Rettede og Vektede Grafer

I. GRAFTERMINOLOGI

II. GRAF ADT OG IMPLEMENTASJON

III. GRAF TRAVERSERING: DFS OG BFS

IV. RETTEDE GRAFER (DIGRAPHS)

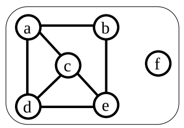
- **terminologi**
- **ADT og implementasjoner**
- **DFS/BFS av DIGRAPH**
- **transitiv tillukning**
- **DAG og topologisk sortering**

V. KORTESTE STI (SSSP) I VEKTEDE GRAFER

Ford-Bellman algoritme
Dijkstra's SSSP (Single Source Shortest Path) algoritme

Kap. 9 (kursorisk 9.4.5)
Kap.10.1 og 10.2.1 (untatt 10.2.2–10.2.4, 10.3)

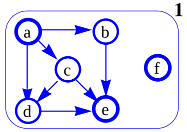
Rettet Graf (DiGraph)



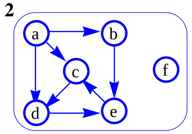
URETTET: en ikke-rettet kant (u,v)
= to rettede kanter
u → v og v → u

RETTET: hver kant (u, v) er et ordnet (rettet) par u → v.

1



2



sti : en sekvens $n_1, n_2 \ldots n_k$ av noder slik at $(n_i,n_{i+1}) \in E$

syklus: enkel sti (hver node 1 gang) men $n_1=n_k$

sammenhengende graf : det finnes en sti mellom alle par av noder

Er v oppnåelig fra u ?
Finn alle v oppnåelige fra u.
Er G sterkt sammenhengende ?
Er G asyklisk ?

sti : en sekvens av fra-til kanter ... : ade (ikke eda)

rettet syklus: rettet enkel sti ... **2**: cde

kilde/sluk : en node uten noen inngående / utgående kanter **1**: a/e

oppnåelig (eng: reachable) :en node v kan nåes fra u dersom det finnes en rettet sti fra u til v
e oppnåelig fra a, men ikke omvendt

sterkt sammenhengende graf : enhver node u er oppnåelig fra enhver annen node v hverken **1** eller **2**

DAG : rettet, asyklisk graf – ingen (rettede) sykler
1 er DAG, men ikke **2**

transitiv tillukning
G* av G : Har kant u → v hviss G har en sti fra u til v

Graf ADT (kan ha *både* rettede og ikke-rettede kanter)

package jdsl.core.api;

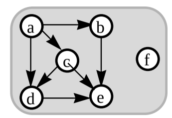
```
public interface InspectableGraph extends PositionalContainer {
                                                    // throws
  int numVertices();  int numEdges();
  Enumeration vertices();
  Enumeration edges();
/** # rettede og ikke-rettede nabokanter */
  int degree(Vertex v);                             InvalidPos
  Vertex[] endVertices(Edge e)                      InvalidPos
  Vertex opposite(Vertex v, Edge e);                InvalidPos
/** nabonoder langs alle kanter
    inn–, utgående samt ikke-rettede */
  Enumeration adjacentVertices(Vertex v)            InvalidPos
/** rettede og ikke-rettede nabokanter */
  Enumeration incidentEdges(Vertex v)               InvalidPos

                                                    // throws
  Enumeration unDirectedEdges();
  Enumeration directedEdges();
  int outDegree(Vertex v);
  int inDegree(Vertex v);
  Vertex origin(Edge e)                             InvalidPos, InvalidEdge
  Vertex destination(Edge e)                        InvalidPos, InvalidEdge
  boolean isDirected(Edge e)                        InvalidPos
  Enumeration outAdjacentVertices(Vertex v)         InvalidPos
  Enumeration inAdjacentVertices(Vertex v)          InvalidPos
  Enumeration outIncidentEdges(Vertex v)            InvalidPos
  Enumeration inIncidentEdges(Vertex v)             InvalidPos
}
```

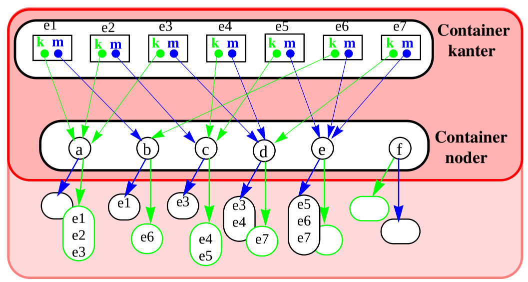
```
public interface Graph extends InspectableGraph {
  Vertex insertVertex(Object o);
  Edge insertEdge(Vertex u, Vertex v, Object o);
                                                    InvalidPos
  Object removeEdge(Edge e)                         InvalidPos
  Object removeVertex(Vertex v)                     InvalidPos

  void makeUndirected(Edge e)                       InvalidEdge
  Edge insertDirectedEdge(Vertex u, Vertex v, Object o);
                                                    InvalidPos
  void reverseDirection(Edge e)  InvalidPos, InvalidEdge
  /** gir retning til en ikke-rettet kant */
  void setDirectionTo/From(Edge e, Vertex v)
                                                    InvalidPos, InvalidEdge
}
```


Implementasjon av Graph



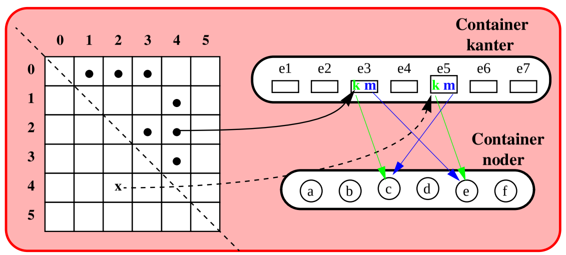
Kant-Liste



Nabo-Liste

utvid ikke-rettede implementasjoner slik at kant-klassen
- *skiller mellom* **Vertex origin** *og* **Vertex destination**, *og*
- *har et attributt* **boolean isDirected**

Nabo-Matrise



Implementasjoner av Graph

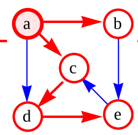
n : antall noder **m** : antall kanter

kompleksitet operasjon		**Kant-Liste**	**Nabo-Liste**	**Nabo-Matrise**
	numVertices(), numEdges()	1	1	1
vertices() / edges()	un/directedEdges()	n / m	n / m	n / m
degree(v)	in/outDegree(v)	1	1	1
endVertices(e), opposite(v,e)	origin(e), destination	1	1	1
adjacentVertices(v)	in/outAdjacentVertices(v)	m	deg v	n
incidentEdges(v)	in/outIncidentEdges(v)	m	deg v	n
insertVertex(o)		1	1	n^2
removeVertex(v)		m	deg v	n^2
insertEdge(v,u,o)	inserDirectedEdge(v,u,o)	1	1	1
removeEdge(e)		1	1	1
reverseDirection(e), makeUndirected(e), ...		1	1	1
areAdjacent(v,u)		m	min(deg u,v)	1

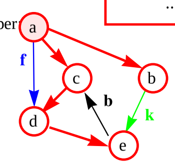
DFS på en rettet graf

9.16 (9.12) DFS traversering av en rettet graf G fra en node a:
a) besøker alle noder *oppnåelige* fra a
b) gir et utspennende tre, DFS-treet, for delgrafen oppnåelig fra a

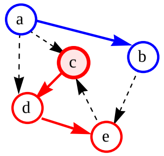
```
DFS(u)              // opptil n rekursive kall
  merk–u
  for hver kant e ε outIncidentEdges(u)
      v = opposite(u,e)
      if ( ! merket(v) )
         // merk e rød
         ..... DFS(v)
```



– Traverserte kanter som ikke er med i DFS-treet kan deles i tre grupper:
- **fram**-kanter fra v til en etterfølger node i DFS-treet
- **tilbake**-kanter fra v til en forgjenger node i DFS-treet
- **kryss**-kanter fra v til en urelatert node i DFS-treet



– Iterert DFS: 'for hver node v utfør DFS(v)' kan gi en skog:



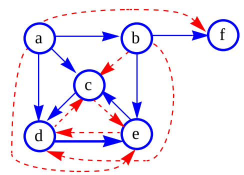
– BFS for rettede grafer har tilsvarende egenskaper til BFS for ikke-rettede grafer (etterlater kun tilbake- og kryss-kanter)

kompleksitet	kant-liste	nabo-liste	nabo-matrise
outIncidentEdges(v)	O(m)	O(deg)	O(n)
DFS	**O(n * m)**	**O(n + m)**	**O(n * n)**
siden m=O(n*n) får vi	$O(n^3)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$

DFS på rettet graf gir opphav til O(**n+m**) algoritme for å :
- finne alle noder oppnåelig fra en gitt node

Iterert DFS gir O(**n(n+m)**) algoritmer for å :
- avgjøre om G er sterkt sammenhengende; (mulig også i O(n+m))
- lage transitiv tilluking G* av G

Transitiv tillukning



```
IterertDFS(Graph G)                       O(n * DFS)
  for hver node v ε V
     DFS(v)  og utvid G med kant  (v,u)
                  for hver  u i DFS-tre til v
```

node	kant til	lagt til
a	b c d	e f
b	e f	c d
c	d	e
d	e	c
e	c	d
f		

Kant-Liste $O(n^2 * m)$
Nabo-Liste $O(n^2 + nm)$
Nabo-Matrise $O(n^3)$

```
FloydWarshall(Graph G)          O(n³) med nabomatrise
  enummerer V : v1,v2,...,vn (vilkårlig)
  G0 = G
  for k = 1,2,...,n
    Gk = Gk–1
    for hvert tallpar a ≠ b,  a,b ≠ k
      if Gk–1.areAdjacent(va,vk) og Gk–1.areAdjacent(vk,vb)
         legg kant (va,vb) til Gk
```

i en rettet graf:
G_{k-1} har kant (v_a,v_i) og (v_i,v_b)

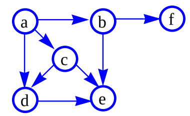
1	2	3	4	5	6
a	b	c	d	e	f

$G_a = G_0$ = { ab, ac, ad, cd, de, ec, bf }
$G_b = G_a \cup$ { ae, af }
$G_c = G_b \cup$ { ed } (ad)
$G_d = G_c \cup$ { ce }
$G_e = G_d \cup$ { bc, bd, dc } (ac)
$G_f = G_e$

Kant-Liste $O(n^3 * m)$
Nabo-Liste $O(n^3 * deg)$
Nabo-Matrise $O(n^3)$

DAG-Directed Acyclic Graph

rettet asyklisk graf
- *arv i et OO-språk*
- *forkrav til kurs*
- *planlegging av avhengige aktiviteter*

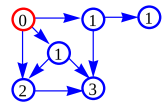


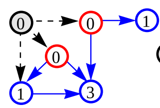
1	2	3	4	5	6
a	**b**	**f**	**c**	**d**	**e**
a	**c**	**d**	**b**	**e**	**f**
....					
a	d	c	e	b	f

Topologisk ordning av en graf G er en enummerering av noder $v_1, v_2 ... v_n$
slik at hvis (v_i, v_j) ε E så er i < j. (dermed, hvis det finnes en sti v_i ... v_j så er i < j)

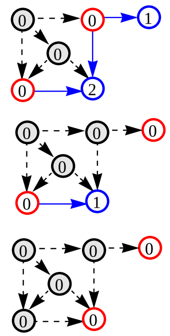
9.21. En rettet graf kan sorteres topologisk hvis og bare hvis den er asyklisk.

```
Queue TS(Graph G)                             O(nk)
  Q, R = empty Queue                          O(n+k)
  for hver node v ε V                         O(n²)
  {  in(v) = G.inDegree(v)
     if (in(v) == 0) Q.enqueue(v)  }
  while (! Q.isEmpty() )
  {  h = Q.dequeue()
     for hver v ε G.outAdjacentVertices(h)
     {  in(v) = in(v) – 1
        if (in(v)==0) Q.enqueue(v)  }
     R.enqueue(h)  }
  return R
```





R	a	b	c	d	e	f	Q
	0	1	1	2	3	1	a
a	x	0	0	1	3	1	c b
a c	x	0	x	0	2	1	b d
a c b	x	x	x	0	1	0	d f
a c b d	x	x	x	x	0	0	f e
a c b d f e							



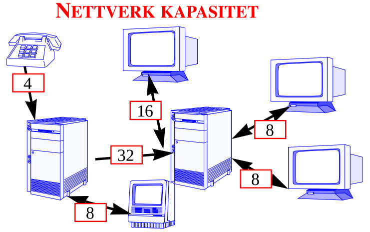
9.22 Har grafen en rettet sykel vil TS oppdage dette. Hvordan?.
-> TS gir en O(n+m) algoritme som sjekker om en rettet graf er asyklisk

Vektede Grafer

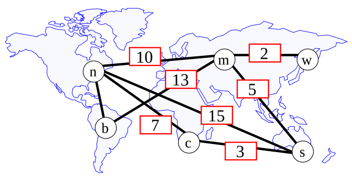
en graf der hver kant har et vekt-attributt

- vektene er vanligvis Totalt Ordnet (typisk heltall)
  - man designer en Comparator for sammenlikning av kanter mht. vekt
  - tilleggs antakelser om vekter (f.eks. > 0,   0, etc.)

NETTVERK KAPASITET



AVSTAND



- Implementasjon bruker det faktum at 'Edge implements Position' – kanter lagrer objekter med vekt

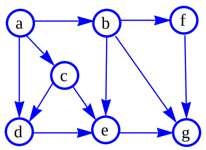
- I tillegg til vanlige graf-problemer, spør man i forbindelse med vektede grafer for eksempel om
  - *hva er* ***korteste*** *sti fra u til v, dvs sti fra u til v med minste sum av vekter?*
  - *hva er* ***minste*** *utspennende tre, dvs hvor sum av vekter på kanter i treet er minst?*
  - *..... minste / korteste / billigste ..... ?*

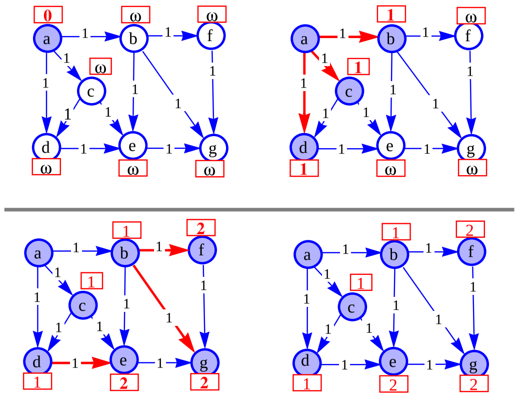
Korteste sti i ikke-vektet graf ...BFS

Finn sti fra a til enhver annen node, som har minst antall kanter (alternativt: kantvekter=1)

Ford-Bellman **BFS** :

```
for each node v : D(v)= ω          // ω er et maksimalt tall (her ω > n)
D(s) = 0;                          // s er startnoden
for (i=1; i<n; i++)                // n er antall noder i grafen G      O(n*m)
   for each kant (u,v)
      if ( D(u) + 1 < D(v) )   D(v) = D(u) + 1
```



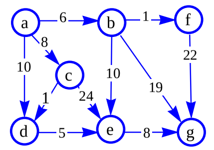


Korteste sti (single-source shortest-paths) :

Finn (lengden av) korteste sti fra a til en bestemt/alle andre node(r)

Ford-Bellman **SS-SP** :

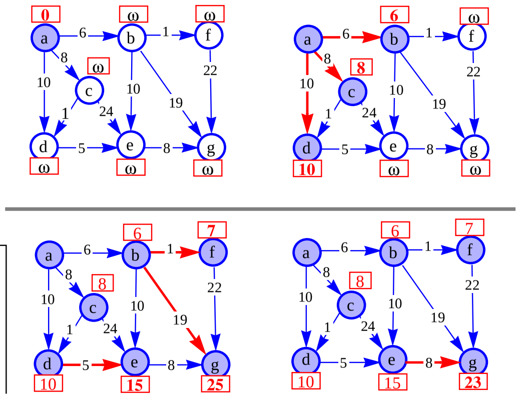
```
for each node v : D(v)= ω          // ω er et maksimalt tall (her ω > n)
D(s) = 0;                          // s er startnoden
for (i=1; i<n; i++)                // n antall noder, m antall kanter    O(n*m)
   for each kant (u,v)
      if ( D(u) + vekt(u,v) < D(v) )   D(v) = D(u) + vekt(u,v)
```



graf	vekter
ikke-rettet	1
rettet	vilkårlige

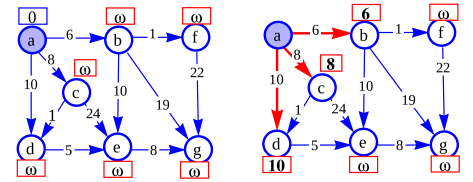
10.3 Etter Ford-Bellman (G,a):

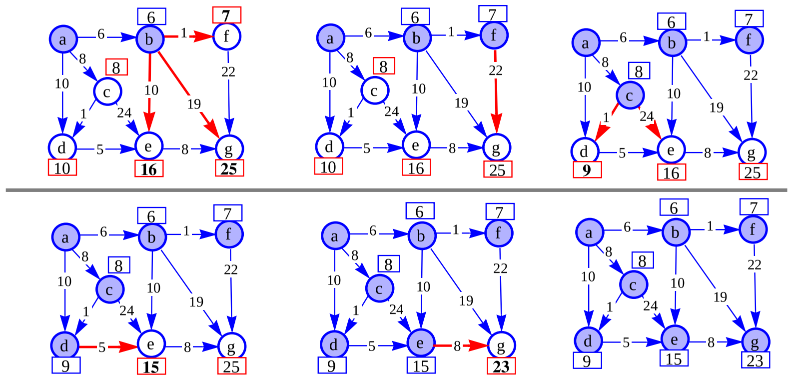
- hvis det finnes en kant (u,v) med D(u) + vekt(u,v) < D(v), så har G en negativ sykel
- ellers D(v) korrekt for alle noder v



Korteste sti (SS-SP) : Dijkstra algoritme (vekt(e) ≥ 0)

```
initialiser D(a)=0 og D(v)=ω for alle andre v
sett alle noder i en PriorityQueue Q mht. D
while ( ! Q.isEmpty() )
  v = Q.removeMinElement()   // Greedy
  for hver z ε G.outAdjacentVertices(v)
    if ( D(v)+vekt(v,z) < D(z) )
      D(z)= D(v) + vekt(v,z)
      oppdater Q    // z kan få ny nøkkel
```



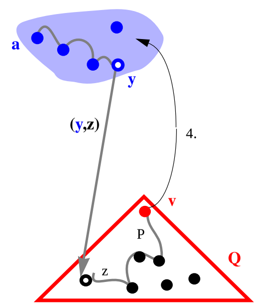


Dijkstra's SS-SP

1. initialiser D(a)=0 og D(v)=ω for alle andre v
2. sett alle noder i en PriorityQueue Q mht. D
3. while (! Q.isEmpty()) // n
4. **4.** v = Q.**removeMinElement**()
5. for hver z ε G.**outAdjacentVertices**(v) // k: Nabo-Liste
6. if (D(v)+vekt(v,z) < D(z))
7. Q.**replaceKey**(z, D(v) + vekt(v,z))

PriorityQueue skal bruke Locator !!!

heap	**O**((n+m) log n)	**O**(n^2 log n)
usortert sekvens	**O**(n*n+m)	**O**(n^2)
sortert sekvens	**O**(n +m*n)	**O**(n^3)



Løkke Invariant : alle noder x som har blitt fjernet fra Q har korrekt D(x)
– holder før inngangen siden ingen node ble fjernet.
– for å vise at den opprettholdes i løkken, må vise at den holder etter 4.

10.1 Ved 4. er D(v) = d(a,v) – lengden av korteste sti fra a til v.

- **a)** Anta ikke og la **v** være **den første** node for hvilken **D(v)** > **d(a,v)** ved 4.
- **b)** Dvs. **korteste sti P** a–v er kortere enn **D(v)**
- **c)** La **z** være første noden på P som fortsatt er i Q (**d(a,v)** = **d(a,z)**+**d(z,v)**)
- **d)** og la **y** være **z**'s umiddelbar forgjenger på P med en P-kant = (**y,z**)

a) → **e)** **D(y) = d(a,y)**
4. → **f)** **D(v) ≤ D(z)**
d) → **g)** **D(z) ≤ D(y) + vekt(y,z)** = **d(a,y)** + **vekt(y,z)**
siden (y,z) er med i korteste sti P a—v, finns det ikke en kortere sti a—z enn
h) **d(a,z) = D(y) + vekt(y,z) = D(z)**

Men da:

D(v) $\leq^{f}$ **D(z)** $=^{h}$ **d(a,z)** ≤ **d(a,z)** + **d(z,v)** $=^{c}$ **d(a,v)** – **motsier a)** **D(v) > d(a,v)**

Oppsummering

- *Rettede Grafer*
  - *Graf ADT*
  - *implementasjoner*
- ***Algoritmer***

  DFS *– forskjeller fra ikke-rettet tilfelle*

  transitiv tillukking
  - *n * DFS*
  - *Floyd-Warshall : nabo-matrise!*

  topologisk sortering

  DAG
- *Vektede Grafer*

  korteste sti
  - *Ford-Bellman algoritme : O(n*m)*
  - *Dijkstra algoritme : O((n+m) log n)*