Rekursjon

I. TRE AV REKURSIVE KALL,

rekursjonsdybde

terminering – ordning

II. INDUKTIVE DATA TYPER

og Rekursjon over slike

III. "SPLITT OG HERSK" – PROBLEMLØSNING VED REKURSJON (Kap. 8.1.1)

IV. REKURSJONS EFFEKTIVITET

"memoisering"

avskjæring

V. STABEL AV REKURSIVE KALL

iterasjon til rekursjon

rekursjon implementert som iterasjon

VI. KORREKTHET

terminering

invarianter (notat til Krogdahl&Haveraaen)

Et enkelt eksempel

har en metode som

```
/**  leser en linje fra terminalen
 *   @return innleste String
 *   @exception IOException – i tilfelle i/o problem
 */
     public String readln()
```

og vil lage en som

```
/**  leser en linje fra terminalen
 *       inntil den leser et heltall
 *   @return innleste tall
 *   @exception  ingen unntak
 *       – anta det kommer et heltall
 */
/*  public int iRead() {
 *       String s= readln();
 *       int k= hent int fra s;
 *       while (! alt ok)
 *           gjenta: k = hent int fra neste linje;
 *       return k;
*/
```

```
/* public int myRead() {
 *       String s= readln();
 *       int k= hent int fra s;
 *       if (alt ok) return k;
 *       else   // prøv neste linje
 *           return myRead();
 */      }
```

```
 public int myRead() {
   try{
         return Integer.parseInt(readln());  }
   catch(IOException e) {
         return myRead(); }
   catch(NumberFormatException e) {
         return myRead(); }
 }
```

Iterasjon til rekursjon

```
/**  @param n > 0
     @return 1+2+...+n */
int sumW(int n) {
     int res =0;
     while (n > 0) {
         res = res + n;
         n = n–1;
     }
     return res;
}
```

```
/**  @param n > 0
     @return 1+2+...+n */
int sumR(int n) {
     if (n == 0) return 0;
     else return n + sumR(n-1);
}
```

Generellt, dog ikke 100% riktig:

```
int Iter(int n) {
     res= init;
     while ( fortsett(n) ) {
         res= Kroppen(n,res);
         oppdater(n);
     }
     return res;
}
```

```
int Rekursiv(int n) {
     if ( !fortsett(n) ) return basetilfelle;
     else return  Kroppen(n, Rekursiv(oppdater(n)));
}
```

*Enhver **iterasjon** kan skrives som **rekursjon***

... t.o.m. som hale-rekursjon

1. Rekursjons*tre* og *-dybde;* Eks: Fibonacci-tallene

fib(0) = 0

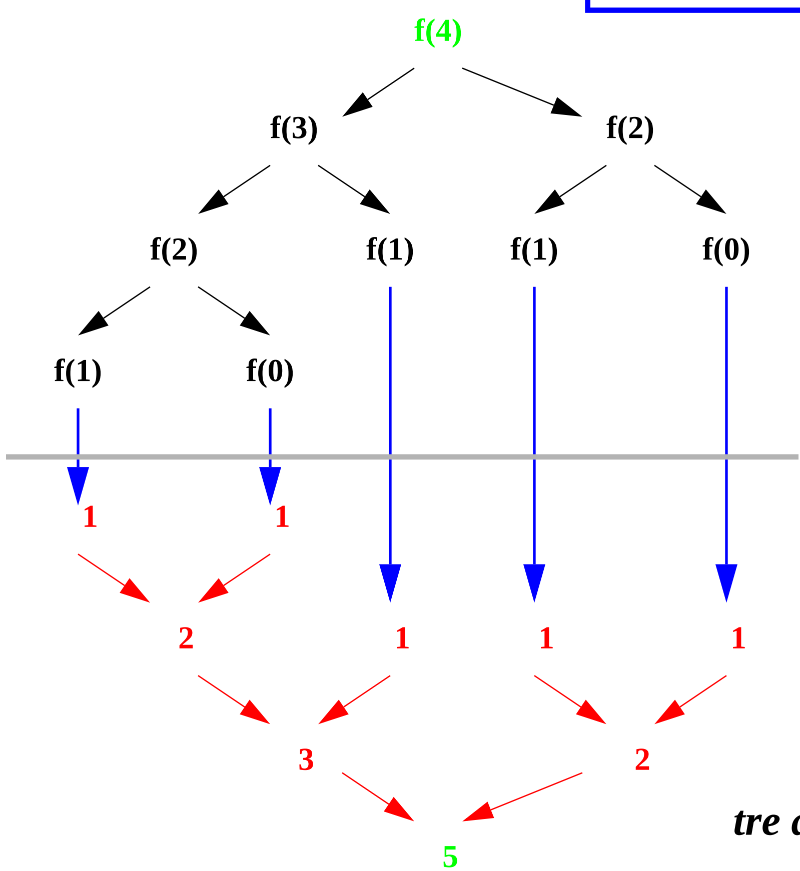
fib(1) = 1

fib(n+2) = fib(n) + fib(n+1)

```
public int fib(int n) {
   if (n==0 || n==1) return 1;
   else
     return fib(n-1) + fib(n-2);
}
```

returner i **basistilfelle**

ellers beregn
rekursivt **enklere**
(mindre) deler og
sett disse sammen



tre av rekursive kall

f(4) ...?
— **f(3) ...?**
— — **f(2) ...?**
— — — **f(1) ...?**
— — — **> 1**
— — — **f(0) ...?**
— — — **> 1**
— — **> 2**
— — **f(1) ...?**
— — **> 1**
— **> 3**
— **f(2) ...?**
— — **f(1) ...?**
— — **> 1**
— — **f(0) ...?**
— — **> 1**
— **> 2**
> 5

rekkefølgen
av kall

rekursjonsdybde

#svarte = #røde linjer = *# rekursive kall* .....
inntil basistilfelle er nådd (=høyden av treet)

2. Induktive Data Typer *(vilkårlig store men endelige)*

Strukturell ordering

naturlige tall N:

basis: **0** er et N

hvis **n** er et N

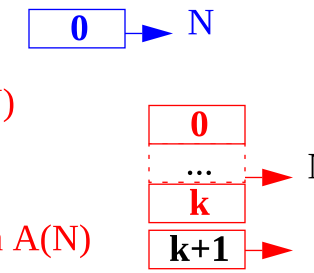
så er: **n+1** et N

array av N: A(N)

basis **0 -> N** er A(N)

hvis **[0...k] -> N** er A(N)

så er **[0...k,k+1] -> N** en A(N)

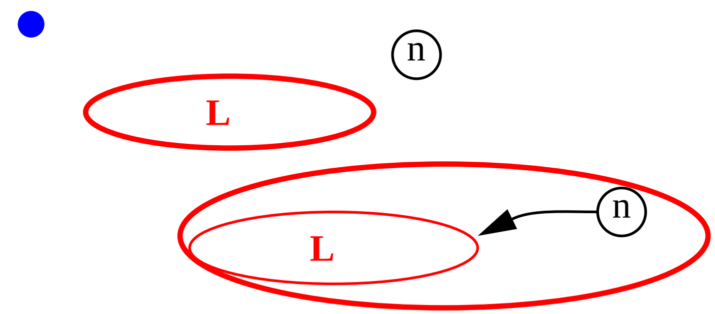


Lister av N: L(N):

basis: **null** er en L(N)

hvis **L** er L(N) og n er N

så er: **(L,n)** en L(N)

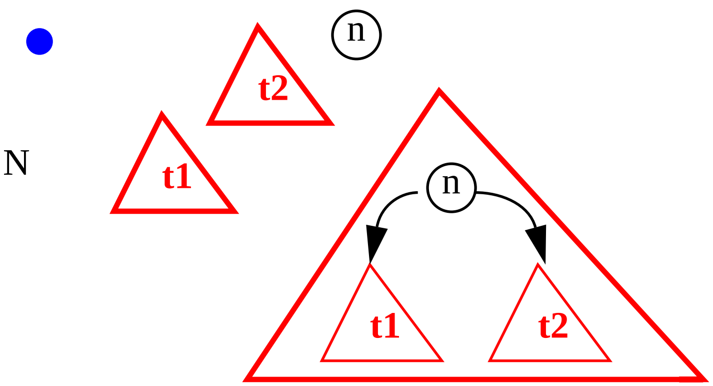


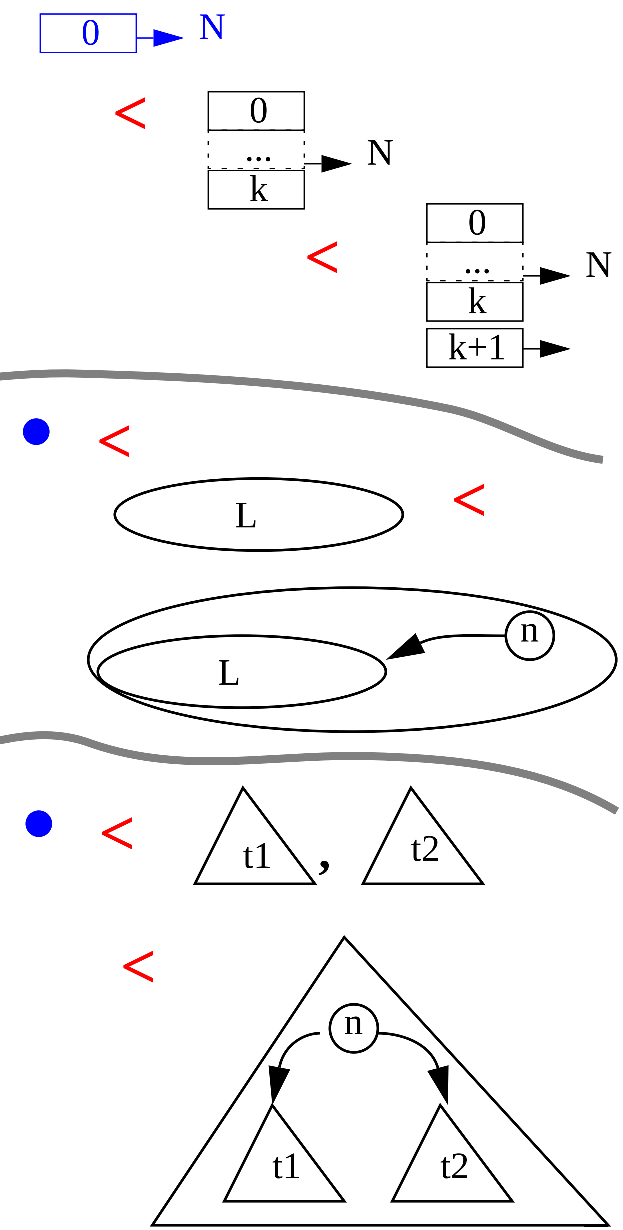
Binære Trær av N: BT(N):

basis: **null** er et BT(N)

hvis **t1**, **t2** er BT(N) og n er N

så er: **(t1, n, t2)** et BT(N)





Variasjoner over tema

induktiv definisjon** = fra basis og oppover* ** ***rekursjon** = fra toppen mot basis*

N
basis: 0
ind: n+1

```
int fib(n) {
    if (n==0 || n==1) return 1;
    else return fib(n-1) + fib(n-2);
}
```

```
int sum(k) {
    if (k==0) return 0;
    else return k + sum(k-1);
}
```

Array[N]
basis: [0] -> N
ind: [0.. k, k+1] -> N

```
void inc(AN A, int k) {
    A[k]++;
    if (k > 0) inc(A,k-1); }
```

```
int sum(AN A, int k) {
    if (k==0) return A[0];
    else return A[k] + sum(A,k-1); } }
```

Liste[N]
basis: null
ind: (L,n)

```
class LS {
    int hodedata;
    LS restliste; }
```

```
void inc(LS L) {
    if (L==null) {}
    else { hodedata++;
           inc(L.restliste); }
```

```
int sum(LS L) {
if (L==null) return 0;
else  return sum(L.restliste)+hodedata;
}
```

BinærtTre[N]
basis: null
ind: (t1,n,t2)

```
class BT {
    int n;
    BT left;
    BT right;}
```

```
void inc(BT B) {
    if (T==null) { }
    else { n++;
           inc(T.left);
           inc(T.right); } }
```

```
int sum(BT T)  {
    if (T==null) return 0;
    else     return n +
             sum(T.left) +
             sum(T.right) ; }
```

FRAKTALer

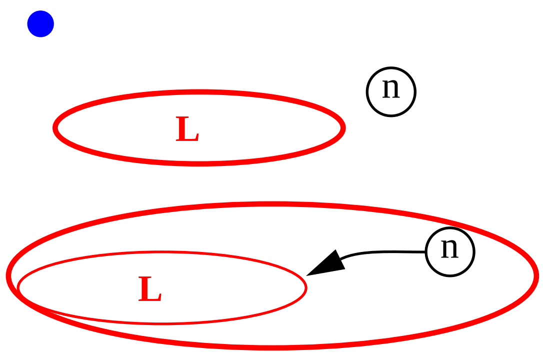
En teknisk bemerkning

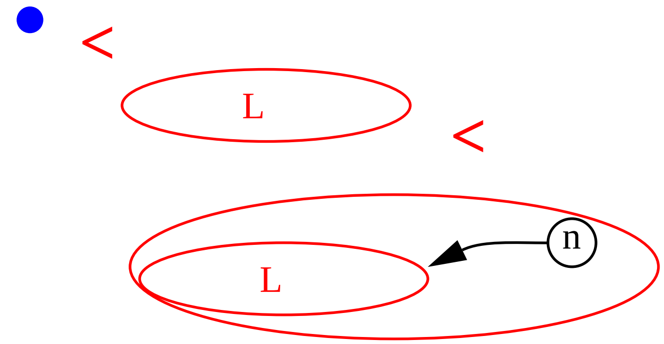
Lister av N: L[N]:

basis: **null** er en L[N]

hvis **L** er L[N] og n er N

så er: **(L,n)** en L[N]



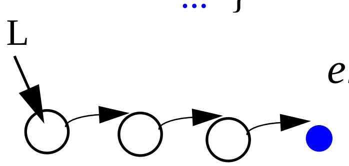


***Rekursjon implementert** "utenfra" datastrukturen :*

```
class LN {
    public int hodedata;
    public LN restliste;
    ...  }
```

```
inc(LN L) {
    if (L==null) {}
    else { L.hodedata++;
        inc(L.restliste); }
```

```
int sum(LN L) {
if (L==null) return 0;
else  return sum(L.restliste)+L.hodedata;
}
```



eller "innenfor" datastrukturen :

```
class LN {
  private int hodedata;
  private LN restliste;
  inc() {...}
  int sum() {...}     }
```

```
inc() {
    hodedata++;
    if (restliste != null)
        restliste.inc(); }

inc(LN L) {
    if (L != null)
        L.inc();
}
```

```
int sum() {
    if (restliste != null)
        return restliste.sum()+hodedata;
    else return hodedata; }

int sum(LN L) {
    if (L != null)
        return L.sum();
    else return 0; }
```

Iterativt eksempel: Seleksjonsortering

```
/*   SS - sorterer input array (SeleksjonSort)
 *       @param  - int tab[0...n]
 *       @return - sortert tab
 *
 *   for (k = 0,1,2...n) {
 *       i = k
 *       for ( j = k+1...n)
 *           if (tab[j] < tab[i]) i = j;
 *       bytt elementene ved indeks k og i
 *       }
 */
```

for en vlikårlig input tabell med lengde **n***:*

- *utfører* **n** *iterasjoner (for k=1,2...***n***) og*
- *i hver iterasjon går gjennom sluttsegment* **[k...n]***, (for j=k+1...n), dvs.*

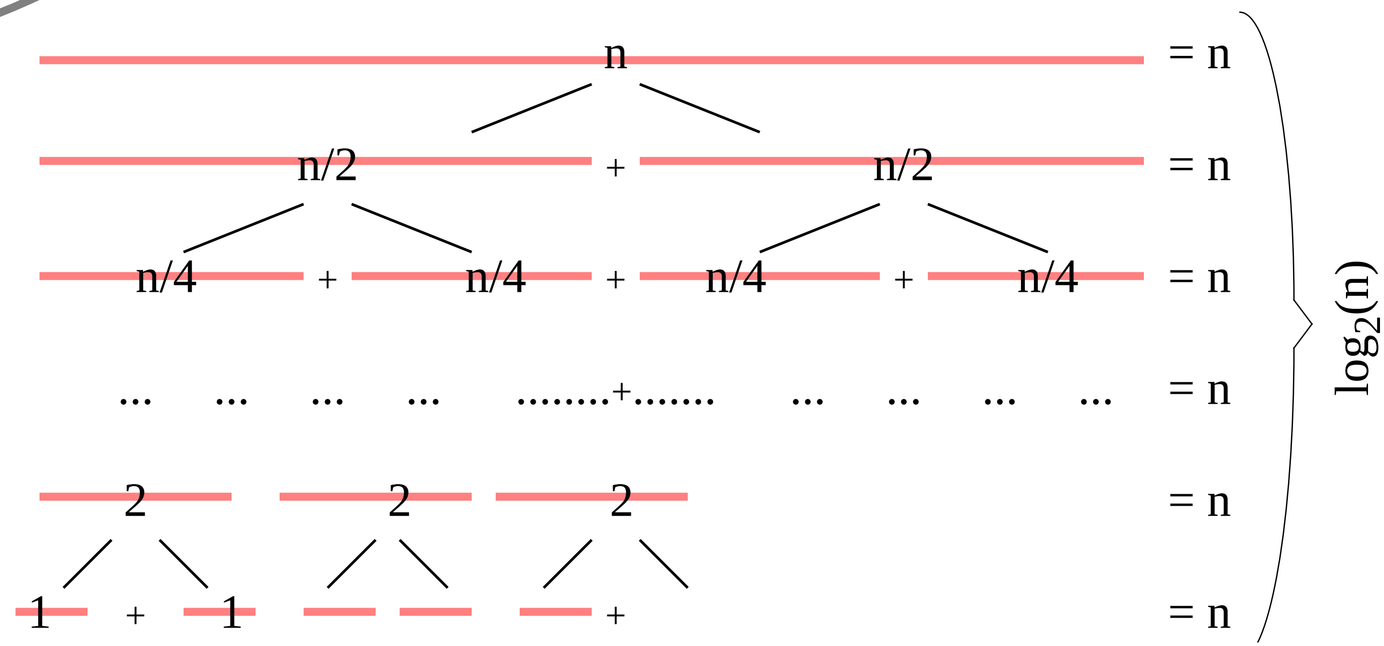
tidskompleksistet ***SS(n)*** = $\left(\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n \right) = (n + n^2)/2 = \mathbf{O}(n^2)$

Rekursivt eksempel:MergeSort

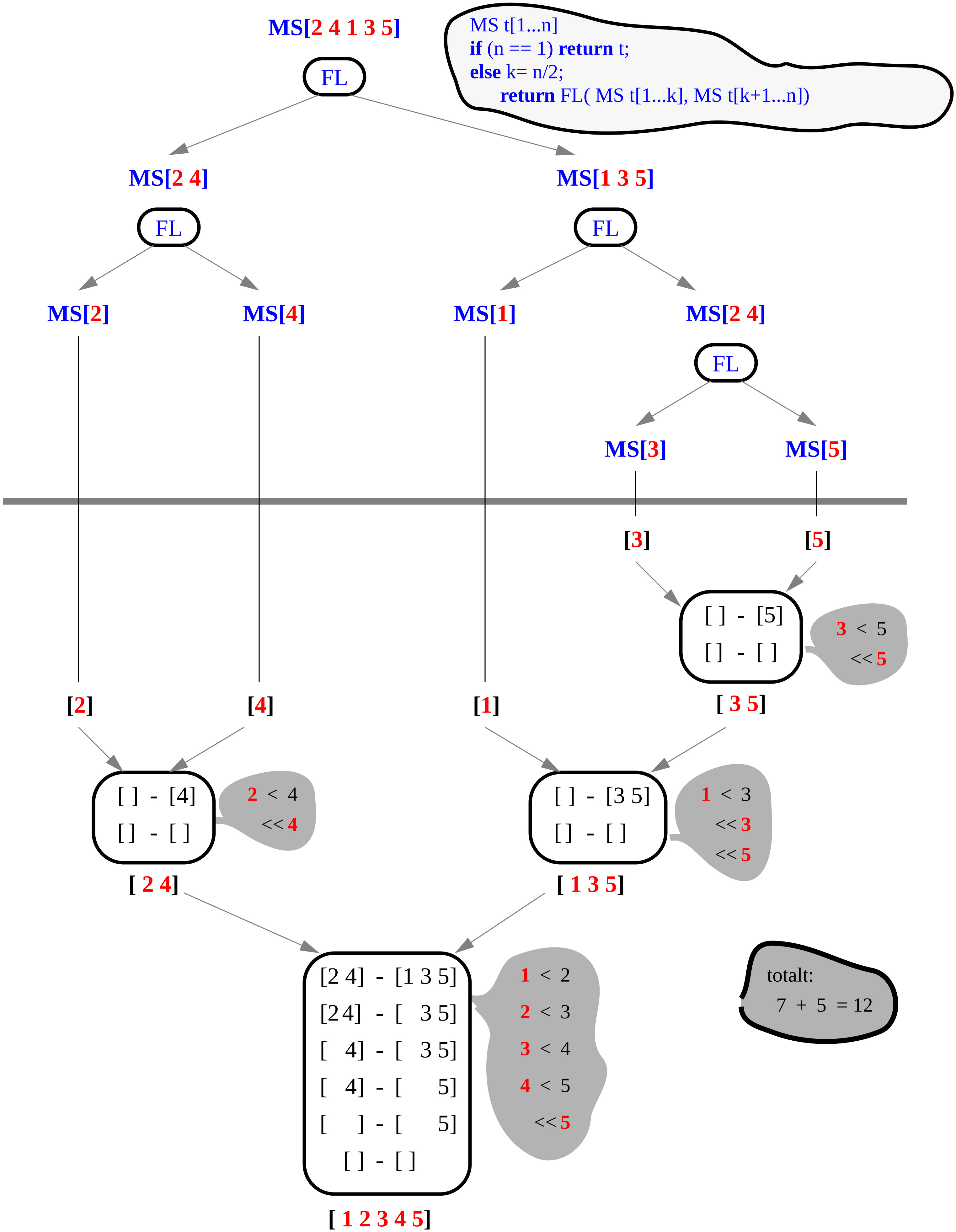
/* **FL** - fletter to sorterte array:
 * **@param - int** t1[0...n1], t2[0...n2] - sorterte
 * **@return -** sortert t[0......n1+n2]
 * gå (samtidig) gjennom t1 og t2 (med i1 og i2)
 * **if** t1[i1] < t2[i2] plasser t1[i1] i t og øk i1, i
 * **else** plasser t2[i2] i t og øk i2, i
 * hvis noe igjen i t1 eller t2, flytt det til t
 * **return** t;
 */

$$\boldsymbol{FL}(n1,n2) = \boldsymbol{O}\ (n1+n2)$$

/* **MS** - sorterer input array:
 * **@param - int** tab[0...n-1]
 * **@return -** sortert tab
 * **if** (n == 1) **return** tab
 * **else** { k= n/2;
 * **return** FL (MS(tab[0...k]), MS(tab[k+1..n-1])); }
 */



$$\boldsymbol{MS}(n) = \boldsymbol{O}\ (n * \log_2(n)\ )$$


MS[2 4 1 3 5]
MS t[1...n]
if (n == 1) return t;
else k= n/2;
return FL(MS t[1...k], MS t[k+1...n])
FL
MS[2 4]
MS[1 3 5]
FL
FL
MS[2]
MS[4]
MS[1]
MS[2 4]
FL
MS[3]
MS[5]
[3]
[5]
[ ] - [5]
[ ] - [ ]
3 < 5
<< 5
[3 5]
[2]
[4]
[1]
[ ] - [4]
[ ] - [ ]
2 < 4
<< 4
[ ] - [3 5]
[ ] - [ ]
1 < 3
<< 3
<< 5
[2 4]
[1 3 5]
[2 4] - [1 3 5]
[2 4] - [3 5]
[4] - [3 5]
[4] - [5]
[ ] - [5]
[ ] - [ ]
1 < 2
2 < 3
3 < 4
4 < 5
<< 5
totalt:
7 + 5 = 12
[1 2 3 4 5]

3. "Splitt og hersk" (eng: Divide and Conquer)

***Rekursjon* som en generell strategi for problemløsning og algoritmedesign**

Gitt en instans **n** *av et problem* **P** *:*

1. *hva gjør jeg når* **n** *er basis tilfelle*
2. *hvordan konstruere løsning for* **n** *utfra løsninger for noen instanser* **mindre enn n**

P = sorter input array A (n = A.length)

O (n^2)

```
/* int[] SS(int[] A,k) {
 * initielt kall med SS(A,0)
 * n = A.length;
 *    if (k==n-1) { return A; }
 *    else {
 *       i= indeksen til minste elementet
 *          i A[k...n-1];
 *       bytt A[k] med A[i];
 *       return SS(A, k+1); } }   */
```

O (n*log n)

```
/* int[] MS(int[] A) { int n= A.length;
 *    if (n == 1) { return A; }
 *    else { del A i midten i
 *       t1= A[0...n/2] og t2= A[n/2+1...lgh];
 *       sorter rekursivt begge (mindre)
 *          r1= MS(t1) og r2= MS(t2)
 *       return flettet resultat av rekursive kall FL(r1,r2)
 * FL - fletter to sorterte array i en sortert array */
```

P = finn et gitt element x i en array A

Hvis A *er usortert : sjekk* A[n]*; hvis x ikke er der, lett i* A[0...n–1] O (n)

Hvis A er sortert ...

Binær Søk

```
/*  finn indeks i A til et element x:
 *  @param A  int A[...] sortertint
 *  @param x  finn x i A
 *  @param l, h søk i A bare fom. l tom. h
 *  @return     indeks til x;
 *              –1 hvis x ikke finnes
 */
```

```
int BS(int[] A,x,l,h) {
    m= (l+h) / 2 ;
    if (l > h) return -1;
    else if (A[m] == x) return m;
    else if (A[m] < x) return BS(A,x,m+1,h);
    else return BS(A,x,l,m-1); }

// initielt kall med BS(A, x, 0, A.length–1)
```

O (log n)

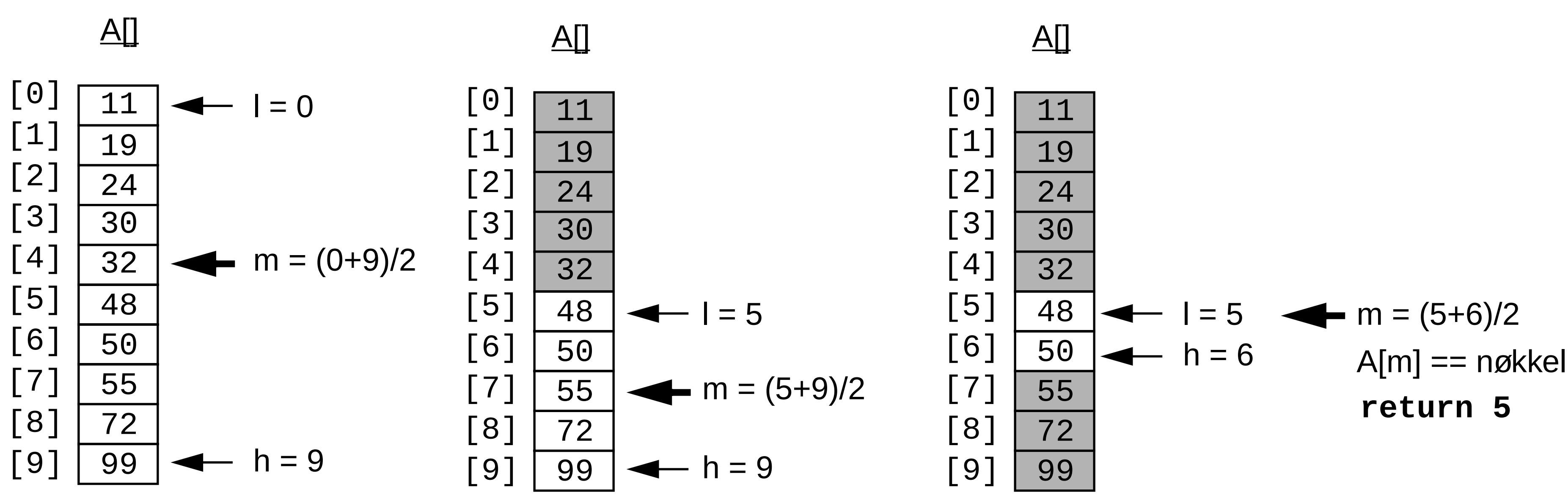
Nøkkel er 48

1. kall `binSøk(A, 48, 0, 9)`

2. kall `binSøk(A, 48, 5, 9)`

3. kall `binSøk(A, 48, 5, 6)`

basis tilfelle



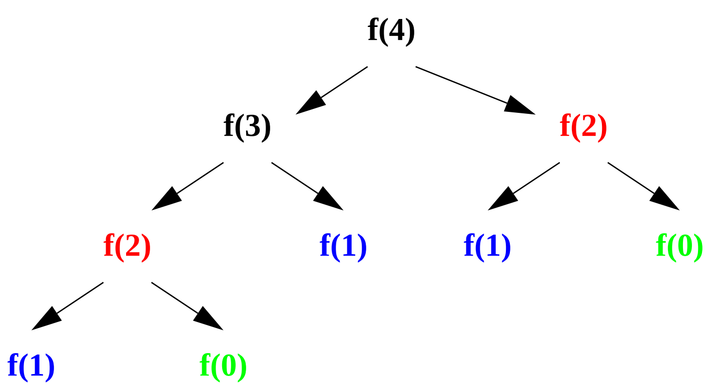
4. Rekursjon og effektivitet

– *Reduser antall rekursive kall* –

```
int fib(int n) {
   if (n==0 || n==1) return 1;
   else return fib(n-1)+fib(n-2);

}
```

$O(1.6^n)$



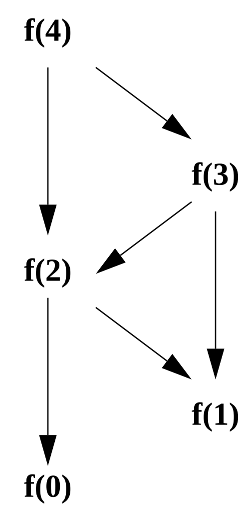
1. “Memoisering” :

Istedenfor gjentatte rekursive kall til f(k) med samme k, kan ***i dette tilfelle*** *resultatet av f(k) lagres for senere bruk:*

```
int Fib(int n) {
   int[] ar= new int[n+1];
   ar[0]=1; ar[1]=1;
   return fibo(n, ar);
}

int fibo(int n, int[] ar) {
   if (ar[n] > 0) {
      return ar[n]; }
   else {
      int z= fibo(n–1) + fibo(n–2);
      ar[n]= z;
      return z;
}  }
```

O(n)



Rekursjon & effektivitet

2. Avskjæring

Finn alle permutasjoner av [0,1,2...n-1] (for et partall n)

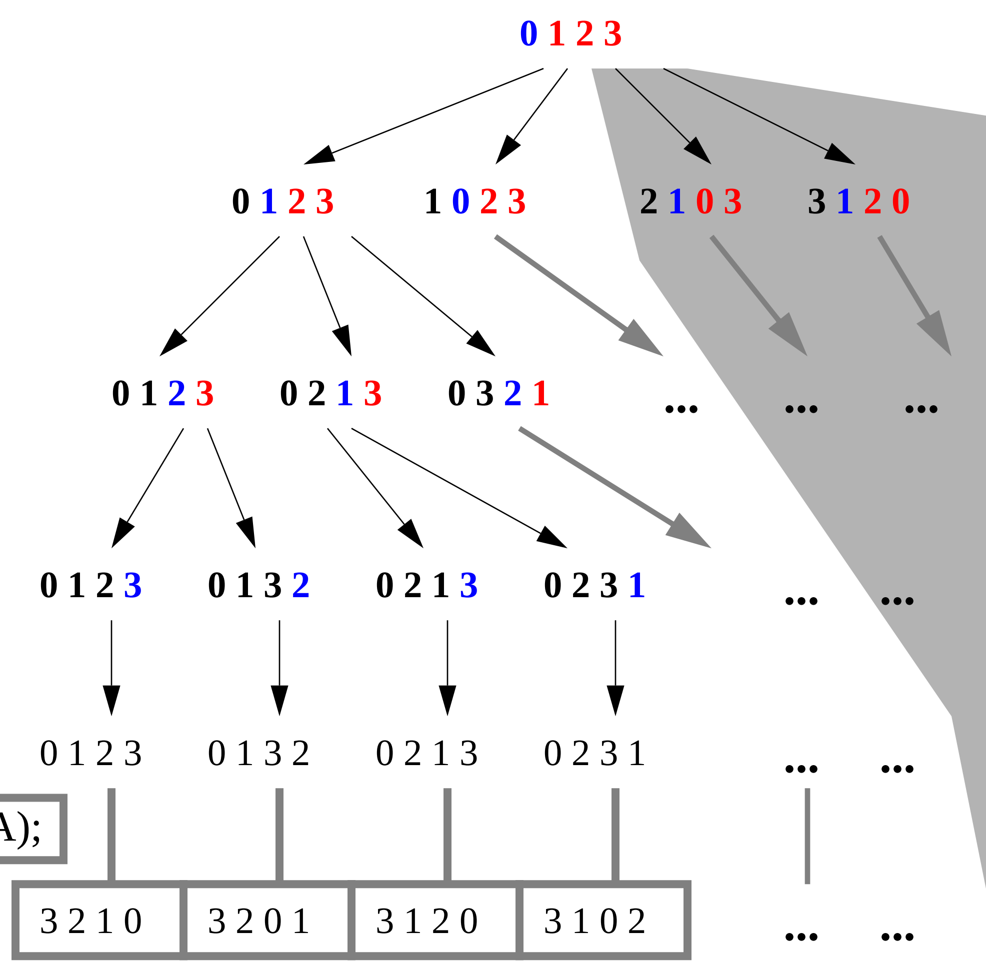
```
/*   perm(A,n) { int l= A.length-1;
 *   if (n==l) { skriv A; }
 *   else {
 *       for hver ind: n+1...l
 *           perm(A,n+1);
 *           bytt A[n] og A[ind]
 *       perm(A,n+1);
 *       roterL[n...l]; }
 */
```

A[0..n-1] **A[n]** **A[n+1..l]**

perm(A,0) skriver alle perm

```
/*   PE(A) { int l= A.length-1;
 *   for hver n: 0...l/2 {
 *       bytt A[0] og A[n];
 *       perm2(A,1);
 *       bytt A[0] og A[n]; }
*/
```

skriv inv(A);



0,1,2,3
0,1,3,2
0,2,1,3
0,2,3,1
0,3,2,1
0,3,1,2
1,0,2,3
1,0,3,2
1,2,0,3
1,2,3,0
1,3,2,0
1,3,0,2
2,1,0,3
2,1,3,0
2,0,1,3
2,0,3,1
2,3,0,1
2,3,1,0
3,1,2,0
3,1,0,2
3,2,1,0
3,2,0,1
3,0,2,1
3,0,1,2

Kompleksitet av en rekursiv funksjon

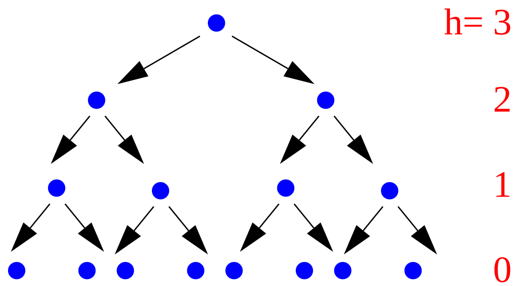
Analyse vha REKURSJONSTRE

avhenger av

- *"**størrelsen på steget**" i hvert rekursivt kall (høyden av treet)*
- ***antall rekursive kall** i hvert steg ("bredden" av forgreninger)*
- *arbeidsmengden ved "sammensetting" av resultater fra rekursive kall. **Anta dette O(1) i eksemplene under.***

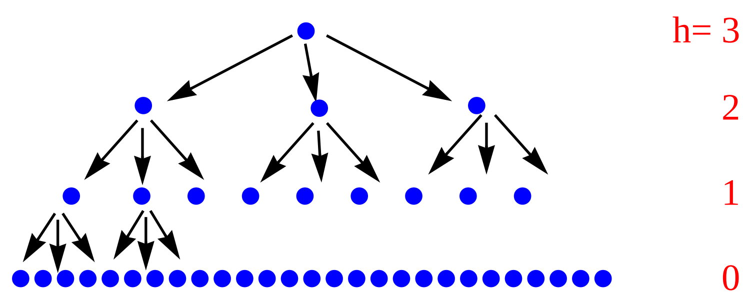
R(0) = 1, R(1) = 1

R(**n+1**) = R(**n**) + R(**n**) $O(2^{n+1} - 1)$



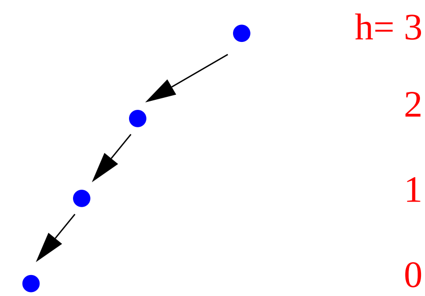
R(0) = 1, R(1) = 1

R(**n+1**) = R(**n**) + R(**n**) + R(**n**) $O(3^{n+1} - 1)$



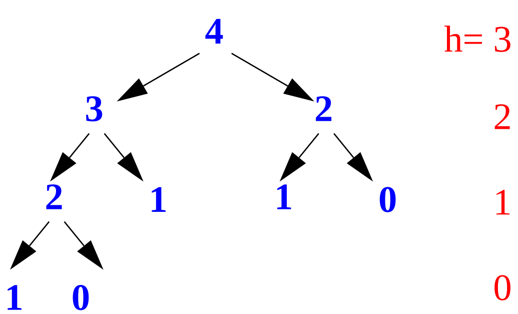
R(0) = 1, R(1) = 1

R(**n+1**) = R(**n**) * 2   ***O*(n)**



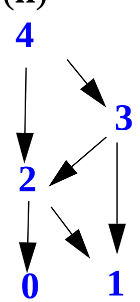
R(0) = 1, R(1) = 1

R(**n+2**) = R(**n+1**) + R(**n**) $O(1.6^n)$



Fibonacci kan dog forenkles til:

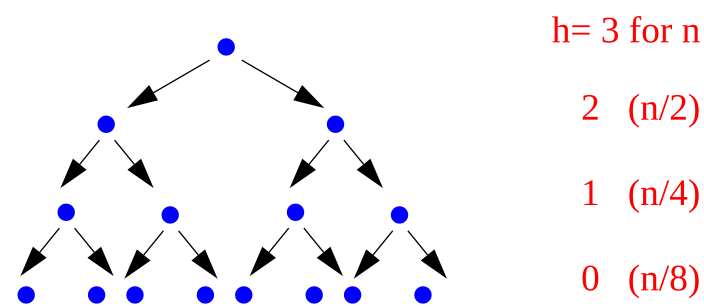
***O*(n)**



R(1) = 1

R(**n**) = R(**n/2**) + R(**n/2**)

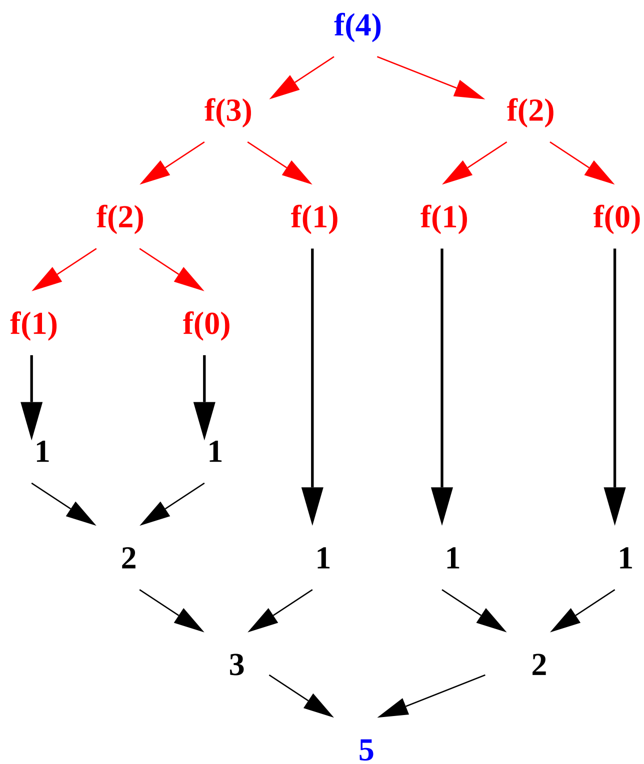
$2^{\log(n)+1} - 1 = 2n - 1 = O(n)$

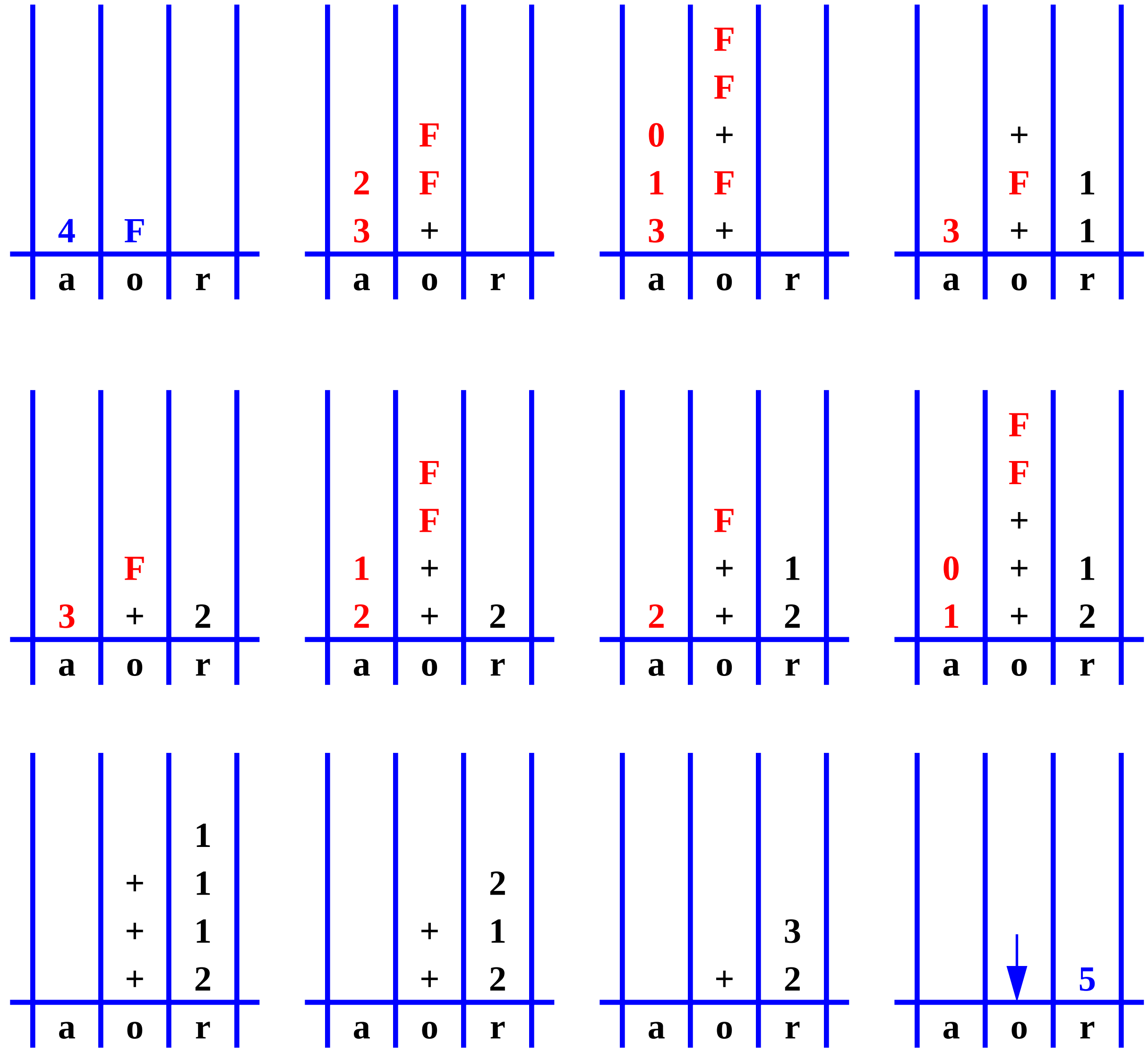


5. Rekursjon implementert med stabel. . .

For Fib kan vi bruke f.eks. 3 stabler ar(argument), op(operator), re(resultat)

```
int Fib(int n) {
if (n==0 || n==1) return 1;
else
      return Fib(n-1) + Fib(n-2);}
```





Rekursjon til iterasjon

(kan alltid omgjøres v.hj.a. Stabel)

```
int Fib(int n) {
  if (n==0 || n==1) return 1;
  else
     return Fib(n-1) + Fib(n-2);
}
```

Noen rekursjoner (f.eks. hale-rekursjon) kan omgjøres til iterasjon på en enklere måte.

```
int fibS(int a) {
  String  o; int n, a1, a2;
  Stack op = new StackImp();
  Stack re = new StackImp();
  Stack ar = new StackImp();

  op.push("F"); ar.push( new Integer(a) );
  while (!op.empty()) {
   o= (String) op.pop();

   if ( o.equals("F") ) {
        n= ( (Integer)ar.pop() ).intValue();
        if (n==0 || n==1) re.push( new Integer(1) );
        else {
            op.push("+"); op.push("F"); op.push("F");
            ar.push( new Integer(n-1) );
            ar.push( new Integer(n-2) ); }

   } else if ( o.equals("+") ) {
        a1= ( (Integer)re.pop() ).intValue();
        a2= ( (Integer)re.pop() ).intValue();
        re.push( new Integer(a1+a2) ); }
  }
  return ( (Integer)re.pop() ).intValue();
}
```

6. Korrekthet

Gitt en instans **n** *av et problem* **P** *:*

1. hva gjør jeg når **n** *er basis tilfelle*

2. hvordan konstruere løsning for **n** *utfra løsninger for noen instanser* **mindre enn n**

P(n)
  if Basis(**n**)
    return ???

  else
    return
    Kombiner(**P(m1)** ... **P(mk)**)

Terminering:

P(n)
  if Basis(**n**)
  – stopper rekursjon

  else
  – garanter at hver **mi < n**, er nærmere Basis

Korrekthet:

P(n)
  if Basis(**n**)
  – kontroller korrekt utførelse

  else HER MÅ VI VISE **HVIS -> SÅ**
  – **HVIS** hvert rekursivt kall **P(mi)** returnerer riktig resultat

  !!! DET OVENSTÅENDE ANTAR VI !!!

  – **SÅ** gir Kombiner(**P(m1)** ... **P(mk)**) riktig resultat

kombinasjon opprettholder

rekursjons-invariant

Korrekthet: rekursjons-invariant

```
/* int[] MS(int[] A) { int n= A.length;
 *    if (n == 1) { return A; }
 *    else {
 *       del A i midten i :
 *       t1= A[0...n/2]  og  t2 = A[n/2+1...n];
 *       sorter rekursivt (mindre) delene
 *          r1= MS(t1) og
 *          r2= MS(t2)
 *       return flettet resultat av
 *          rekursive kall FL(r1,r2) }
 */
```

Invariant:

MS(A) *returnerer sortert argument* A:

if **lgh==1** – ***da er A sortert***

else – deler A i to disjunkte deler

t1= **A[0...n/2]** og t2= **A[n/2+1...n]**

r1= MS(**t1**) ***returnerer sortert t1***

r2= MS(**t2**) ***returnerer sortert t2***

hvis FL *fletter korrekt to sorterte array,*

så returnerer hele else-grenen sortert A

```
/* int BS(int[] A, int x, int l, int h) {
 *    int m= (l+h) / 2 ;
 *    if (l > h) return –1;
 *    else if (A[m] == x) return m;
 *    else if (A[m] < x) return BS(A, x, m+1, h);
 *    else return BS(A, x, l, m–1); }
 */
```

Invariant:

argumentet A *er sortert &*

er x *i* A, *så er den mellom* [l ... h]

(*initielt kall med* (A, x, 0, A.length-1)

if **l** > **h** – **x** ***kan ikke være der (–1 er riktig)***

else if **A[m]** = **x** – ***da har vi funnet den (m er riktig)***

else if **A[m]** < **x** –

er x *i* A, *så må den være mellom* **[m+1... h]**

BS(A, x, **m+1**, **h**) ***vil returnere riktig resultat***

else **A[m]** > **x** –

er x *i* A, *så må den være mellom* **[l ... m–1]**

BS(A, x, **l**, **m–1**) ***vil returnere riktig resultat***

Løkke-invariant

```
int sum(int n) {
    if (n == 0) return 0;
    else return n + sum(n–1);
```

basis – gir riktig sum(0) =0

hvis sum(n–1) gir riktig = $\sum_{i=0}^{n-1} i$ så er sum(n) = n + sum(n–1) = $\sum_{i=0}^{n} i$

```
int sumw(int n) {

    int i=0, r=0;

    while (i != n)  {

        r= r+i;
        i++;
// r'= r+i, i'=i+1
    }

    return r;
}
```

1. **Løkke-invariant, LI:** $r = \sum_{k=0}^{i} k$

2. **Initialisering:** i=0 & r=0 = $\sum_{k=0}^{i=0} k$ **=> LI**

3a. **hvis LI:** $r = \sum_{k=0}^{i} k$ **holder før kroppen**

3b. **så holder LI':** $r' = \sum_{k=0}^{i'} k$ **etter kroppen**

4. **Utgang**: **LI:** $r = \sum_{k=0}^{i} k$ **& i =n => ** $r = \sum_{k=0}^{n} k$

```
int sumw(int n) {

    int i=0, r=0;

    while (i != n) {

        i++;
        r= r+i;
    // i'= i+1, r'= r+i'
    }

    return r;
}
```

Løkke-invariant: eksempel 1.

```
/**  beregner heltalls kvosient samt resten
     @param x >= 0
     @param y > 0
     @return (q, r) sa. x= q*y + r  &  0 <= r < y  &  0 <= q
*/
divr(int x, int y)  {
  int q = 0 ; int r = x ;
```

initialisering: q = 0 & r = x >= 0 → **x= q*y + r & 0 <= r & 0 <= q**

```
  while (y <= r)  {
```

LI: 0 <= r & x = q*y + r & 0 <= q

– anta at den gjelder ved inngang, samt **y <= r**

```
    q = q+1 ;
    r = r – y;
```

– da gjelder, etter løkkekroppen:

q’ = q+1 & **0 <= q** → **0 <= q’** &

r’ = r–y & **0 <= r** & **y <= r** → **0 <= r’**

q’*y + r’ = (q+1)*y + (r–y) = q*y + y + r – y = q*y + r = **x**

– dvs. LI opprettholdes gjennom kroppen

```
  }
```

utgang fra løkken: **LI** & **r<y** → **x = r + q*y & 0 <= r < y & 0 <= q**

```
  return (q, r) ;  }
```

Løkke-invariant: eksempel 2.

```
/**     beregner største felles divisor
        @param x1 > 0
        @param x2 > 0
        @return y2 = gcd(x1,x2) */
gcd(x1,x2) {
    y1= x1; y2= x2;        ←  initialisering: x1 = y1 & x2 = y2 → gcd(x1,x2) == gcd(x1,x2)

    while (y1 != 0) {
                           ←  LI:  gcd(y1,y2) = gcd(x1,x2) – anta at den gjelder her
        if (y2 < y1)
            (y1,y2) = (y2,y1);     – gcd(x1,x2) = gcd(y1,y2) = gcd(y2,y1) = gcd(y1',y2')

        else // (y2 >= y1)
            y2= y2–y1;             – gcd(x1,x2) = gcd(y1,y2) = gcd(y1,y2-y1) = gcd(y1,y2')

                           ←  LI': cd(y1',y2') = gcd(x1,x2)
    }
                              utgang: LI  &  y1 = 0 →
                           ←     gcd(x1,x2) = gcd(y1,y2)
                                            = gcd(0,y2) = y2

    return y2;
}
```

Hvis gcd(y1,y2) = z >=1 & y2 >= y1, så

*) y1 = z*k1 <= z*k2 = y2 & gcd(k1,k2) = 1

Men da:

y2'= y2–y1 = z*(k2–k1) & gcd(k1, k2–k1) = 1

hvis ikke, dvs. gcd(k1,k2–k1) = v > 1, da

k1= v*a & k2–k1= v*b, så

k2= v*b+v*a = v*(b+a)

dvs. da også gcd(k1,k2) = v >1 – motsier *)

Oppsummering

1. ***Rekursjon** – “**Splitt og hersk**”*

   – bestem hva som må gjøres i basis tilfelle(r)

   – konstruer (“hersk”) en løsning fra (rekursive) løsninger for (“splitt”) noen mindre instanser

2. *Enhver induktiv datatype (nat, int, lister, trær, ...) gir opphav til rekursive algoritmer*

3. *Rekursjon vs. iterasjon (rekursjon implementeres iterativt med bruk av stabel)*

4. *Kompleksitet av rekursiv funksjon avhenger av*

   – antall noder i rekursjonstre (“splitt”)

   - *dybden (høyden) av treet – hvor stort steg mot basis utgjør hver “splitting”*
   - *antall rekursive kall (bredden av treet) på hvert nivå*

   – arbeidsmengden for å konstruere en løsning utfra løsninger for mindre instanser (“hersk”)

5. ***Korrekthet***

   – bestem rekursjons-invarianten

   - ***verifiser** at basistilfelle(r) etablerer invarianten*
   - *under **antakelse** at rekursive kall etablerer invarianten, **vis** at konstruksjonen vil opprettholde den*

   – bestem løkke-invariant

   - ***vis** at den gjelder etter initialisering (like før inngangen i løkken)*
   - *under **antakelse** at den gjelder før løkkekroppen, **vis** at den gjelder også etter denne*