# Ordbøker

## I. Ordbok / Prioritetskø = Sekvens / kø

**vilkårlig / minste nøkkel**

**vilkårlig / første Posisjon**

## II. Implementasjon med Sequence

## III. Implementasjon med BST (Binary Search Tree)

## IV. Implementasjon med Hash Tabell

**hash funksjoner**

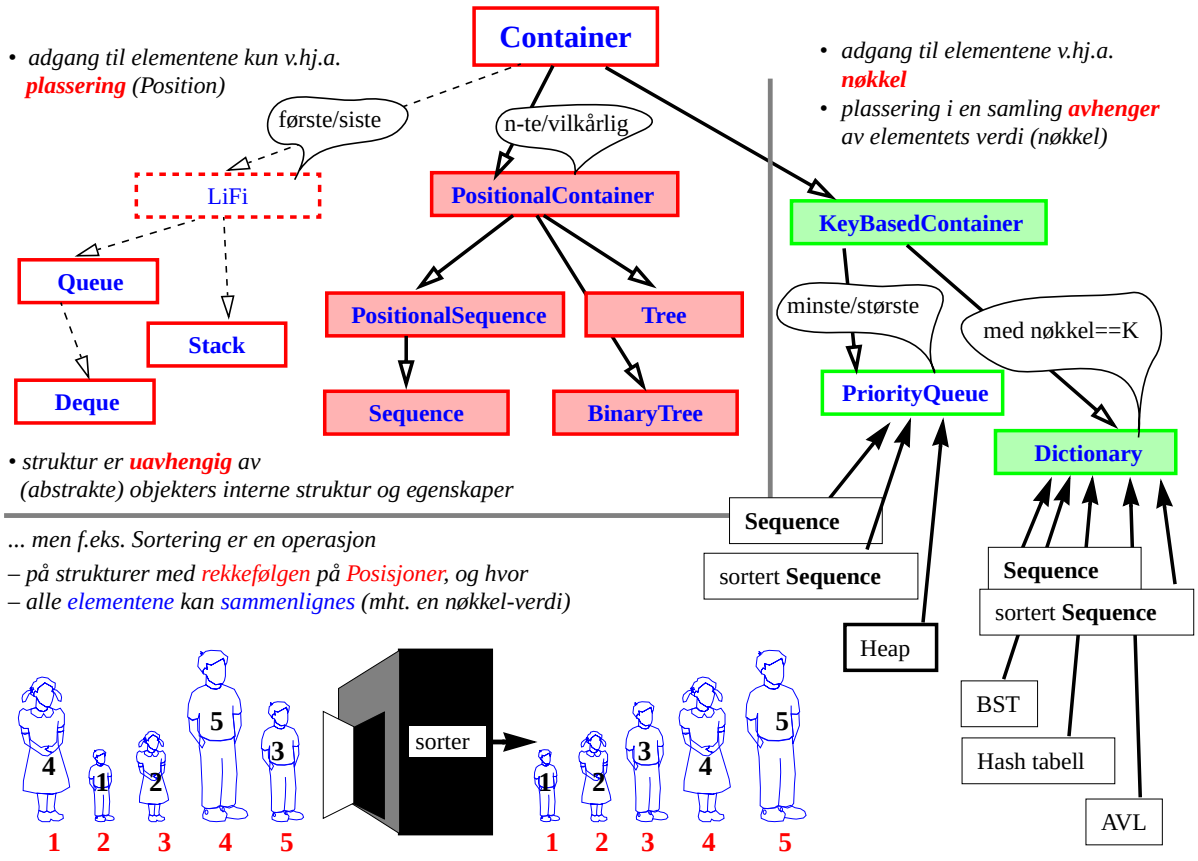
**håndtering av kollisjoner**

Kap. 7: 7.1, 7.2, 7.3, 7.6.1, 7.7 (kursorisk 7.6.2., 7.6.3, 7.7; unntatt 7.4, 7.5)

## V. Quick-Sort

Kap.8: 8.1.1, 8.3 (kursorisk 8.1.2, 8.4, 8.5)





# En Ordbok

*er en funksjon*

| *f*: *Nøkler* | → | *DataObjekter* |
|---|---|---|
| personnummer | → | Person |
| fødselsdato + kjønn (+???) | → | personnummer |
| navn + adresse | → | telefonnummer |
| navn | → | telefonnummer |
| studentnavn (+???) | → | studentID |
| studentID | → | karakterutskrift |
| x | → | $x^2$ |

*som tillatter en*

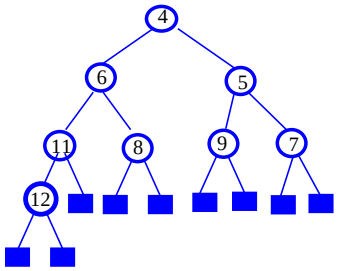
- å sette inn nye nøkkel-objekt par
- finne et objekt med en gitt nøkkel
- (finne alle objektene med en gitt nøkkel)
- fjerne et objekt med en gitt nøkkel
- finne neste/forrige objektet (mht. nøkkel)

```
public interface DictionaryWithoutLocators extends KeyBasedContainer {
        void  insert              (Object key, Object o)
      Object  find                (Object key)
  Enumeration findAll             (Object key)
      Object  remove              (Object key)
 - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
      Object  closestElemAfter    (Object key)
      Object  closestElemBefore   (Object key)
      Object  closestKeyAfter     (Object key)
      Object  closestKeyBefore    (Object key)
}
```



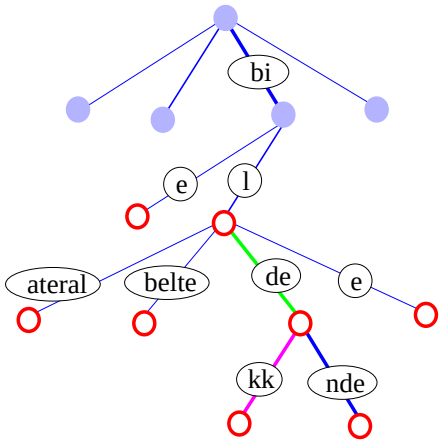
# Implementasjon av Dictionary

ikke Haug




hvordan finner man ‘11’ ... ?

ikke Tries



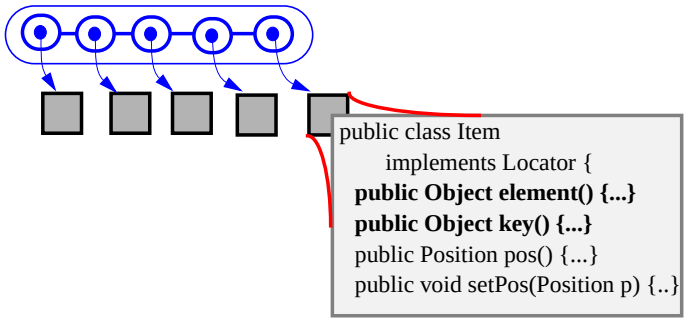

hva om nøkler ikke er String/Sequence ... ?

# II. Implementasjon av Dictionary – *med Sequence*

## I Data Representasjon

Sequence, der hver Position

lagrer en (Locator)Item




## II Data Struktur

```
class DicSequence implements Dictionary {
    private Sequence S;
    private Comparator cp;
    /**  @param sq bør være tom sekvens
         @param c Comparator for sammenlikning av Item med hensyn til key-objekter */
    public DicSequence(Sequence sq, Comparator c) {
       S = sq; cp = c; }
```

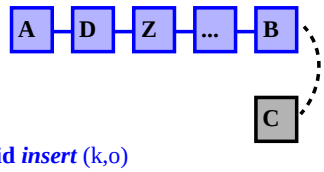
## III Data Invariant

- Item i S kan sammenlignes med cp
- S er usortert
- S er sortert



# Implementasjon av Dictionary – *med Sequence* *(med LL/DL)*

## Data Invariant: ingen – usortert




**void *insert*** (k,o) **O**(1)

```
sq.insertLast ( new Item(k,o) );
```

**Object *find*** (Object k): **O(n)**

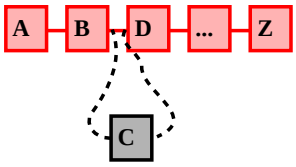
```
Item ko = new Item(k,null);
Object ret; boolean fant = false;
Position p = sq.first();
try{ while ( !fant ) {
  if (cp.isEqualTo(p.element(), ko)
  { ret = ( (Item)p.element() ).element();
    fant = true; }
  else p = sq.after(p);
} }
catch (BoundaryExc e) { ret = null;}
return ret;
```

**Object *remove*** (Object k) : find ... **O(n)**

**Enumeration *findAll*** (Object k) : find ... **Θ(n)**

**Object *closestAfter/Before*** (Object k) : find ... **Θ(n)**

## Data Invariant: Sortert stigende




**void *insert*** (k,o) **O(n)**

```
Item ny= new Item(k,o);
if ( sq.isEmpty() )
  sq.insertFirst(ny)
else if ( cp.isLessOrEqual(ny, sq.first().element()) )
  sq.insertFirst(ny)
else if ( cp.isGreaterOrEqual(ny, sq.last().element()) )
  sq.insertLast(ny)
else Position c = sq.first()
  while (cp.isGreaterThan(ny, c.element() )
    c= sq.after(c)
  sq.insertBefore(c,ny)
```

**Object *find*** (Object k) : ... **O(n)**

**Object *remove*** (Object k) : find ... **O(n)**

**Enumeration *findAll*** (Object k) : find ... **O(n)**

**Object *closestAfter/Before*** (Object k) : find ... **O(n)**

# Implementasjon av Dictionary – *med Sequence* *(med Array)*

**III. DATA INVARIANT** :
**Sortert Array A[l...h]** :

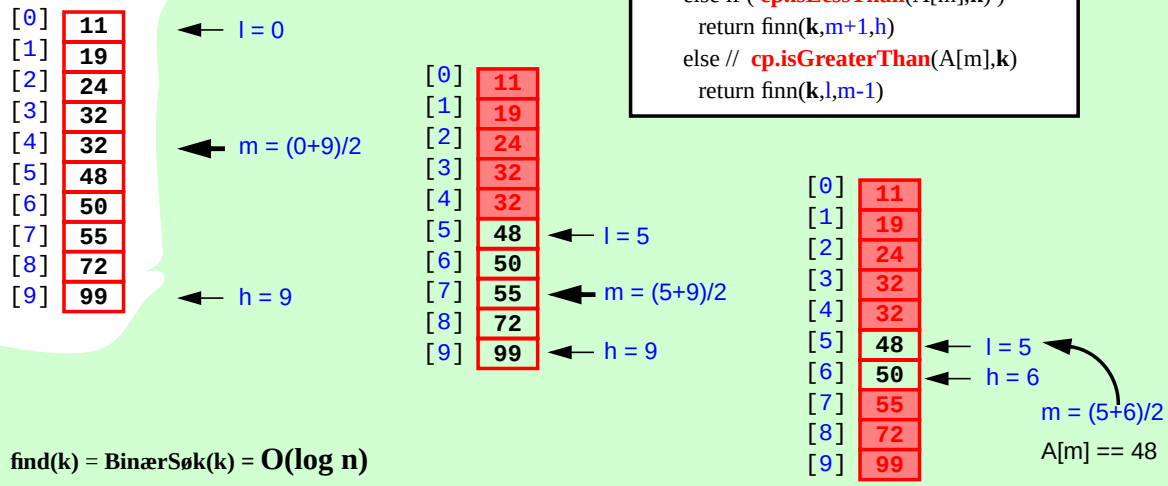
- **hvis** i < j **så** **cp.isLessOrEqual**(A[i], A[j])
- **hvis** **cp.isLessThan**(A[i], A[j]) **så** i < j

  **hvis** **cp.isGreaterThan**(A[i], A[j]) **så** i > j

**BinærSøk**

```
find(k) : find(k, l, h)
  if ( l > h ) return -1
  else
     m = (l+h) / 2
     if ( cp.isEqualTo(A[m],k) )
       return A[m].element();
     else if ( cp.isLessThan(A[m],k) )
       return finn(k,m+1,h)
     else //  cp.isGreaterThan(A[m],k)
       return finn(k,l,m-1)
```

< **cp.isLessThan**



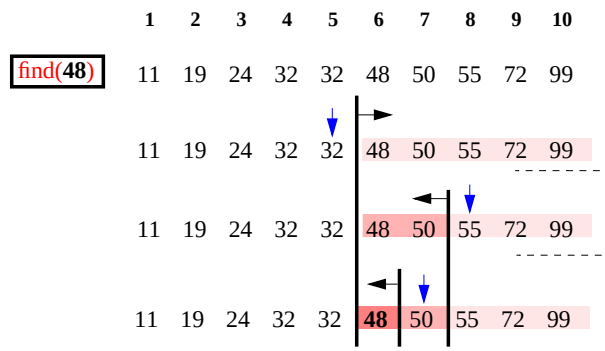

**find(k) = BinærSøk(k) = O(log n)**



# Implementasjon av Dictionary (så langt)

| operasjon | usortert **Sequence** Array | usortert **Sequence** DL | sortert **Sequence** Array | sortert **Sequence** DL |
|---|---|---|---|---|
| Container | | | | |
| size | 1 | 1 | 1 | 1 |
| isEmpty | 1 | 1 | 1 | 1 |
| elements | n | n | n | n |
| Dictionary | | | | |
| find | n | n | log n | n |
| findAll | n | n | log n (+ s) | n |
| insert | 1 | 1 | n | n |
| remove | n | n | n | n |
| closestAfter/Before | n | n | n | n |

# III. Binært Søk → Binære Søketrær

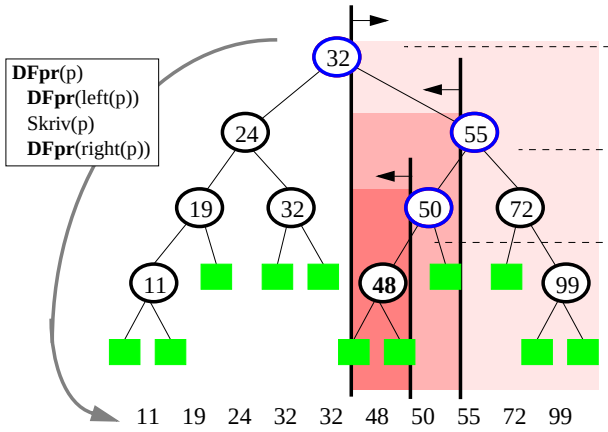



for alle **m**, *x* :
- A[*x*] > A[**m**] : *x* > **m**
- A[*x*] < A[**m**] : *x* < **m**

: A[**m**]=32 < **48** – søk til høyre

: A[**m**]=55 > **48** – søk til venstre

: A[**m**]=50 > **48** – søk til venstre




key(**m**)=32 < **48** – søk i høyre subtre

key(**m**)=55 > **48** – søk i venstre subtre

key(**m**)=50 > **48** – søk i venstre subtre

11 19 24 32 32 48 50 55 72 99

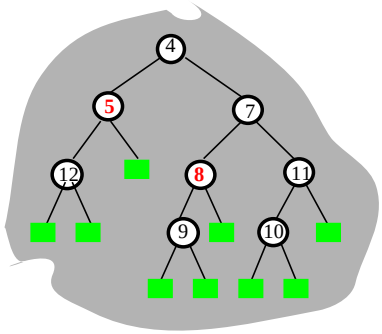
for alle **m**, *x*:
- *x* i **høyre subtre** av **m** : key(*x*) ≥ key(**m**)
- *x* i **venstre subtre** av **m**: key(*x*) ≤ key(**m**)



# Binære Søketrær

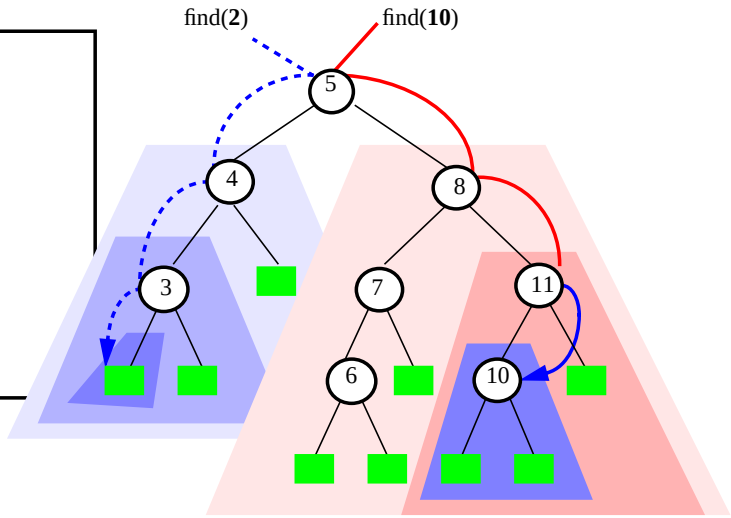
**er et Binært Tre *T*** (for lagring av nøkler, eller objekter med nøkler) som tilfredstiller :

**BST INVARIANT** (“relasjonell”)
for hver node ***p*** :
for enhver node *v* i ***p***'s **venstre subtre** : key(*v*) ≤ key(***p***)
for enhver node *h* i ***p***'s **høyre subtre** : key(*h*) ≥ key(***p***)
*eller:*
*DFS (inOrder) enumerering av noder gir en ordnet sekvens*



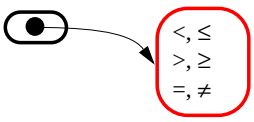

```
find(k) : findPos(new Item(k,null),T.root())
findPos (Object ko, Position p)
  if ( isExternal(p) ) - k finnes ikke
  else if ( cp.isEqualTo(ko,key(p)) ) - funnet
  else if ( cp.isLessThan(ko,key(p)) )
      // let videre i venstre subtre
      findPos (ko,leftChild(p))
  else   // cp.isGreaterThan(ko,key(p))
      // let videre i høyre subtre
      findPos (ko,rightChild(p))
```

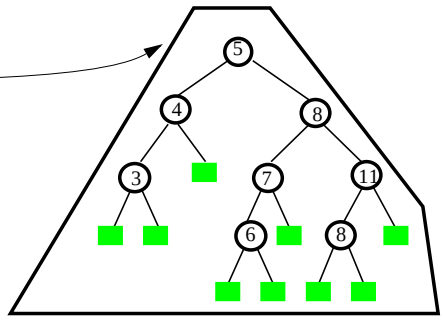
= *O(* **height(T)***)*



# Implementasjon av Dictionary – *med BST*

```
public class BSTDict implements Dictionary {
   protected  BinaryTree BST
   protected Comparator cp
```




```
   protected boolean DI()
   { return DI( BST.root(),new Item(–ω,null), new Item(+ω, null) ); }

   protected boolean DI(Position p, Object l, Object h)
   {   if (BST.isExternal(p)) return true;
       else if ( cp.isLessThan(p.element(), l) || cp.isGreaterThan(p.element(), h) ) return false;
       else return    (DI(BST.leftChild(p), l, key(p)) && DI(BST.rightChild(p), key(p),h)) ; }

   protected Object findPos(Object k) { return findPos(k,BST.root());}

   public Object find(Object k)
       { Position p = findPos(k) ;
           if ( BST.isExternal(p) ) throw new NoSuchKey("...");
           return ((Item) p.element()) . element() ; }

   public Enumeration findAll(Object k)
       { velg en implementasjon av Enumeration E= new Enum();
           findAll(k, BST.root(), E) ;
           return E;  }
   . . . insert, remove
```

Position **findPos**(Object k, Position p)
{ ... }

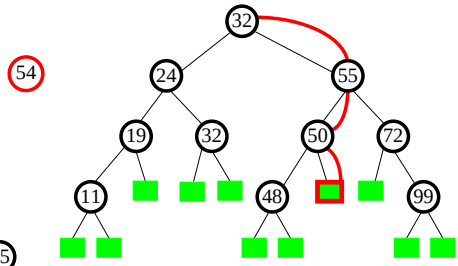
```
void findAll(Object k, Position p, Enum E) {
   f= findPos(k,p);
   if (p != null && BST.isInternal(p))
      E.add( ((Item)p.element()).element() );
      findAll(k, BST.leftChild(p), E);
      findAll(k, BST.rightChild(p), E);
}
```



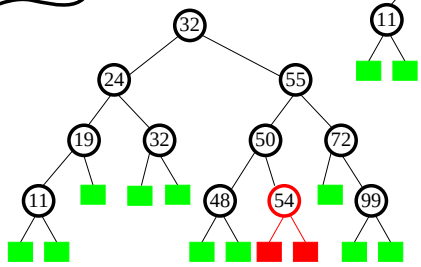
# insert(Object k, o) i et BST = settInn( BST.root(), k, o )

```
settInn(Position v, Object k, Object o)  {
   Position p = findPos(k, v)
```

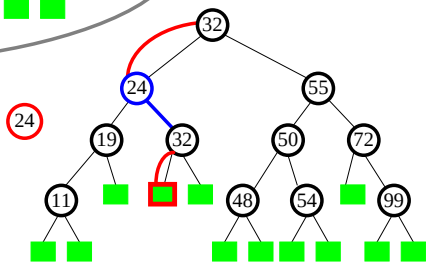
sikrer
**BST INVARIANT**

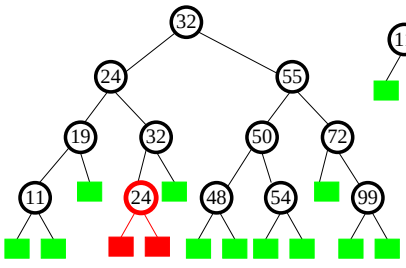



```
   if ( BST.isExternal(p) )
      ny Intern node: expandExternal(p)
      p.setElement(new Item(k,e) )
```




```
   else
      settInn(BST.rightChild(p), k, e)
}
```




= *O*(**findPos**) = *O*(**h(BST)**)

# Object remove(k) fra et BST

Position p = **findPos**(k)

1. **if** ( p er et **blad** ) // isExternal(p)
   - NoSuchKey

2. **else if** **leftChild**(p) og **rightChild**(p) er **blader**
   - fjern p

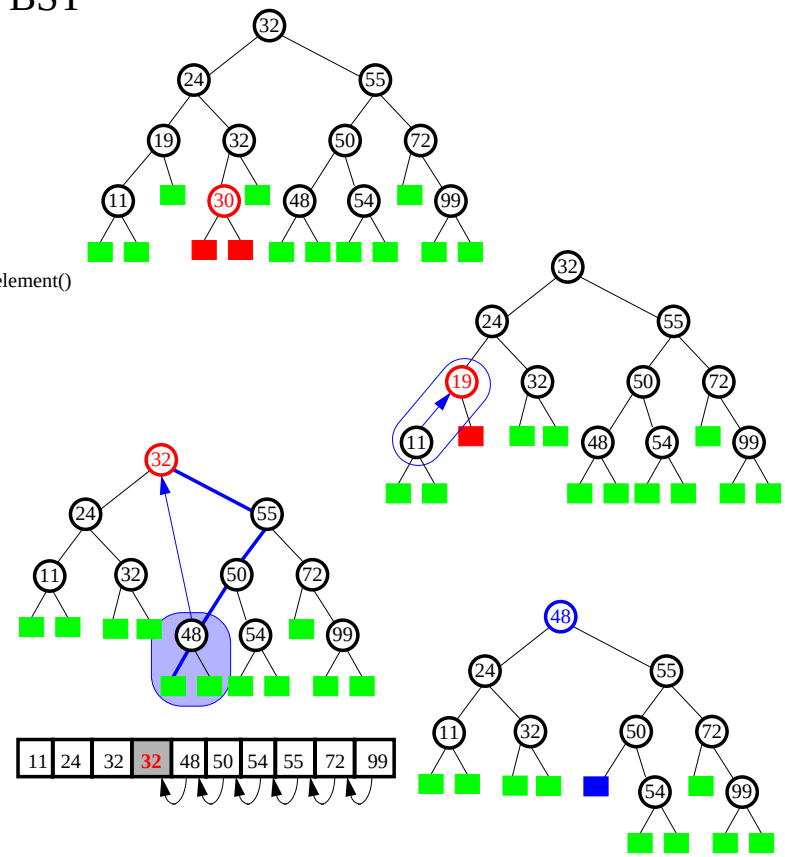
return ((Item)removeAboveExt(leftChild(p)).element()

3. **else if** **nøyaktig et barn** er et **blad b**
   - erstatt p med andre barnet

return ...removeAboveExt(b)...

4. **else** // **ingen av barna** er et **blad**
   - hold ((Item)p.element()).element() til return
   - finn n = ‘‘neste til høyre’’ for p
     n = **rightChild**(p)
     while (! isExternal(leftChild(n)))
       n = **leftChild**(n)
   - replace(p, n.element())
   - fjern n (2. eller 3.)

= $O$(**findPos**) = $O$(**h(BST)**)





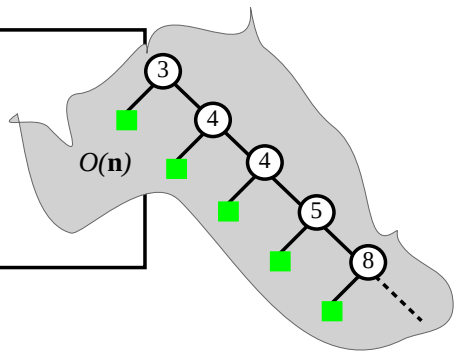

# Implementasjon av Dictionary

| | usortert **Sequence** | | sortert **Sequence** | | BST |
|---|---|---|---|---|---|
| **operasjon** | **Array** | **DL** | **Array** | **DL** | |
| Container | | | | | |
| size | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| isEmpty | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| elements | n | n | n | n | n |
| Dictionary | | | | | |
| find | n | n | log n | n | hgh(n) |
| findAll | n | n | log n (+ s) | n | hgh(n) |
| insert | 1 | 1 | n | n | hgh(n) |
| remove | n | n | n | n | hgh(n) |
| closestAfter/Before | n | n | n | n | hgh(n) |

# Balansering

*– hvis BST er balansert får vi* hgh(n) = **O**(log n)
*– dette er det som skjer i gjennomsnittstilfelle (gjennomsnittskompleksistet for BST er* **O**(log n)*)*

```
settInn(Position v, Object k, Object o) {
   Position p= findPos(k,v);
   if (isExternal(p))
      expandExternal(p)
      p.setElement(new Item (k,o))
   else
      settInn(rightChild(p),k,o) }
```




insert(**3**,A);
insert(**4**,B);
insert(**4**,B);
insert(**5**,C);
insert(**8**,D);

**hgh(BST)** = *O*(**n**)

tilsvarende uhell kan skje ved en serie remove(k)

# AVL Tre

**er et Binært Tre *T*** (for lagring av nøkler, eller objekter med nøkler)
som tilfredstiller :

1. **BST INVARIANT** (“relasjonell”) – for hver intern node *p* :
   for hver node *v* i *p*’s venstre subtre : key(*v*) ≤ key(*p*)
   for hver node *h* i *p*’s høyre subtre : key(*h*) ≥ key(*p*)
2. **AVL INVARIANT** (“strukturell”) – hver intern node *p* er **balansert** :
   | **hgh**(***leftChild***(*p*)) – **hgh**(***rightChild***(*p*)) | ≤ 1

7.2. Et AVL Tre *T* som lagrer *n* nøkler har høyden *h*(*T*) = *O*(**log n**)



# IV. Implementasjon av Dictionary – *med HashTabell*

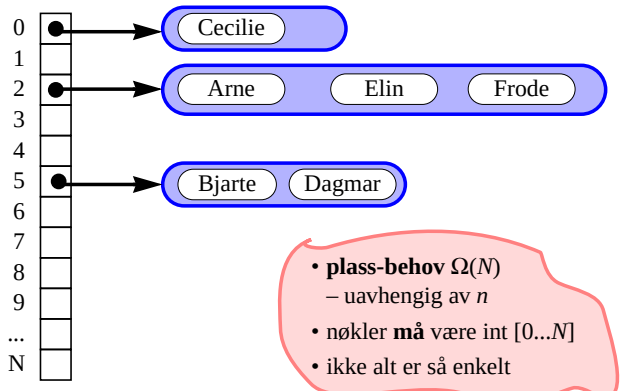
| **key : elementer** | → | **nøkkel** | **injektiv** | **TO** |
|---|---|---|---|---|
| Personer | → | personnummer | + | + |
| Personer | → | fødselsår | – | + |
| variable i et program | → | type (int, boolean, Tree...) | – | – |

Arne(1972), Bjarte(1975), Cecilie(1970), Dagmar(1975), Elin(1972), Frode(1972)

int **key**(Person p) { return p.fødselsår }
int **hash**(int k) { return k – 1970 }

**key : elementer → nøkkel**
**hash :** int **nøkkel** → int **hashkode**

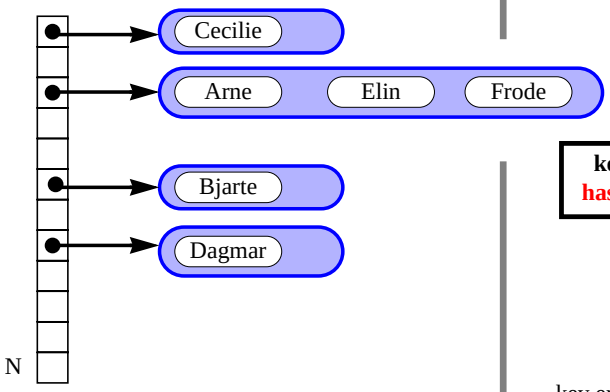
```
Sequence[] H = new Sequence[N]
```




- **plass-behov** Ω(*N*)
  – uavhengig av *n*
- nøkler **må** være int [0...*N*]
- ikke alt er så enkelt

```
insert(int k, Object o) {                          O(1)
   H[hash(k)].insertFirst(o) }
find(int k) {                                      O(1)
   Sequence S = H[hash(k)]
   return S.first().element() }
remove(int k) {                                    O(1)
   Sequence S = H[hash(k)]
   S.remove(S.first())}
remove(Person p) {                                 O(|H[hash(k)]|)
   k = p.fødselsår;
   Sequence S = H[hash(k)]
   finn p i S}
```

```
Sequence[] H = new Sequence[N]
```




```
int hash(int k) { return k – 1970 }
insert(int k, Object o) {
    H[hash(k)].insertFirst(o) }          O(1)
find(int k) {
    Sequence S = H[hash(k)]
    return S.first().elem() }            O(1)
remove(int k) {
    Sequence S = H[hash(k)]
    S.remove(S.first())}                 O(1)
```

injektiv hash:
hash(k1) = hash(k2) hviss k1 = k2

# Et typisk eksempel ...

Nøkkel er personnummer og vi skal samle alle ansatte.
Vi kan ikke indeksere tabellen med persnr
– det er jo bare 250 ansatte!!

**key :** **personer** → **persnr**
**hash :** int **persnr** → int **siste 4 siffrene**

| | | |
|---|---|---|
| Arne | 123456 12345 | 2345 |
| Elin | 654321 22345 | 2345 |
| Frode | 212131 92345 | 2345 |

key er injektiv men hash er det ikke

```
insert(int pn, Object o) {
    H[hash(pn)].insertFirst(o) }         O(1 )
find(int pn) {
    Sequence S = H[hash(pn)]
    finn pn i S }                        O(|S| )
remove(int pn) {
    Sequence S = H[hash(pn)]
    finn pn i S og fjern }               O(|S| )
```

GENERELT: hash er ikke injektiv
forventet/gjennomsnittlig |S| = load factor = n/N < 1



# Hash funksjoner

1. Gitt en nøkkel *n* – et Objekt! – **konverter den til int** *k* = **k**(*n*)
2. Gitt en int-representasjon av nøkkel *k* = **k**(*n*) – finn en **hashkode** **hash**(*k*)
   a) hvis **cp.isEqualTo**(*n1*,*n2*) så **hash**(**k**(*n1*)) == **hash**(**k**(*n2*)) der **cp** er den aktuelle **Comparator** for nøkler
   b) **hash**(*k*) < *N* – der *N* er aktuell størrelse av tabellen
   c) **hash** skal gi ‘‘jevn distribusjon‘’ – unngå kollisjoner

**1. Key** bør men trenger ikke å være injektiv:

**k** : String → int
**k**(*streng*) = summen av ASCII koder av alle tegn i *streng*’en
**k**(“*alle*”) = 97 + 108 + 108 + 101 = 414
**k**(“*anna*”) = 97 + 110 + 110 + 97 = 414

**A – 65**
**...**
**a – 97**
**e – 101**
**l – 108**
**n – 110**

**2. Hash**

a) hvis *k1*==*k2*, så **hash**(*k1*) == **hash**(*k2*), siden **hash** er en funksjon

b) for hver *k* er : **hash**(***k***) = ***k*** **mod** ***N*** < ***N***

c) ingen ‘‘beste, generelle’’ hash-funksjon :
– unngå konflikter : **hash**(*k*) = 1 er ikke bra
– minimaliser gjennomsnittlig lengde for hver samling hash(k): find(*k*) = finn *k* i Container **hash**(*k*)
– alt avhenger av forventet distribusjon av data-nøkler ...
– ***N* bør være et primtall**

| | | | mod 10 : | | | mod 11 : | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 30 | 40 | | 0 | 0 | 0 | 9 | 8 | 7 |
| 23 | 33 | 43 | | 3 | 3 | 3 | 1 | 0 | 10 |
| 25 | 35 | 45 | | 5 | 5 | 5 | 3 | 2 | 1 |

– **ofte brukt hash-funksjon**

**hash**(***k***) = (***a*** *****k*** + ***b***) **mod** ***N***, der *N* er et primtall, *a* > 0, *b* ≥ 0

# Linear Probing

Ansatte identifseres med
nøkkel = personnr.: 11-siffer heltall

ansatt[] H[98765432101] ....

men det er kun 250 ansatte.

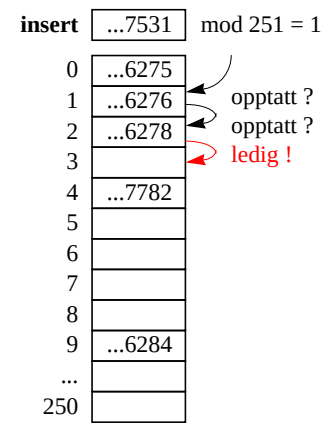
ansatt[] H[250]

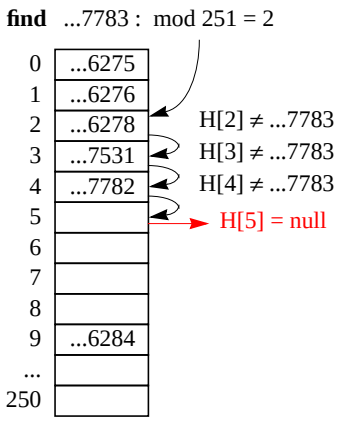
hash:12345676275
mod 250 ...
mod 251 ...
siste 4 siffre mod 251

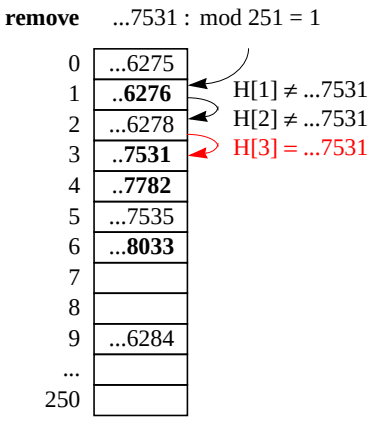
hash(12345676275)
= 6275 mod 251 = 0

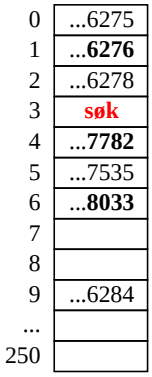
ansatt[] **H[251]**

```
int hash(int k) {
  s = siste 4 siffrene fra k
  return (s % 251) }
```





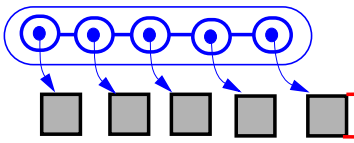

# Dictionary med Locator

```
public interface Locator {
    Object element()
    Object key()
    Container container()
    boolean isContained()
```

```
public interface (Ordered)DictionaryWithoutLocators ... {
            void  insert          (Object key, Object o)
          Object  remove          (Object key)
          Object  find            (Object key)
      Enumeration  findAll        (Object key)
          Object  closestElemAfter  (Object key)
          Object  closestElemBefore (Object key)
          Object  closestKeyAfter   (Object key)
          Object  closestKeyBefore  (Object key)
}
```

```
public interface (Ordered)Dictionary ... {
          Locator  insert          (Object key, Object o)
            void   remove          (Locator loc)
          Locator  find            (Object key)
      Enumeration  findAll         (Object key)
          Locator  after           (Locator loc)
          Locator  before          (Locator loc)
          Locator  closestAfter    (Object key)
          Locator  closestBefore   (Object key)
}
```

# Dictionary med Locator – *med Sequence* *(usortert)*



```
public class Item  implements Locator {
  public Object element() {...}
  public Object key() {...}
  public Position pos() {...}
  public void setPos(Position p) {..}
```

**void *insert*** (k,o) **O**(1)
```
  sq.insertLast ( new Item(k,o) );
```
**private Item *findItem*** (Object k): **O(n)**
```
  Item ko = new Item(k,null);
  Item ret; boolean fant = false;
  Position p = sq.first();
  try{ while ( !fant )  {
    if (cp.isEqualTo(p.element(), ko)
    { ret =  (Item)p.element() ;
      fant = true; }
    else p = sq.after(p);
  } } catch (BoundaryExc e) { ret = null;}
  return ret;
```
**Object *find*** (Object k): **O(n)**
```
  Item ret = findItem(k);
  if (ret != null) return ret.element(); else return null;
```
**Object *remove*** (Object k) **O(n)**
```
  Item ret = findItem(k);
  if (ret != null) sq.remove(ret.pos()); return ret.element();
  else return null;
```

**Locator *insert*** (k,o) **O**(1)
```
  Item ko = new Item(k,o);
  ko.setPos( sq.insertLast ( ko ) );
  return ko;
```
**Locator *find*** (Object k): **O(n)**
```
  Item ko = new Item(k,null);
  Locator ret; boolean fant = false;
  Position p = sq.first();
  try{ while ( !fant )  {
    if (cp.isEqualTo(p.element(), ko)
    { ret = (Item)p.element() ;
      fant = true; }
    else p = sq.after(p);
  } }
  catch (BoundaryExc e) { ret = NO_SUCH_KEY;}
  return ret;
```
**void *remove*** (Locator loc) **O(1)**
```
  sq.remove( ((Item)loc).pos() );
```



# Dictionary og OrderedDictionary

package jdsl.core.api

```
public interface Locator {
    Object element()
    Object key()
    Container container()
    boolean isContained()
```

```
public interface KeyBasedContainer extends Container {
  Enumeration locators()
  Enumeration keys()
/**  Inserts a <key, element> pair */
  Locator insert(Object k, Object o)
/**  Removes an element from this Container. */
  void remove(Locator)
/**  Makes a locator but does not insert it */
  Locator makeLocator(Object k, Object o)
/**  Inserts a Locator into this Container. */
  void insert(Locator)
  Object replaceElement(Locator l, Object o)
/**  Changes the key of Locator's element.
     @return the old key of this Locator's element */
  Object replaceKey(Locator, Object)
}
```

```
public interface Dictionary extends KeyBasedContainer {
/** @param key to search for an object
    @returns Locator mapped to key – NO_SUCH_KEY if not found
    @exception InvalidKeyExc if key is not valid for this Cotainer  */
  Locator find(Object key)
/** @param key to search for an object
    @returns all Locators mapped to key – empty if not found
    @exception InvalidKeyExc if key is not valid for this Cotainer */
  Enumeration findAll(Object key)
/** Special value (rather than exception) returned when no object with
      a specified key was found */
  Locator NO_SUCH_KEY;
```

```
public interface OrderedDictionary extends Dictionary {
/** @returns Locator sequentially after/before loc – BOUNDARY_VIOLATION if goes out of scope
    @exception InvalidLocatorExc if loc is invalid (e.g. not within this Container)  */
  Locator after/before(Locator loc)
/** @returns a Locator whose key is equal to or just after/before key  – BOUNDARY_VIOLATION if no such exists
    @exception InvalidKeyExc if key is invalid for this Container  */
  Locator closestAfter/Before(Object key)
/** Special Locator (rather than exception) returned when a requested Locator was found */
  Locator BOUNDARY_VIOLATION;
```

# Oppsummering

- *Ordbok (symboltabell)*
  *avbildning fra nøkler til dataobjekter*

- *Ordbok og Ordnet Ordbok ADT*
  *– med nøkkel-data objekter*
  *– med Locator*

- *Implementasjon*
  *Sekvens*
    *– usortert (DL, Array)*
    *– sortert (DL, Array)*
  ***Binære Søketrær***
    *– innsetting/fjerning*
    *– balansering*
  ***Hash Tabeller***
    *– valg av hash-funksjon*
    *– kollisjoner*



# Sortering

- Bubble $\Theta(n^2)$

prioritetskø basert

- Selection $\Theta(n^2)$
- Insertion $O(n^2)$
- Heap $O(n \log n)$

‘‘splitt og hersk’’

- Merge $O(n \log n)$
- Quick $O(n \log n)$

- Bucket
- Radix

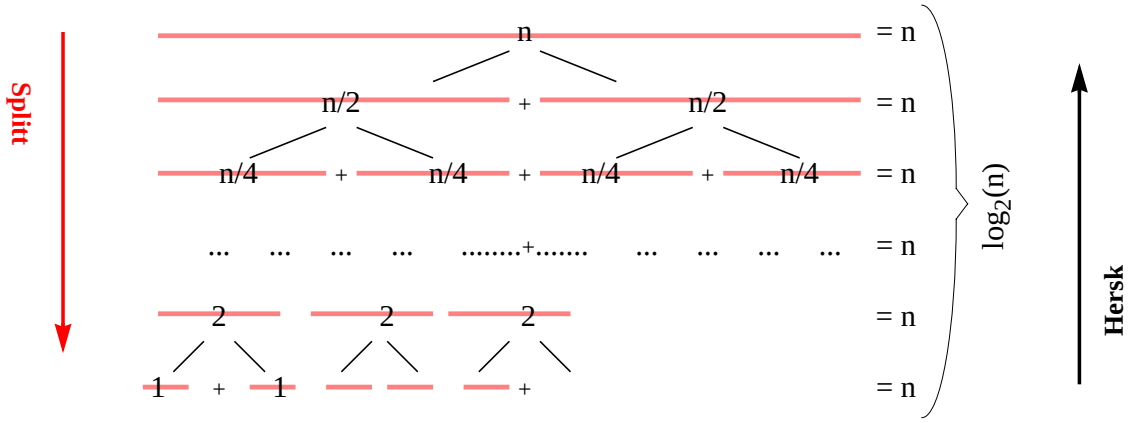
# Merge-Sort

**MS**(*S*) :

**Splitt** : hvis *S* har minst 2 elementer
del *S* i midten i to like lange (+/– 1) subsekvenser *S1* og *S2*

**Rekursjon** : sorter rekursivt **MS**(*S1*) og **MS**(*S2*)

**Hersk** : flett de sorterte resultatene til en sortert hele




MS(n) = $O$ (n * log(n))

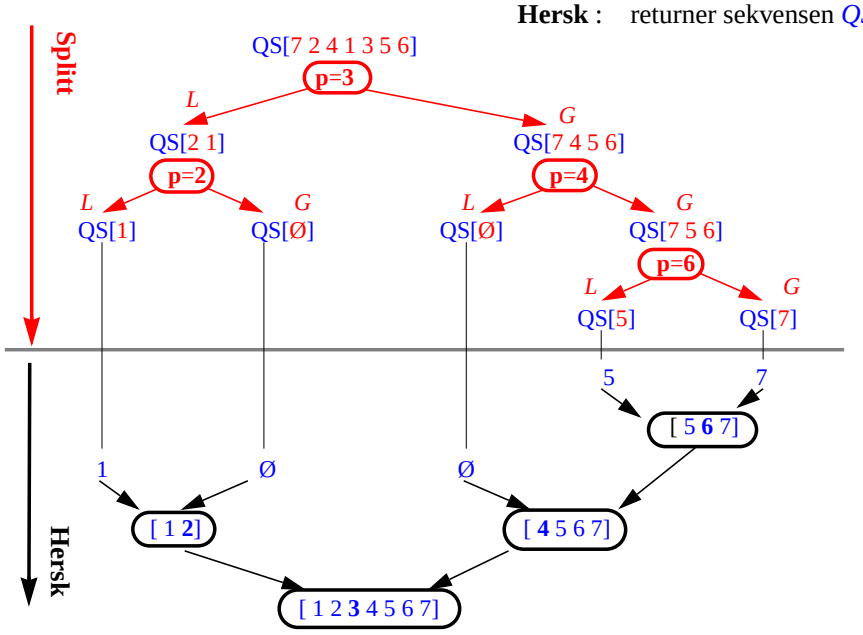


# Quick-Sort

**Splitt** : hvis *S* har minst 2 elementer
– velg et element ***p*** fra *S* (pivot) og
– del *S* i tre mengder *L*, *E* og *G* slik at :
*L* inneholder alle elementene mindre enn ***p***
*E* inneholder alle elementene lik ***p***
*G* inneholder alle elementene større enn ***p***

**Rekursjon** : sorter rekursivt **QS**(*L*) og **QS**(*G*)

**Hersk** : returner sekvensen *QS(L)–E–QS(G)*



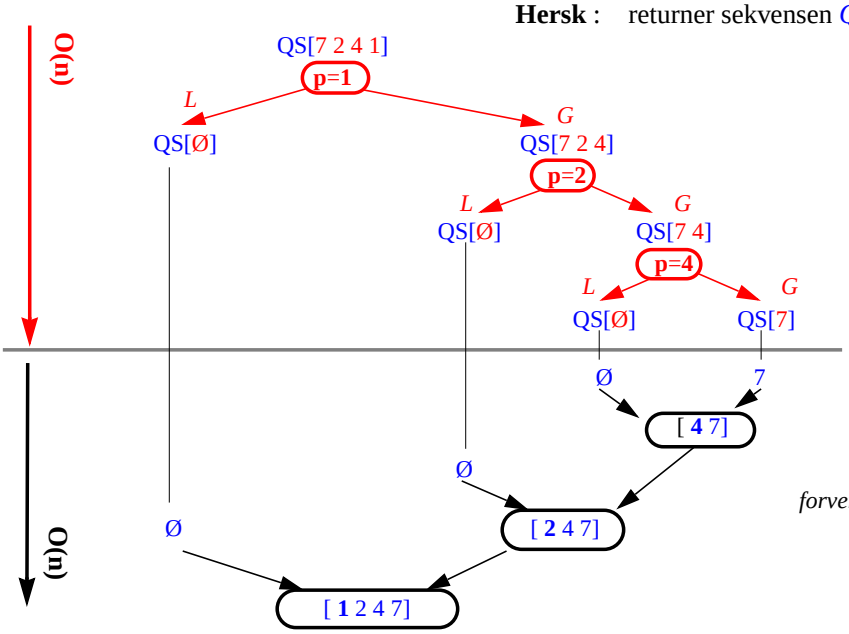

$O$ (n * log(n)) ... ?

# Quick-Sort

**Splitt** : hvis *S* har minst 2 elementer
– velg et element ***p*** fra *S* (pivot) og
– del *S* i tre mengder *L*, *E* og *G* slik at :
*L* inneholder alle elementene mindre enn ***p***
*E* inneholder alle elementene lik ***p***
*G* inneholder alle elementene større enn ***p***

**Rekursjon** : sorter rekursivt **QS**(*L*) og **QS**(*G*)

**Hersk** : returner sekvensen *QS(L)–E–QS(G)*




*verste tilfelle kompleksitet er*

$O(n^2)$

**valg av pivot** :
– siste i S
– midterste i S
– midterste bland {første, midterste, siste} i S
– random

*forventet/gjennomsnittlig kompleksitet med random valg av pivot er*

$O(n * \log(n))$



# "In-Place" sortering

*En (sortering) algoritme er "in-place" dersom den trenger kun konstat lagringsplass i tillegg til selve argumentet.*

```
void QSip(int[] A, int lb, int rb) {
   if (rb–lb < 1) return;
   p = A[rb];
   int l = lb, r = rb–1;
   while (l <= r) {
      while (l <= r && A[l] <= p) l++;
      while (r >= l && A[r] >= p) r--;
      if (l < r) A.swap(l, r);
   }
   A.swap(l,rb);
   QSip(A,lb,l–1);
   QSip(A,l+1;rb);
}
```

```
lb                rb     QSip(A, lb, rb)
7 2 4 1 6 5 3            p = A[rb]
l         r                 p >= A[l]
    r                       p <= A[r]
                            swap(l,r)
1 2 4 7 6 5 3
l     r
  l                         p >= A[l]
r                           p <= A[r]
                          swap(l,rb)
1 2 3 7 6 5 4
  r l
1 2 3 7 6 5 4        QSip(A,lb, l-1)
1 2 3 7 6 5 4        QSip(A,l+1,rb)
```