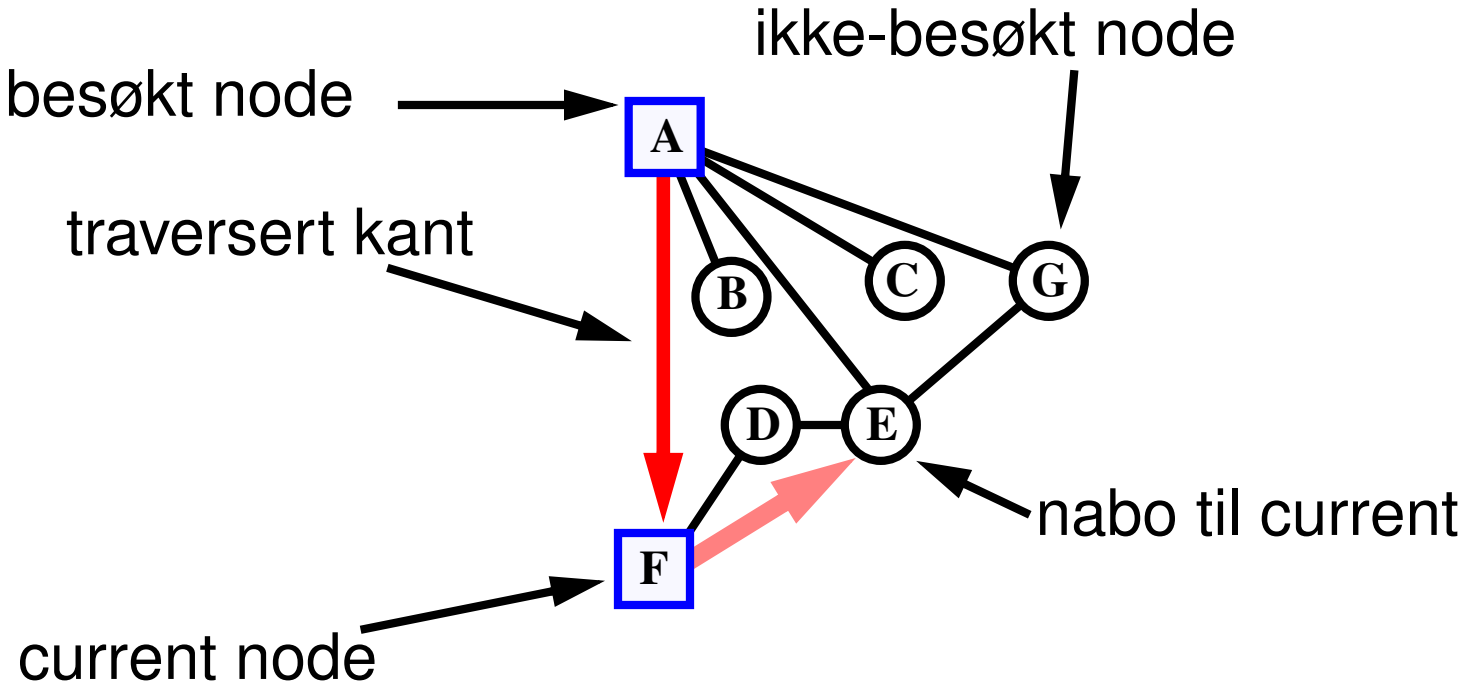


Hvordan utforske en labyrint uten å gå seg vill.

- Et **dybde-først søk (DFS)** i en urettet graf G er som å vandre gjennom en labyrint med tau og rødmaling uten å gå seg vill.
- Vi starter i node s, knytter tauet til et fast punkt og maler noden s rød. La s være current node u.
- Gå så, med tauet, langs en vilkårlig kant (u,v).
- Om (u,v) leder oss til en allerede rødmalt node v så nøst opp tauet og gå tilbake til u.
- Om v derimot ikke er rød, så maler vi den rød, setter v til å være den nye u og fortsetter som over.
- Tilslutt vil alle kanter fra u lede til rødmalte noder. Vi følger da tauet tilbake (dette er **backtracking**) og nøster tauet opp til den foregående noden i tauet. Dette er den røde noden v som tok oss hit. Denne v blir nå den nye u og vi fortsetter som over.
- Når vi backtracker helt til startnoden s og alle kanter utfra s leder til rødmalte noder, så er vår DFS-utforskning avsluttet.

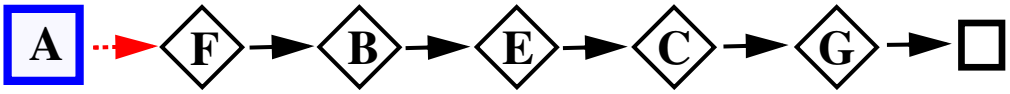
Dybde-Først Søk

Algorithm DFS(*u*);
Input: En node *u* i graf G
Output: Merking av kanter som enten "discovery"-kanter eller "tilbake"-kanter
merk u som besøkt
for hver kant *e=(u,v)* incident med node u **do**
if *v* ikke besøkt **then**
merk *e* som discovery-kant
recursivt kall til **DFS**(*v*)
else
merk *e* som tilbake-kant



Rekkefølge på kanter:

- DFS avhenger av gitt rekkefølge på kanter.
- Om vi starter i A og ser først på kanten til F, så til B, så E, C, og tilslutt G

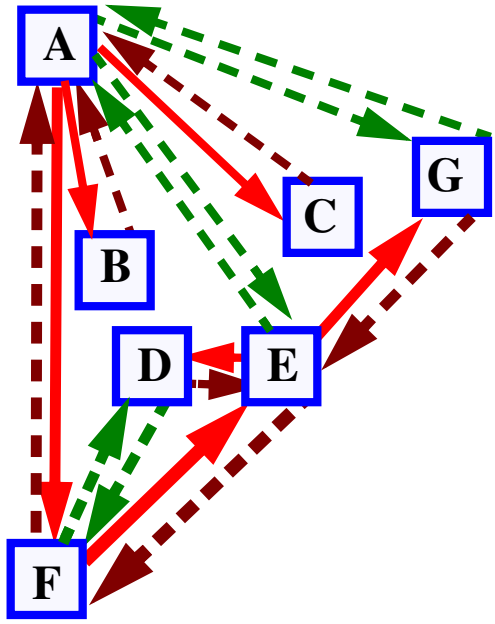


- Resultatet blir:

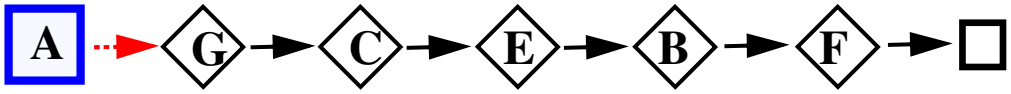
discovery-kant

tilbake-kant

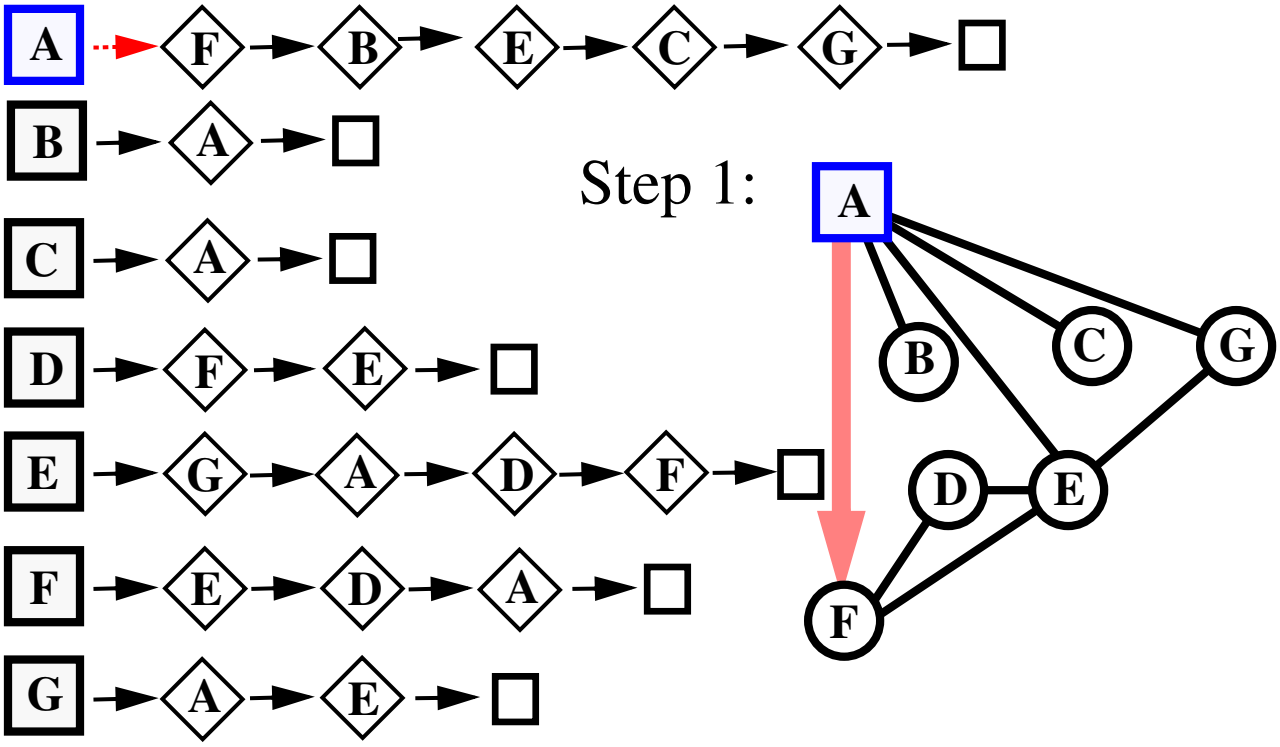
backtrack

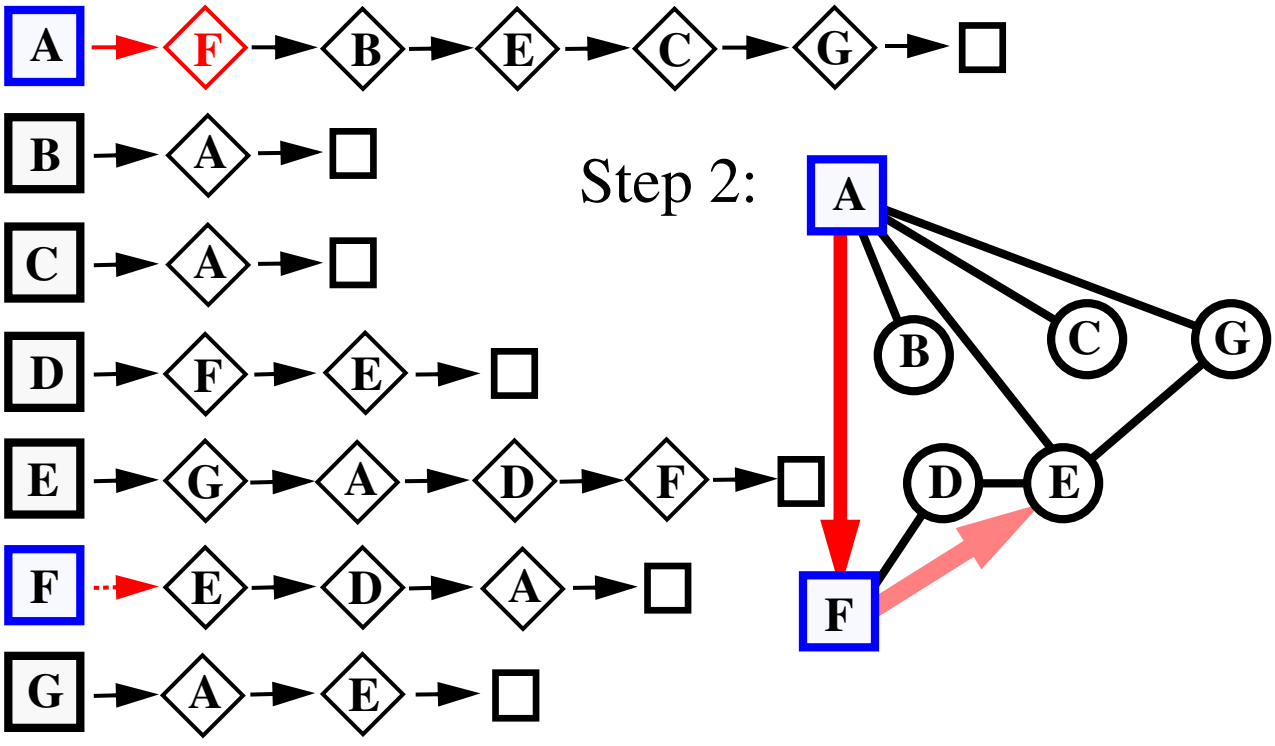


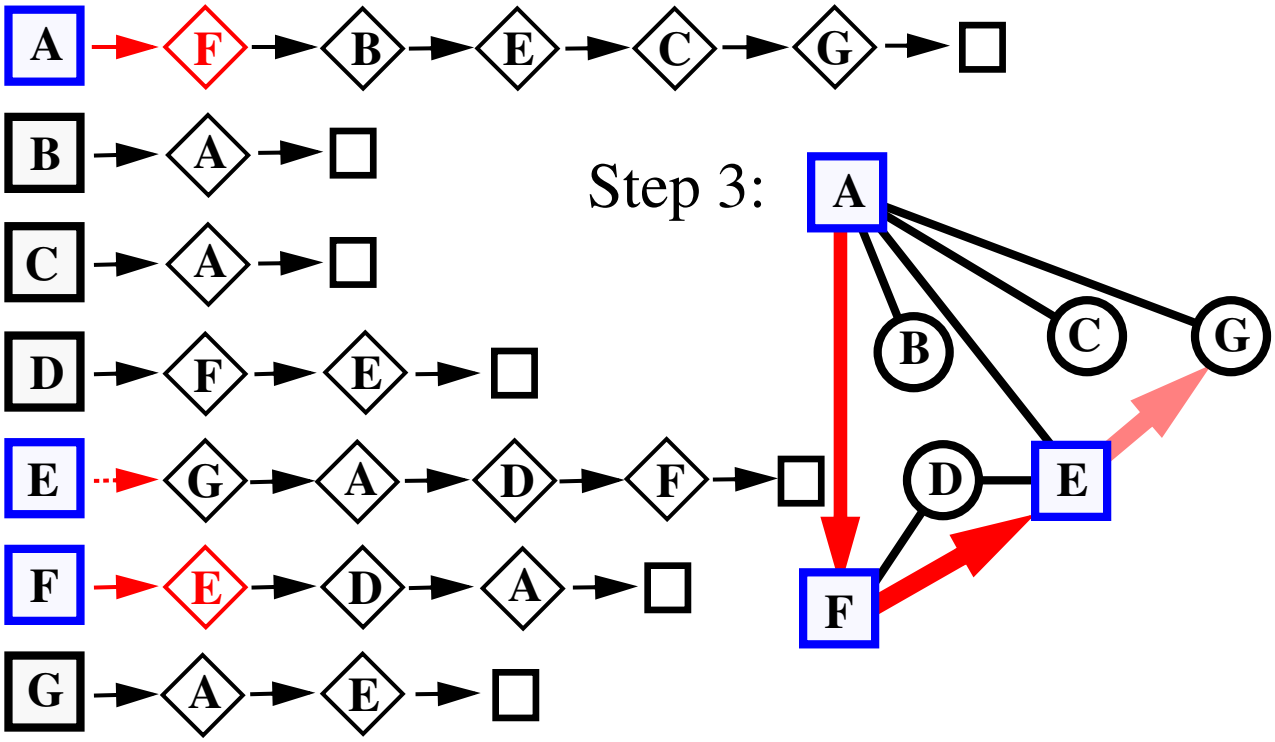
Derimot, om vi starter i A og ser først på F, som før, men deretter C, så E, B, og tilslutt F,

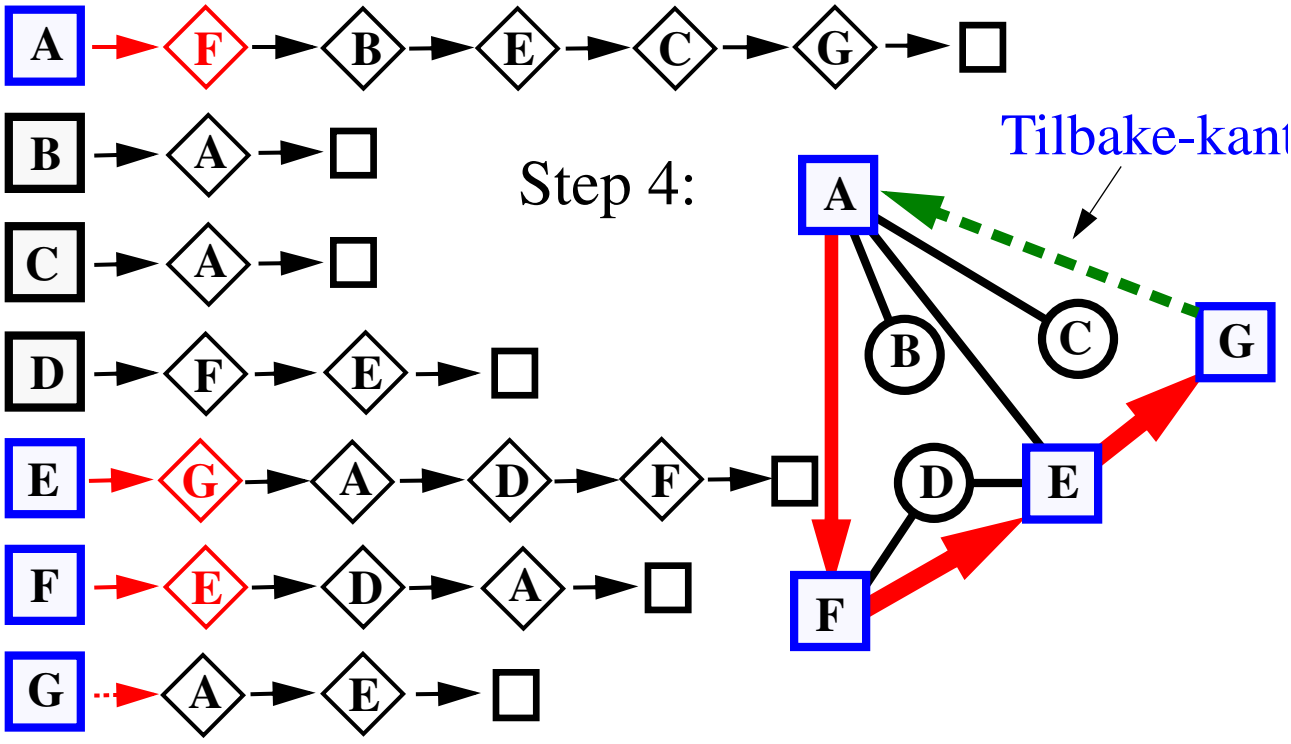


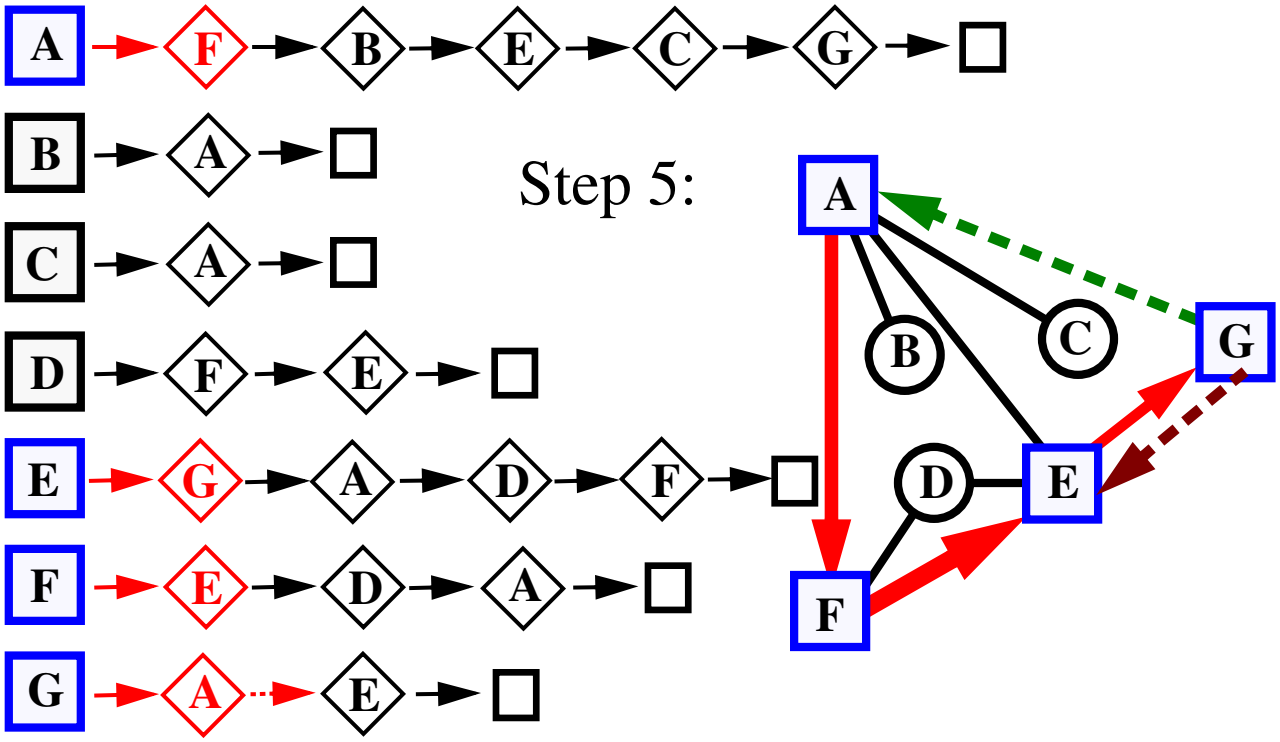
- så blir backEdges, discoveryEdges forskjellige.

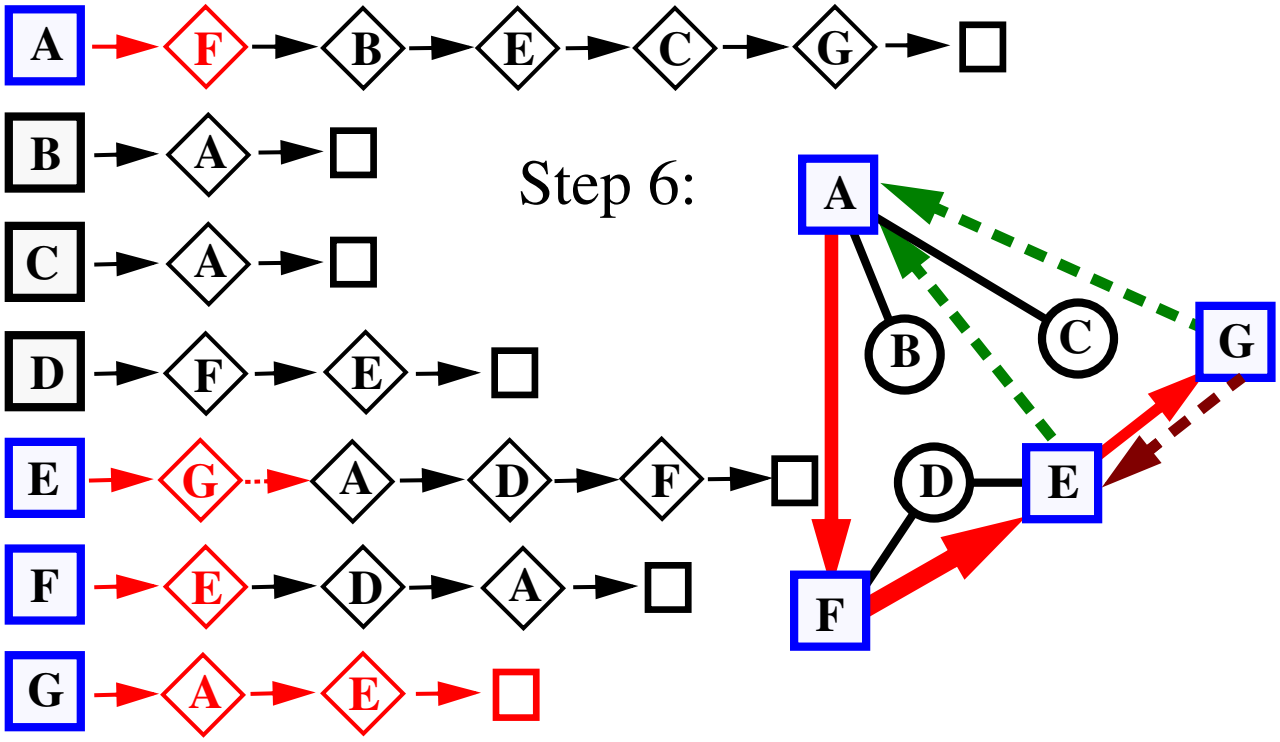

A F B E C G
B A
C A
D F E
E G A D F
F E D A
G A E
Step 1:
A
B
C
G
D
E
F

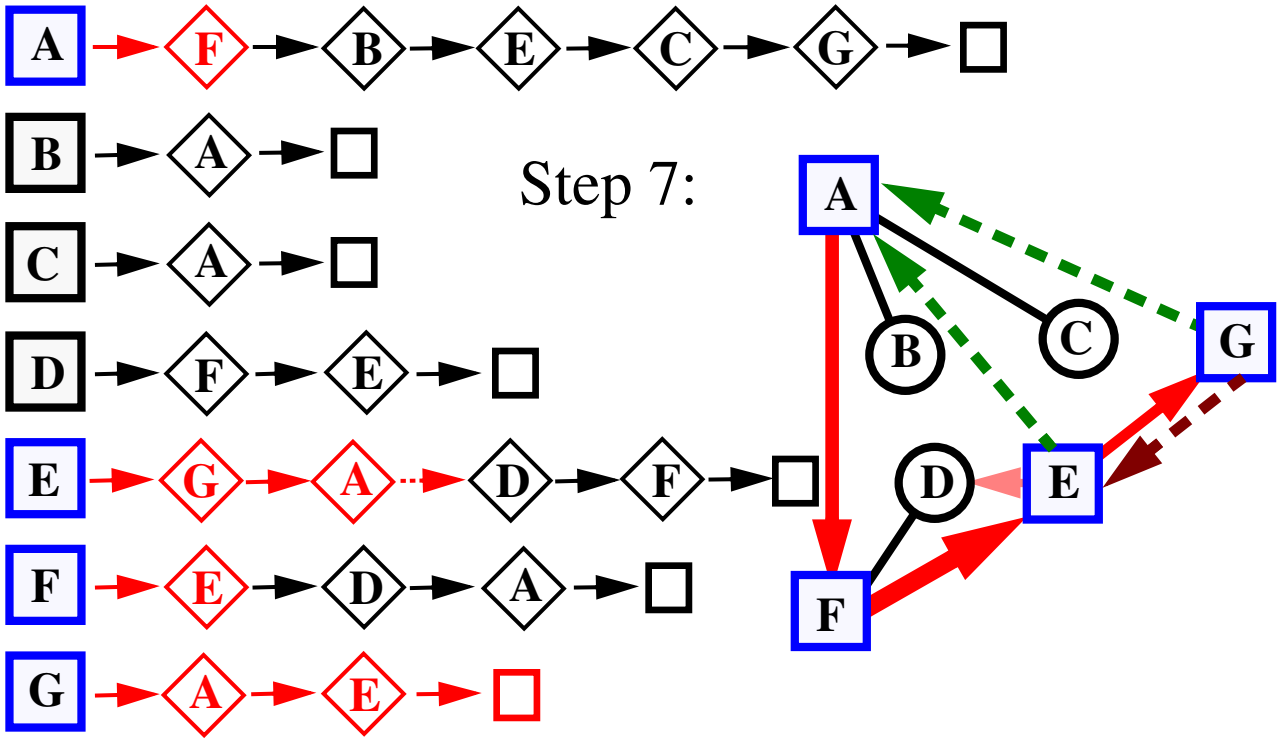

A F B E C G
B A
C A
D F E
E G A D F
F E D A
G A E
Step 2:
A
B
C
G
D
E
F

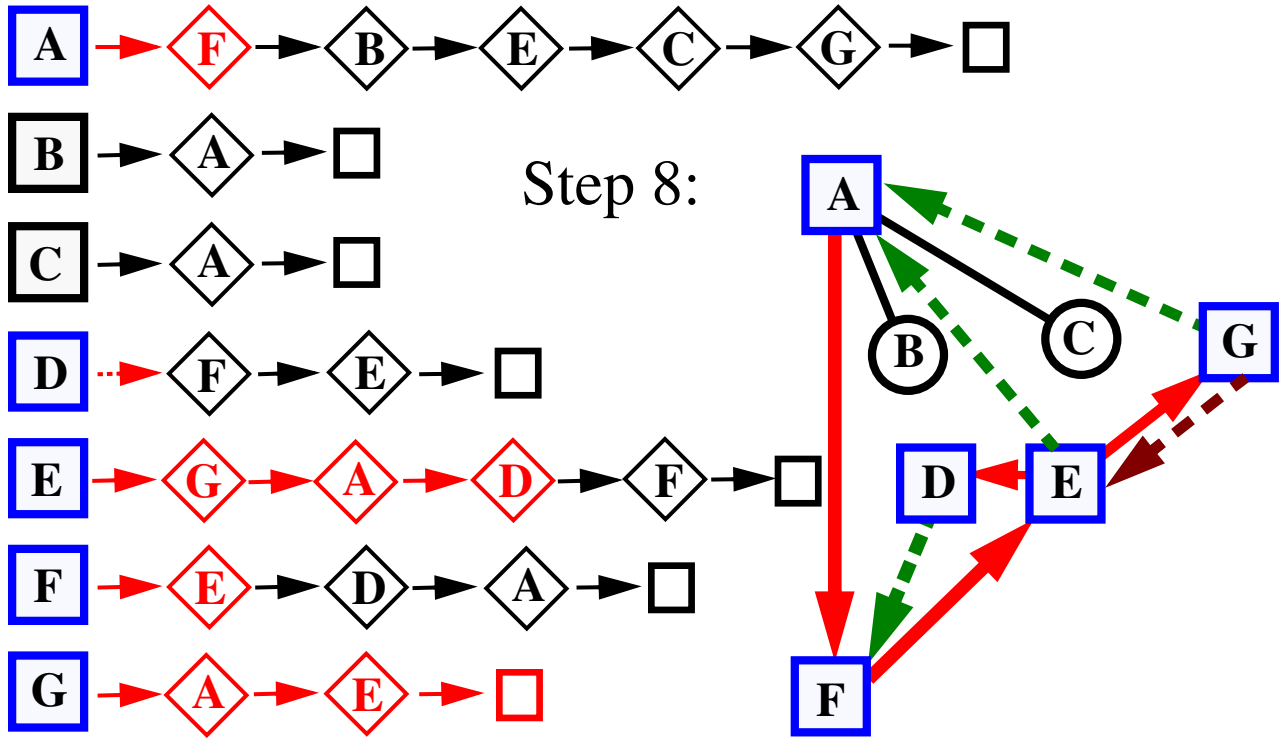

A F B E C G
B A
C A
D F E
E G A D F
F E D A
G A E
Step 3:
A
B
C
G
D
E
F

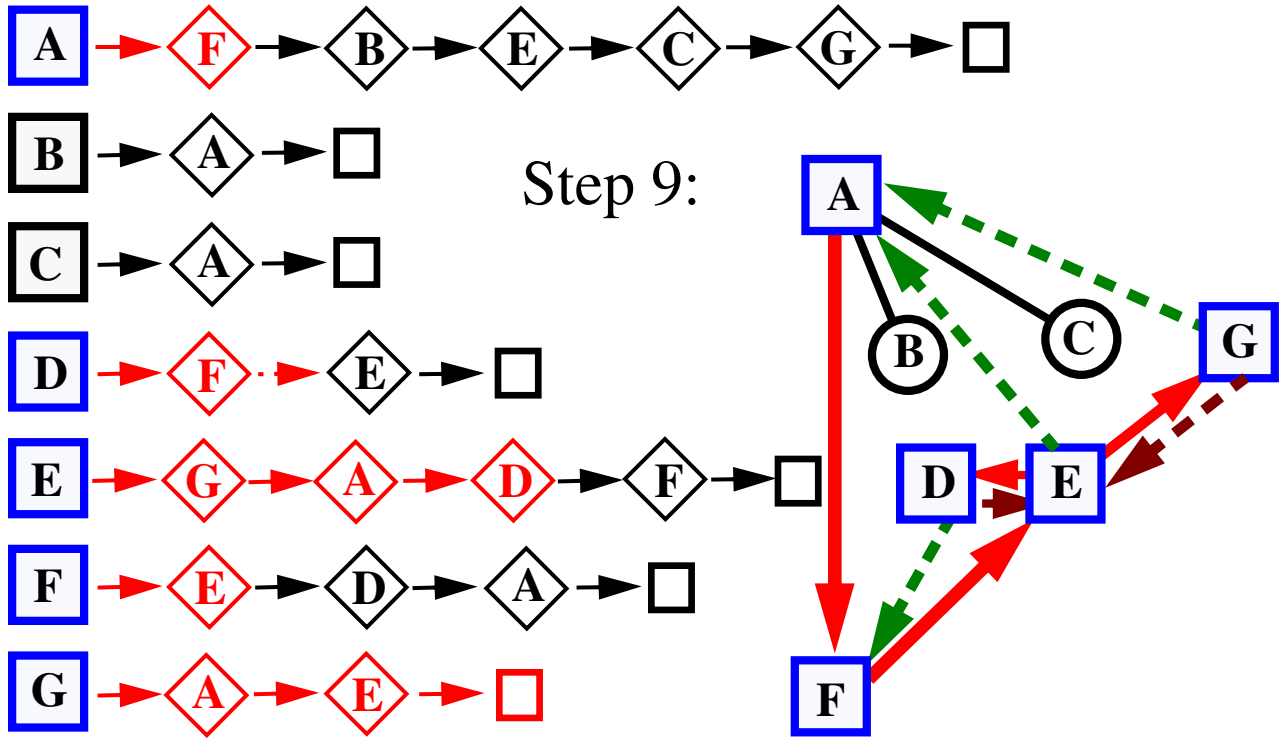

A F B E C G
B A
C A
D F E
E G A D F
F E D A
G A E
Step 4:
Tilbake-kant
A
B
C
G
D
E
F

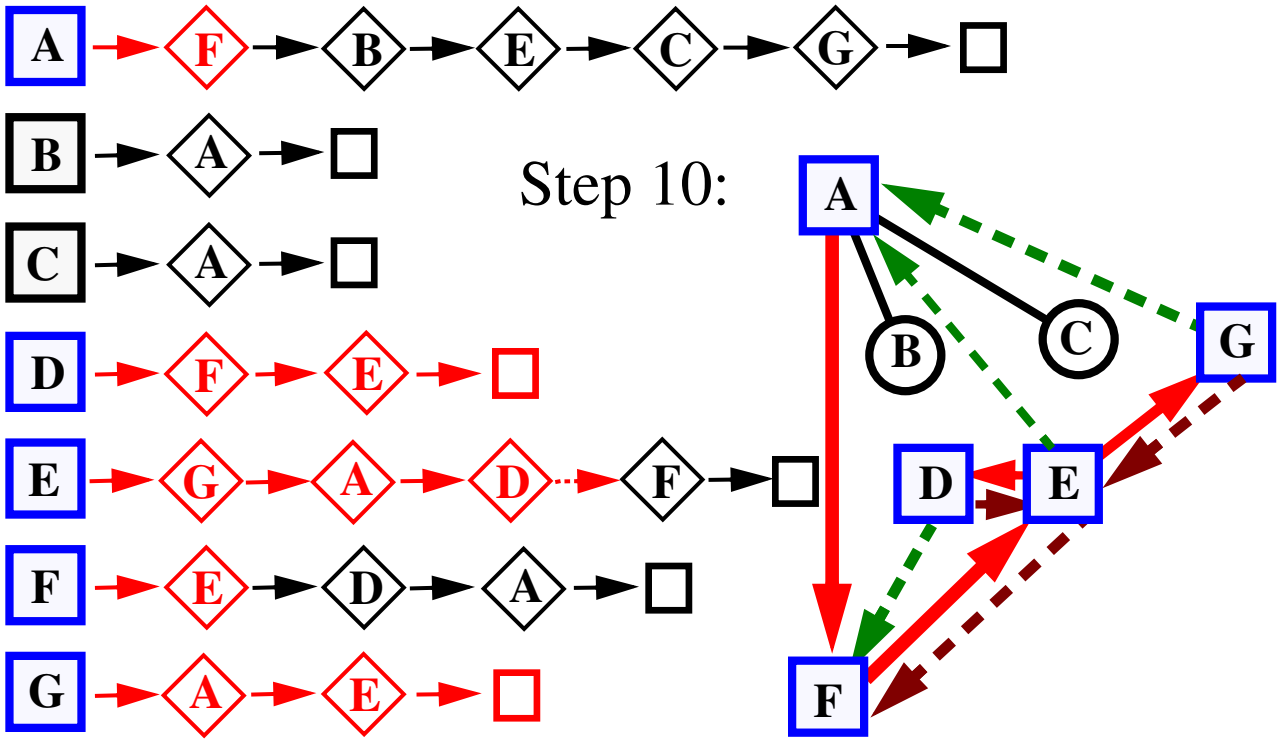

A F B E C G
B A
C A
D F E
E G A D F
F E D A
G A E
Step 5:
A
B
C
G
D
E
F

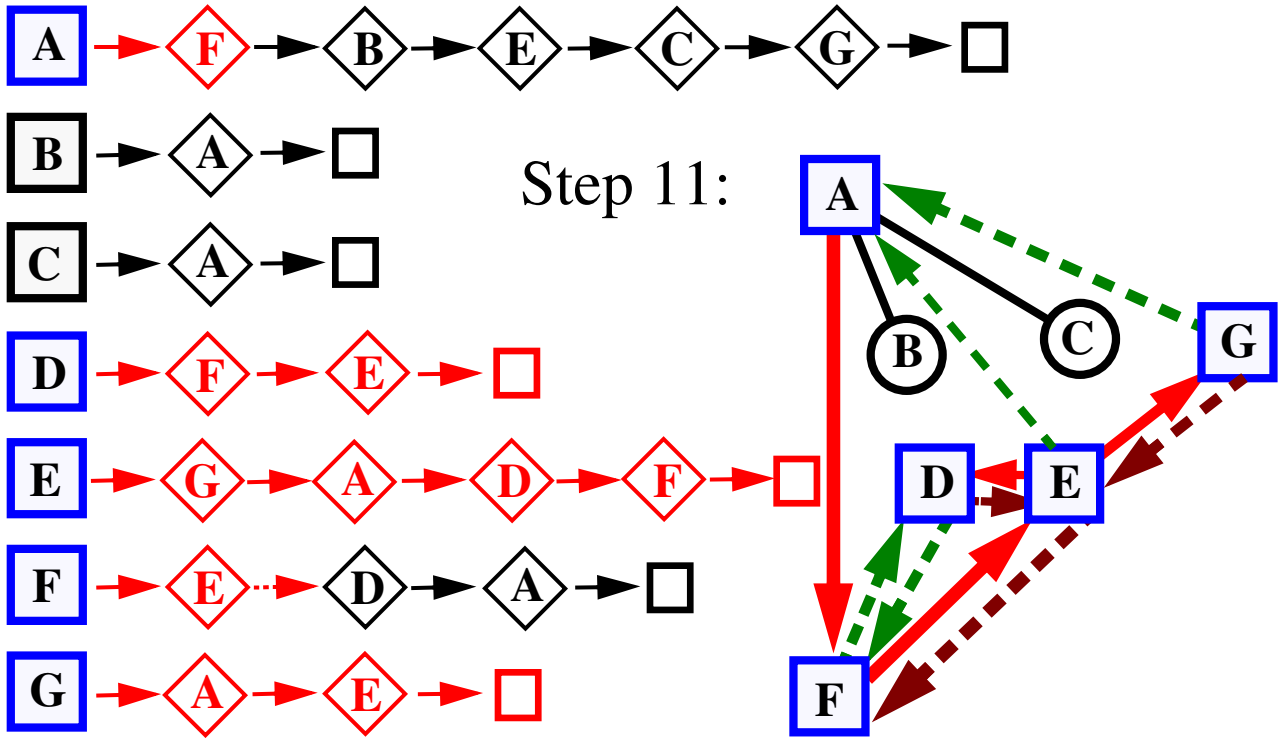

A F B E C G
B A
C A
D F E
E G A D F
F E D A
G A E
Step 6:
A
B
C
G
D
E
F

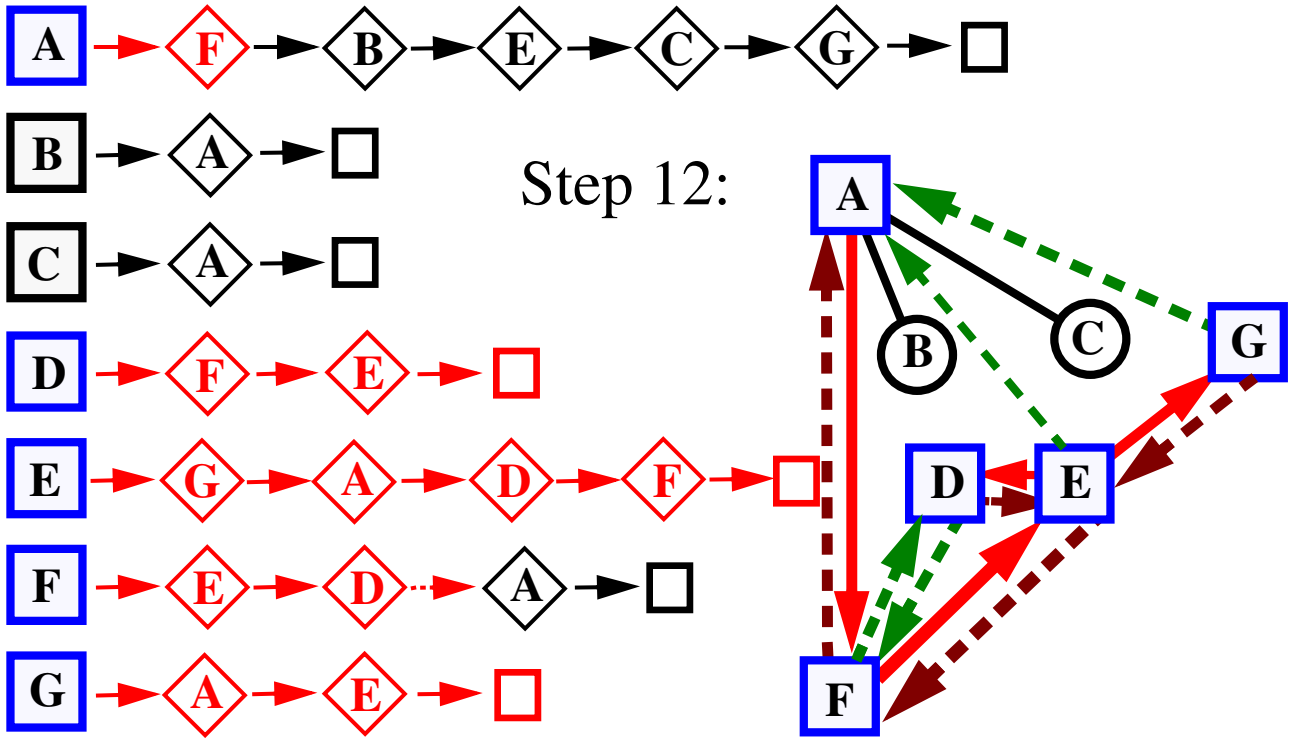

A F B E C G
B A
C A
D F E
E G A D F
F E D A
G A E
Step 7:
A
B
C
G
D
E
F

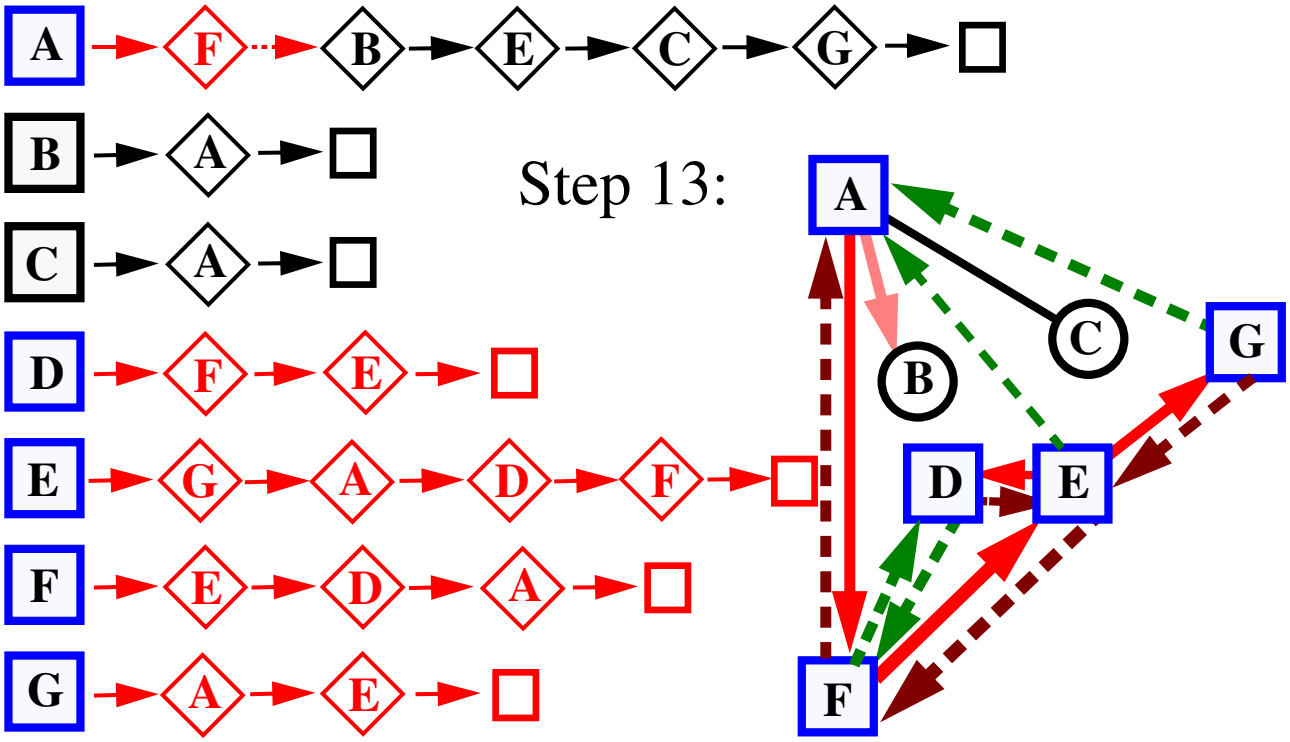

A F B E C G
B A
C A
D F E
E G A D F
F E D A
G A E
Step 8:
A
B
C
G
D
E
F

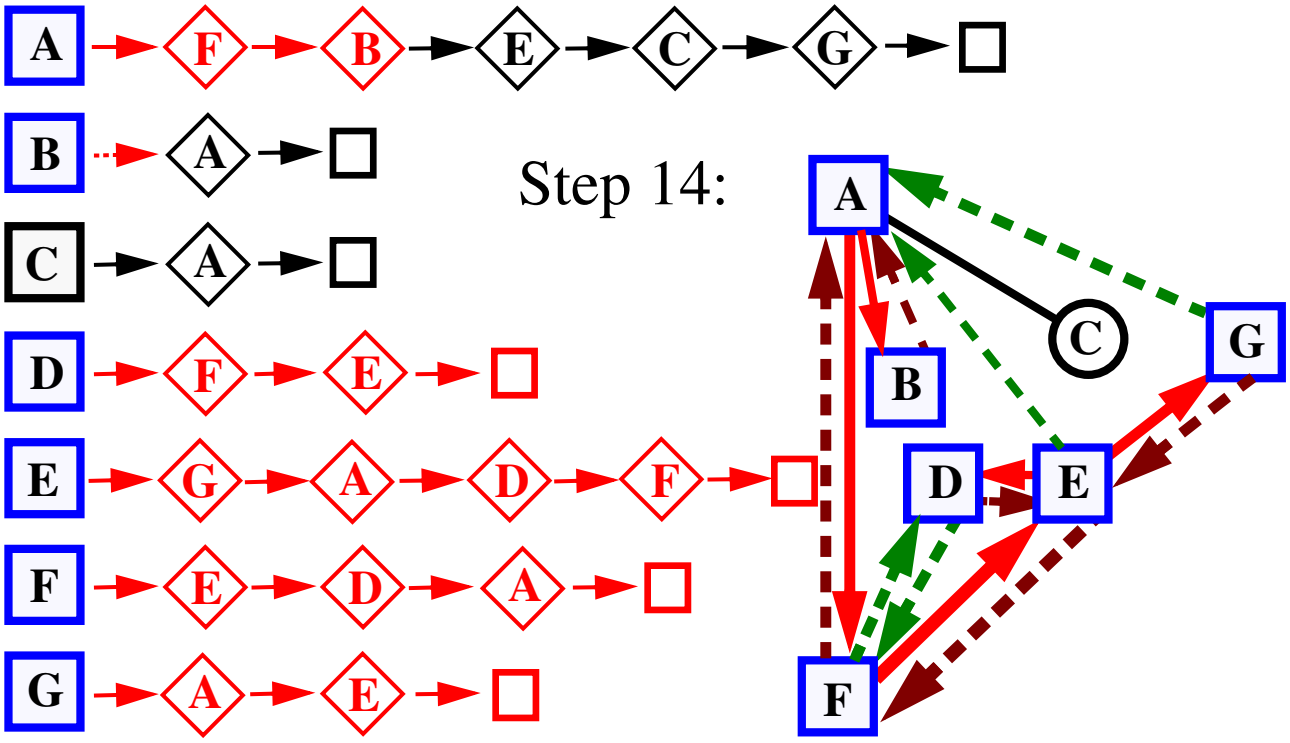

A F B E C G
B A
C A
D F E
E G A D F
F E D A
G A E
Step 9:
A
B
C
G
D
E
F

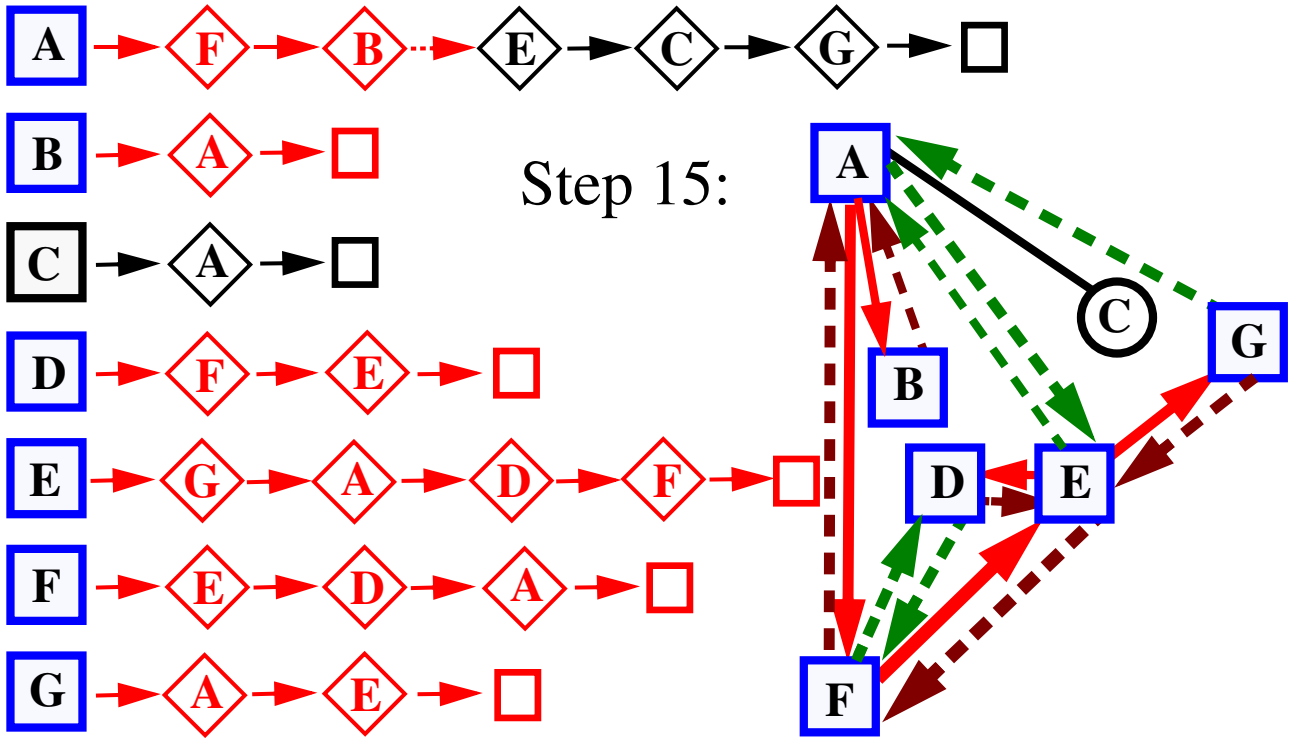

A F B E C G
B A
C A
D F E
E G A D F
F E D A
G A E
Step 10:
A
B
C
G
D
E
F

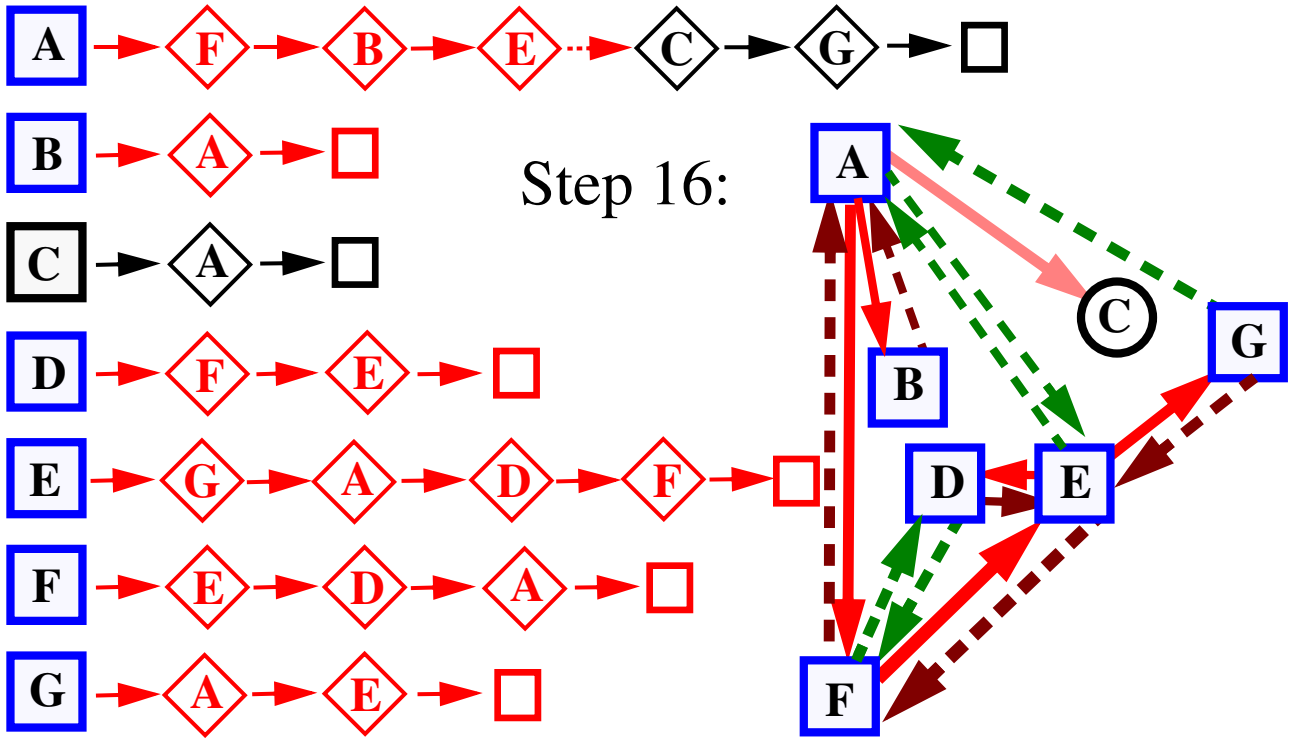

A F B E C G
B A
C A
D F E
E G A D F
F E D A
G A E
Step 11:
A
B
C
G
D
E
F

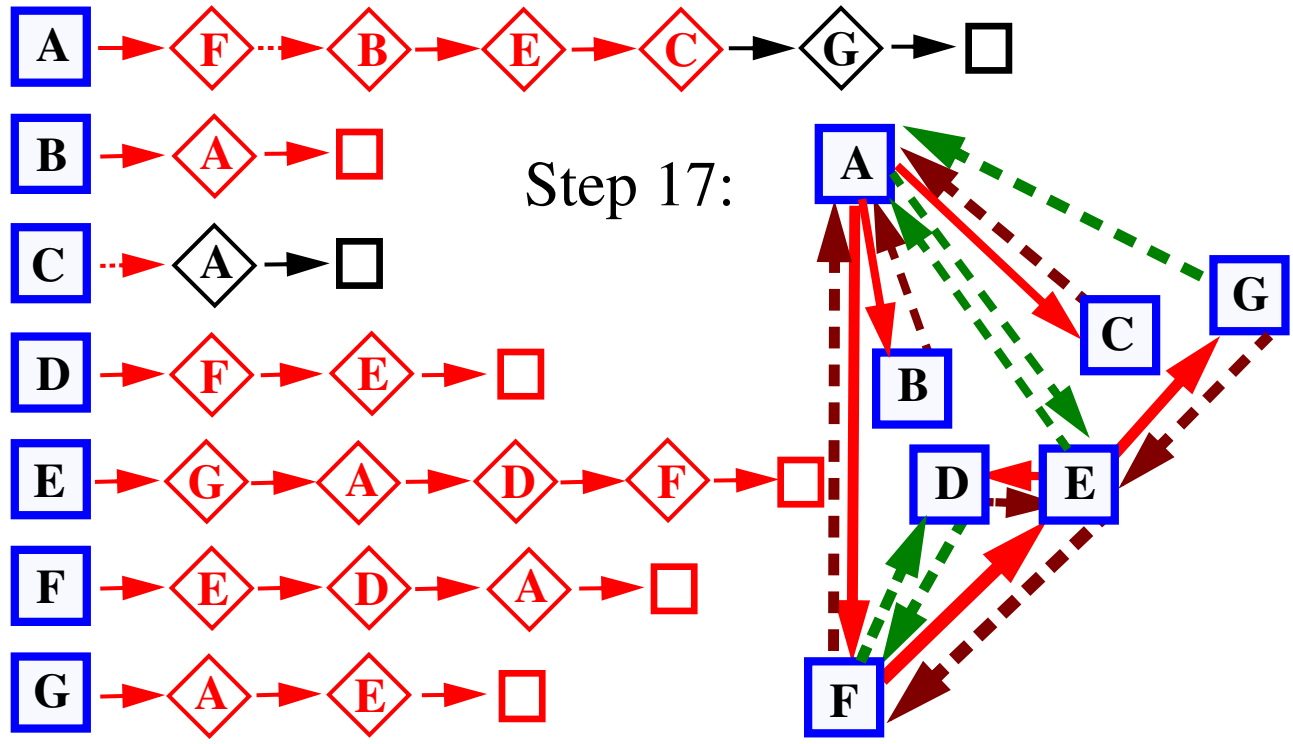

A F B E C G
B A
C A
D F E
E G A D F
F E D A
G A E
Step 12:
A
B
C
G
D
E
F

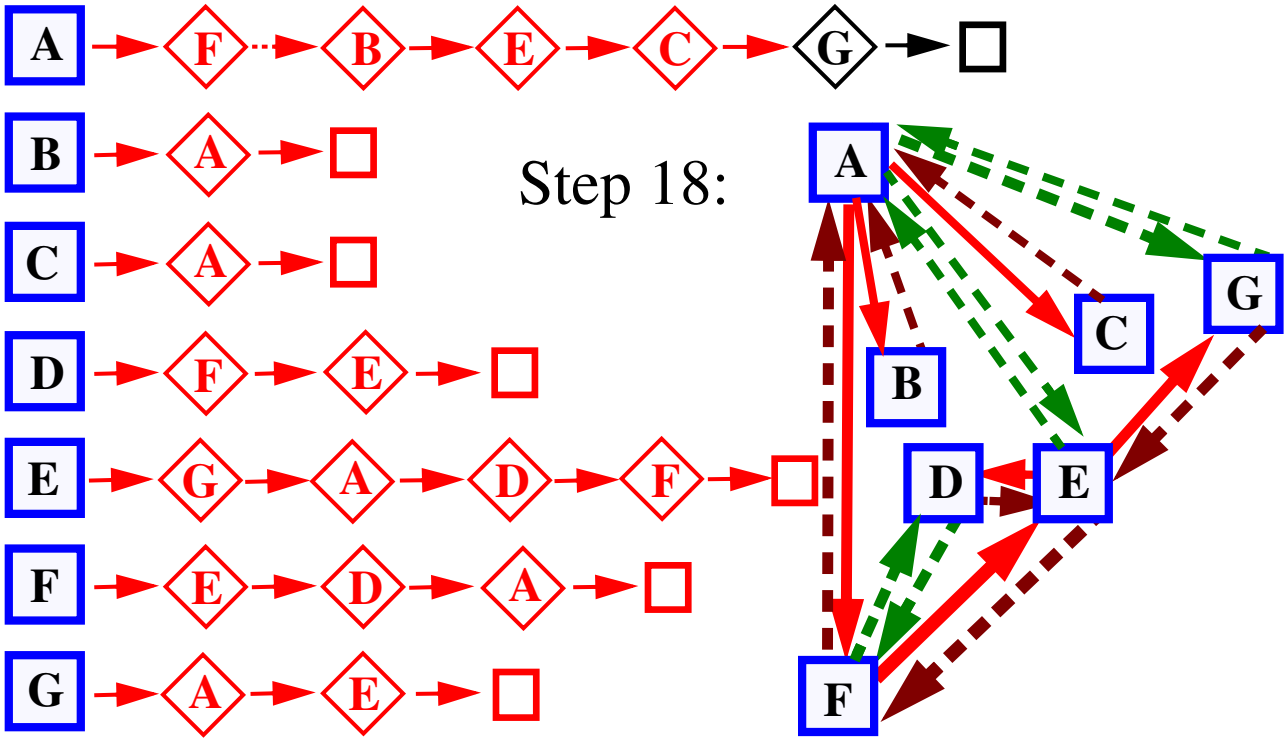

A
F
B
E
C
G
B
A
C
A
D
F
E
E
G
A
D
F
F
E
D
A
G
A
E
Step 13:
A
B
C
G
D
E
F

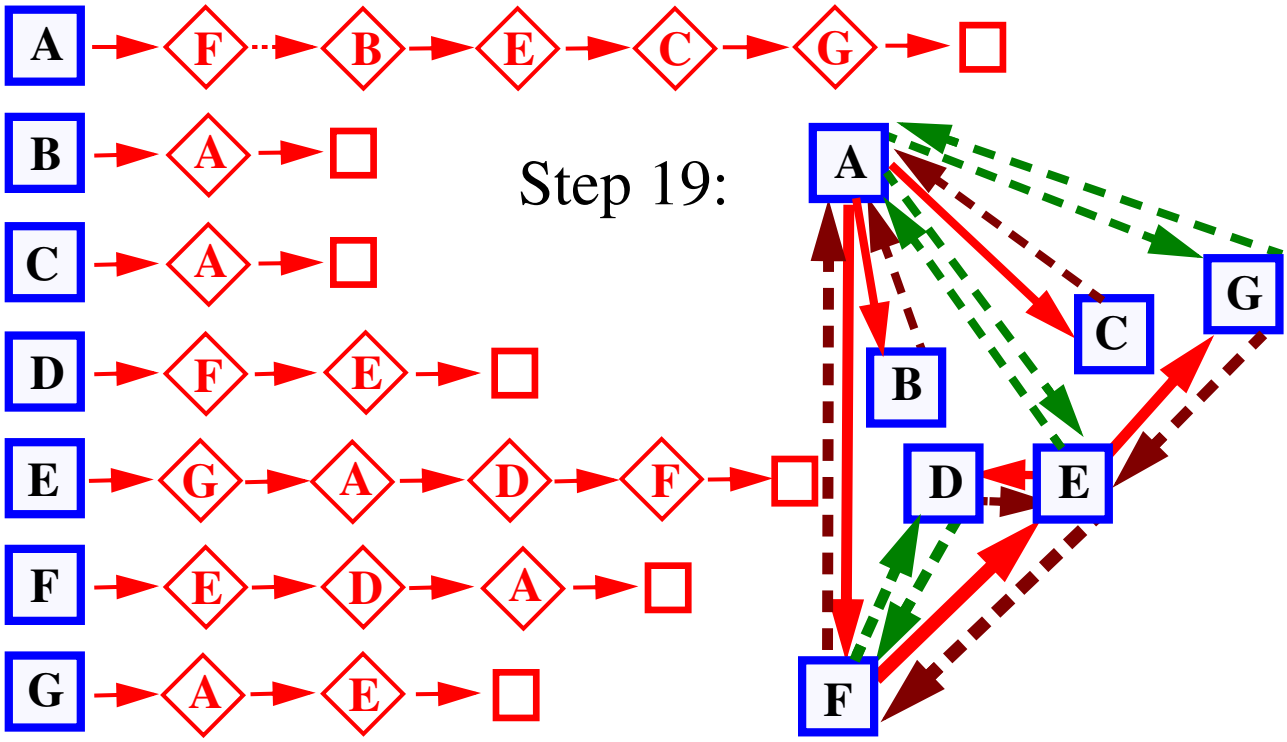

A
F
B
E
C
G
B
A
C
A
D
F
E
E
G
A
D
F
F
E
D
A
G
A
E
Step 14:
A
C
G
B
D
E
F


A F B E C G
B A
C A
D F E
E G A D F
F E D A
G A E
Step 15:
A
B
C
D
E
F
G


A F B E C G
B A
C A
D F E
E G A D F
F E D A
G A E
Step 16:
A
B
C
D
E
F
G


A
F
B
E
C
G
B
A
C
A
D
F
E
E
G
A
D
F
F
E
D
A
G
A
E
Step 17:
A
B
C
G
D
E
F


A
F
B
E
C
G
B
A
C
A
D
F
E
E
G
A
D
F
F
E
D
A
G
A
E
Step 18:
A
B
C
G
D
E
F



Presto!

DFS-Egenskaper

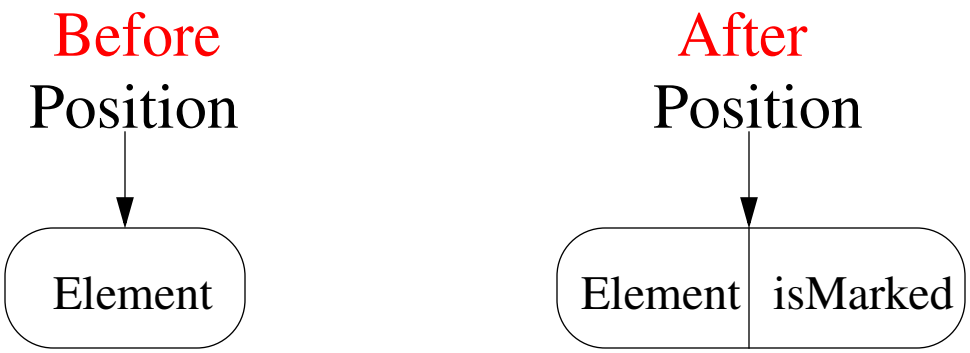
- Proposisjon 9.12 i læreboka: 'La G være urettet graf hvor vi kjører DFS med startnode *s*. Da har vi at
  - 1) alle noder i den sammenhengende komponent til *s* ble besøkt under DFS, og
  - 2) discovery-kantene utgjør et utspennende tre i den sammenhengende komponenten til *s'*
- Bevis for 1):
  - Bevis ved motsigelse. Anta en node w ikke ble besøkt. Det finnes en sti fra s til w. La v være første node på denne stien som ikke ble besøkt (kan f.eks ha v=w). Dvs noden foran v på stien, kall denne u, ble faktisk besøkt. Når vi besøkte u må vi ha sett på kanten (u, v), og da ville vi ha besøkt v. Dette motsier antagelsen.
- Bevis for 2):
  - Vi merker en kant (u,v) som 'discovery' kun når den går fra besøkt node u til ikke-besøkt node v. Dvs vi skaper ingen sykel av discovery-kanter. Siden alle noder tilslutt er besøkt må disse kantene utgjøre et utspennende tre.

Kjøretids-Analyse: med riktig graf-representasjon er DFS en lineær-tids algoritme.

- Husk:
  - DFS blir kallt rekursivt for hver node nøyaktig en gang.
  - Hver kant e=(u,v) utforskes to ganger, når vi går gjennom naboene til u og når vi går gjennom naboene til v.
  - Anta komponenten til startnoden s har n_s noder og m_s kanter. DFS fra *s* tar da O(n_s +m_s) tid om:
  - Datastruktur som brukes for grafen gir konstant-tid O(1) metoder for å aksessere hver nabo,
  - Merking av noder og kanter og sjekking av denne merking tar O(1) tid,
  - Siden vi merker noder, kan vi raskt oppdage om en kant leder til ikke-besøkt node.

Merking av noder

- Hvordan merke noder?.
- Utvid node-posisjoner med en boolsk variabel T=Merket og F=Ikke-merket



- Bruk hash-tabell (mer om dette senere i kurset)

Bruk av MetodeMal : The Template Method Pattern

- **MetodeMal** er et programmeringsdesignmønster som bruker en ***generisk algoritme*** som mal for flere spesialiseringer til bestemte applikasjoner.
- Vi designer en 'abstract class MalX' som
  - implementerer kun ***skjelettet*** til en algoritme
  - den klassen bruker flere 'abstract method's
  - disse metodene gies en implementasjon i en konkret 'class SpesialX extends MalX'.
- Dette forenkler gjenbruk av kode på en ryddig og fornuftig måte.
- Eksempler
  - ***generisk traversering av binært tre*** (som preorden, inorden, og postorden) og applikasjoner av dette
  - ***generisk dybde-først søk i en urettet graf*** og applikasjoner av dette

Generisk DFS

```
public abstract class DFSMAL {
protected InspectableGraph graph;
protected Object visitResult;
protected Object dfsVisit(Vertex v) {
initResult();
    startVisit(v);
    mark(v);
    for (Enumeration inEdges = graph.incidentEdges(v);
          inEdges.hasMoreElements();) {
      Edge nextEdge = (Edge) inEdges.nextElement();
      if (!isMarked(nextEdge)) { // found an unexplored edge
        mark(nextEdge);
        Vertex w = graph.opposite(v, nextEdge);
        if (!isMarked(w)) { // discovery edge
          mark(nextEdge);
          traverseDiscovery(nextEdge, v);
          if (!isDone())
            visitResult = dfsVisit(w); }
        else  // back edge
          traverseBack(nextEdge, v);
      }
    }
    finishVisit(v);
    return result();
  }
```

Støttemetoder for generisk DFS

```
public abstract Object execute (InspectableGraph g,
Vertex start, Object info);

protected abstract void initResult();

protected abstract void startVisit(Vertex v);

 protected abstract void traverseDiscovery(Edge e,
Vertex from);

protected abstract void traverseBack(Edge e, Vertex
from);

protected abstract boolean isDone();

protected abstract void finishVisit(Vertex v);

protected Object result() { return new Object(); }
```

1.Spesialisering av generisk DFS

- class FindPath spesialiserer DFSMAL til å finne en sti fra noden start til noden target.
  public class FindPathDFS extends DFSMAL {

```
  protected Sequence path;
  protected boolean done;
  protected Vertex target;
  public Object execute(InspectableGraph g, Vertex start,
                                    Object info) {
    super.execute(g, start, info);
    path = new NodeSequence();
    done = false;
    target = (Vertex) info;
    dfsVisit(start);
    return path.elements();
  }
  protected void startVisit(Vertex v) {
    path.insertFirst(v);
    if (v == target) { done = true; }
  }
  protected void finishVisit(Vertex v) {
    if (!done) path.remove(path.first());
  }
  protected boolean isDone() { return done; }
}
```

2.Spesialisering av generisk DFS

- FindAllVertices spesialiserer DFSMAL til å returnere en enumeration av alle noder i sammenhengende komponent til start -noden.

```
public class FindAllVerticesDFS extends DFSMAL {
   protected Sequence vertices;
   public Object execute(InspectableGraph g, Vertex start,
                         Object info) {
      super.execute(g, start, info);
      vertices = new NodeSequence();
      dfsVisit(start);
      return vertices.elements();
   }

   public void startVisit(Vertex v) {
      vertices.insertLast(v);
   }
}
```

3.Spesialisering av generisk DFS

- ConnectivityTest bruker en spesialisert DFS for å teste om en graf er sammenhengende.

```
public class ConnectivityTest {
   protected static DFS tester = new
FindAllVerticesDFS();
   public static boolean isConnected(InspectableGraph g)
   {
      if (g.numVertices() == 0) return true; //empty is
                                              //connected
      Vertex start = (Vertex)g.vertices().nextElement();
      Enumeration compVerts =
                  (Enumeration)tester.execute(g, start, null);
      // count how many elements are in the enumeration
      int count = 0;
      while (compVerts.hasMoreElements()) {
         compVerts.nextElement();
         count++;
      }
      if (count == g.numVertices()) return true;
      return false;
   }
}
```

4.Spesialisering av generisk DFS

- FindCycle spesialiserer DFSMAL til å avgjøre om det finnes en sykel i sammenhengende komponent til start -noden.

```
public class FindCycleDFS extends DFSMAL {
   protected Sequence path;
   protected boolean done;
   protected Vertex cycleStart;
   public Object execute(InspectableGraph g, Vertex start,
                         Object info) {
      super.execute(g, start, info);
      path = new NodeSequence();
      done = false;
      dfsVisit(start);
      //copy the vertices up to cycleStart from the path to
      //the cycle sequence.
      Sequence theCycle = new NodeSequence();
      Enumeration pathVerts = path.elements();
```

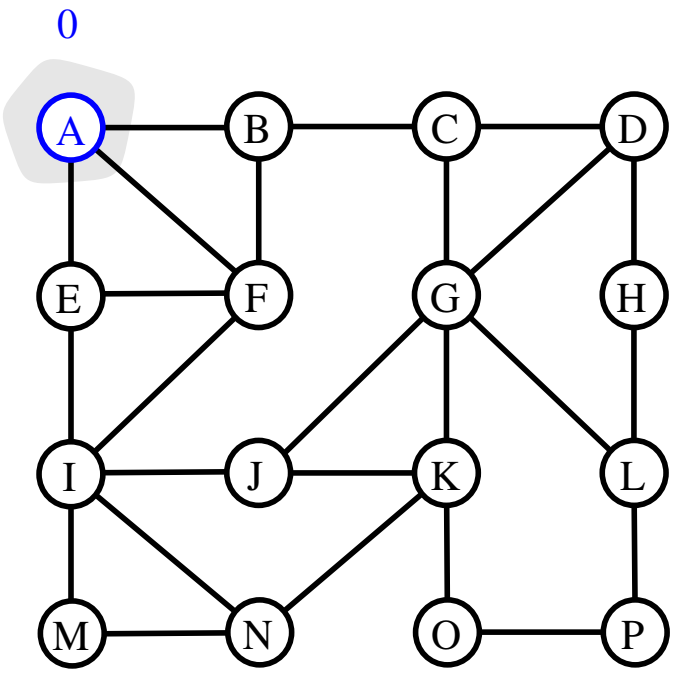
```
        while (pathVerts.hasMoreElements()) {
            Vertex v = (Vertex)pathVerts.nextElement();
            theCycle.insertFirst(v);
            if ( v == cycleStart) {
                break;
            }
        }
        return theCycle.elements();
    }
    protected void startVisit(Vertex v) {path.insertFirst(v);}
    protected void finishVisit(Vertex v) {
        if (done) {path.remove(path.first());}
    }
    //When a back edge is found, the graph has a cycle
    protected void traverseBack(Edge e, Vertex from) {
        Enumeration pathVerts = path.elements();
        cycleStart = graph.opposite(from, e);
        done = true;
    }
    protected boolean isDone() {return done;}
}
```

Bredde-Først Søk

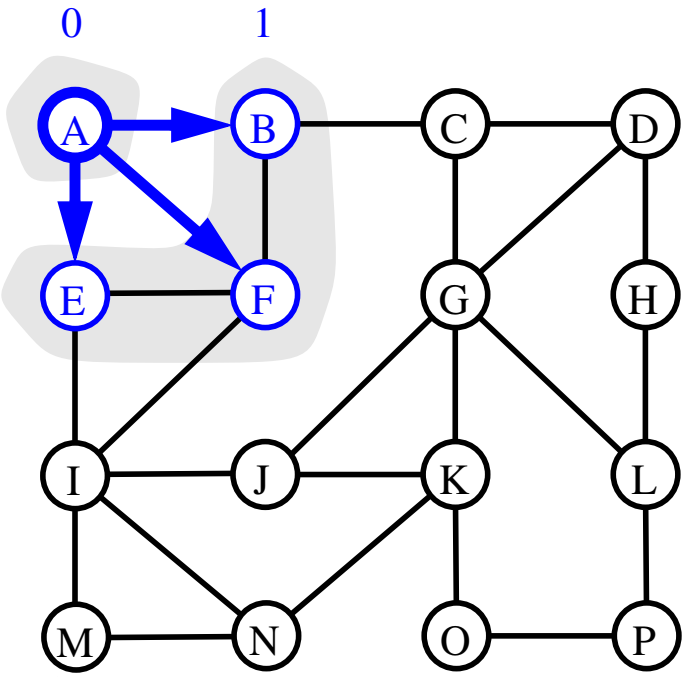
- Et Bredde-Først Søk (BFS) traverserer også den sammhengende komponent, og definerer også et utspennende tre hvor nodene legges i nivåer:
  - Startnoden *s* har nivå 0,
  - I første runde besøker vi alle noder som kan nåes på en sti av lengde 1 fra startnoden (dvs de er naboer til startnoden), og alle disse nodene ligger på nivå 1
  - I andre runde besøker vi alle noder som kan nåes på en sti av lengde 2 fra startnoden (dvs disse er naboer av noder på nivå 1), og alle disse nodene ligger på nivå 2.
  - Osv inntill alle noder blir tildelt et nivå som vil tilsvare antall kanter på korteste sti fra startnode til noden.

BFS - eksempel

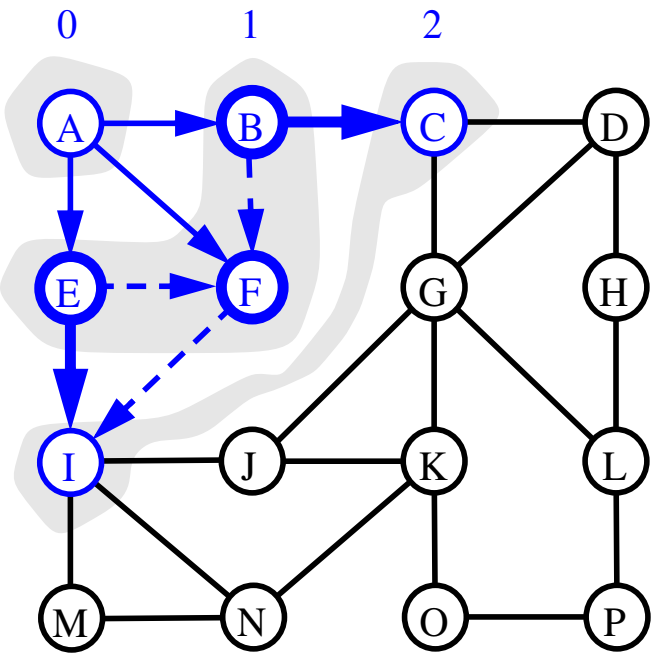
a)



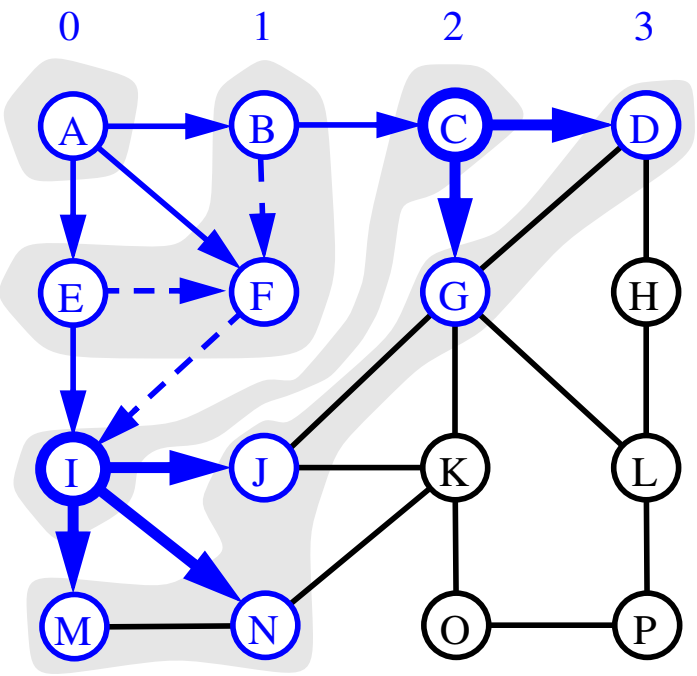
b)



c)

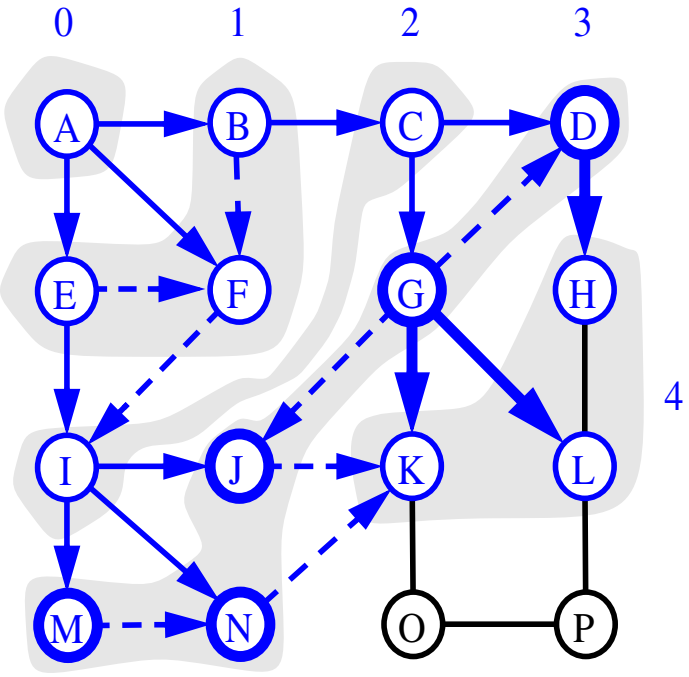


d)

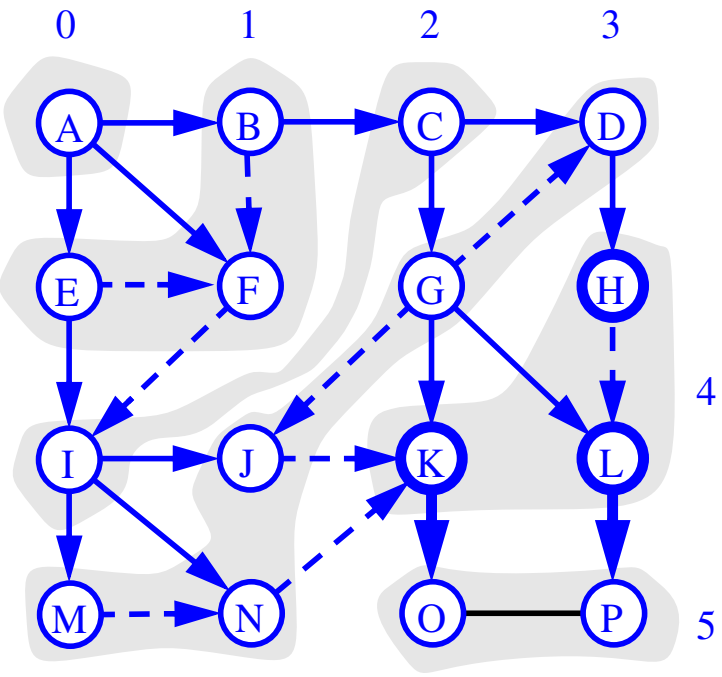


BFS

e)



f)



BFS Pseudokode

```
Algorithm BFS(s):
  Input: En node s i en graf
  Output: Merking av kanter som "discovery"-kanter
    eller "kryss"-kanter
  container L_0 = {s}
  i ← 0
  while L_i ikke-tom do
    ny tom container L_{i+1}
    for hver node u i L_i do
      for hver kant e=(u,v) incident med u do
        if node v ikke-besøkt then
          merk e som discovery-kant
          settinn w i L_{i+1}
        else
          merk e som kryss-kant
  i ← i + 1
```

BFS-Egenskaper

- Proposisjon: La G være en urettet graf hvor vi kjører BFS med startnode *s*. Da får vi at
  - BFS besøker alle noder i den sammenhengende komponent til *s*.
  - discovery-kantene utgjør et utspennende tre *T*, som vi kaller BFS -treet.
  - For hver node *v* på nivå *i* i treet, så er det i kanter på den korteste sti fra s til denne noden.
  - If (*u*, *v*) ikke er i BFS treet, så er forskjellen på nivåene til *u* og *v* max 1.
- Proposisjon: La *G* være graf med *n* noder og *m* kanter. En BFS traversering av G tar tid O($n + m$). Spesilaiseringer av BFS gir O($n + m$) tidsalgoritmer for:
  - Teste om G sammenhengende.
  - Finne utspennende tre til *G*
  - Finne alle sammenhengende komponenter til *G*
  - Finne, for hver node *v* i *G*, det minste antall kanter på en sti mellom *s* og *v*.