Grafer

I. GRAF

definisjon
terminologi
noen eksempler på graf-problemer

II. GRAF TRAVERSERING

DFS
BFS

III. GRAF ADT OG IMPLEMENTASJON

Kant-Liste og Nabo-Liste
Nabo-Matrise

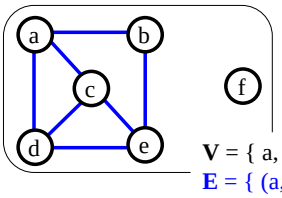
IV. RETTEDE GRAFER (DIGRAPHS)

V. VEKTEDE GRAFER

Kap. 9 (kursorisk 9.4.5)
Kap.10 (untatt 10.2.2–10.2.4, 10.3)

En graf G

er gitt ved to mengder (E,V)
V av noder
E av kanter
der en kant e ε E er
et (uordnet) par {u,v} av noder u, v ε V

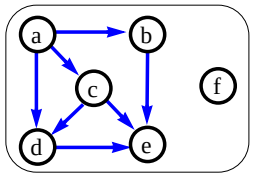


V = { a, b, c, d, e, f }
E = { (a,b), (a,c), (a,d), (b,e), (c,d), (c,e), (d,e) }
= { (b,a), (c,a), (d,a), (e,b), (d,c), (e,c), (e,d) }

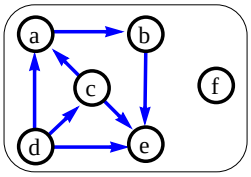
En **ikke-rettet graf** er en (rettet) graf der relasjonen E er **symmetrisk**

u → v ε E *hviss* v → u ε E.

En **rettet graf** (diGraf)
V av noder
E av kanter
der en kant e ε E er
et ordnet par (u,v), u, v ε V : u → v



E = { (a,b), (a,c), (a,d), (b,e), (c,d), (c,e), (d,e) }

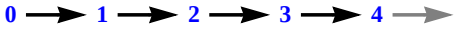


E = { (a,b), **(c,a)**, **(d,s)**, (b,e), **(d,c)**, (c,e), (d,e) }

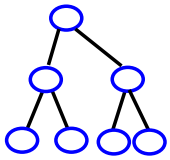
En (rettet) **graf** er gitt ved
en mengde V av noder
en **binær relasjon** E ⊆ V × V

Anvendelser ...

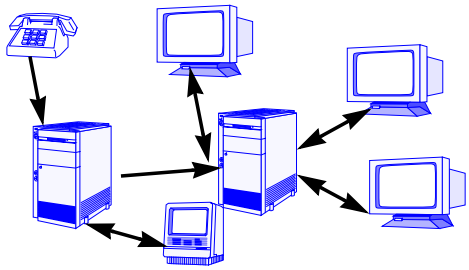
I. Binære relasjoner



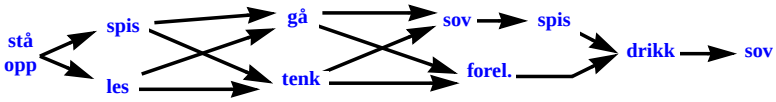
II. Trær



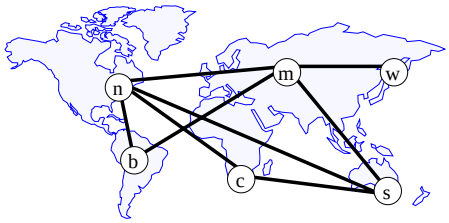
III. Nettverk

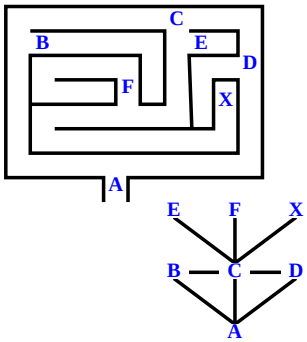


IV. Planlegging



V. Forbindelser





. . .

Graf terminologi

nabo noder : forbundet med en kant — a-c, c-e

graden til en node : antall nabo noder (kanter) — deg(c)=3, deg(f)=0

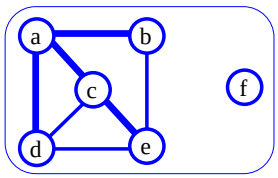
$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2(\#\text{ kanter})$$

inngrad/utgrad : antall innkommende/utgående kanter (rettede grafer)

sti : en sekvens n_1, n_2 ... n_k av noder slik at $(n_i, n_{i+1}) \varepsilon E$
acaca, bec, abedc, edce

enkel sti : ingen node forekommer 2 ganger

sykel : enkel sti men $n_1 = n_k$

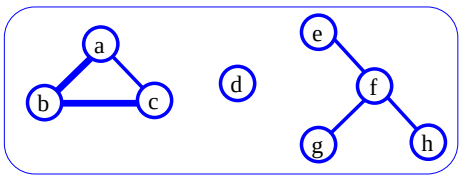


sammenhengende graf : det finnes en sti mellom alle par av noder

delgraf : en delmengde av V og E som er en graf

sammenhengende komponent : en maksimal sammenhengende delgraf

komplett graf : for hver par av noder u, v ε V, finnes det en kant (u,v) ε E



(ikke-rotet) **tre** : sammenhengende graf uten sykler

utspennende tre for en graf G : en delgraf av G som er et tre og inneholder alle G's noder

skog : samling av trær

DAG :rettet graf uten sykler (directed acyclic graph)

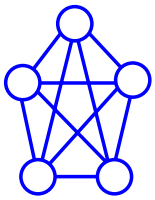
1. Telling av noder og kanter

1.a) Litt om sammenhenger...

n = # noder, ***k*** = # kanter

• G er **komplett hviss** hver node har (***n*** –1) naboer

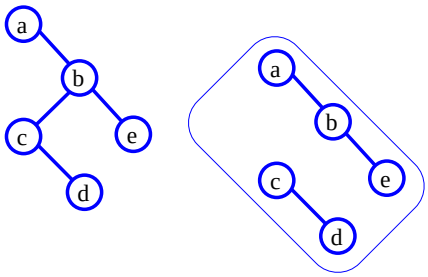
dvs. $k = 1/2 * \sum_{v \in V} deg(v) = 1/2 * n * (n-1)$



n =5
k =10

• G **ikke komplett hviss** ***k*** < 1/2 * ***n*** * (***n*** –1)

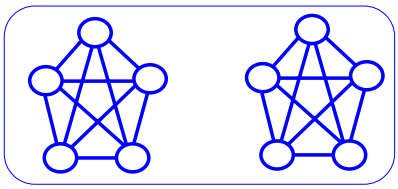
• **Hvis** G **er et tre så** ***k*** = ***n*** –1



n =5
k =4

- et minimalt antall kanter som kan gi en sammenhengende graf av ***n*** noder
- fjerning av en vilkårlig kant, gjør grafen usammenhengende
- G trenger ikke å være et tre selv om ***k*** = ***n*** –1

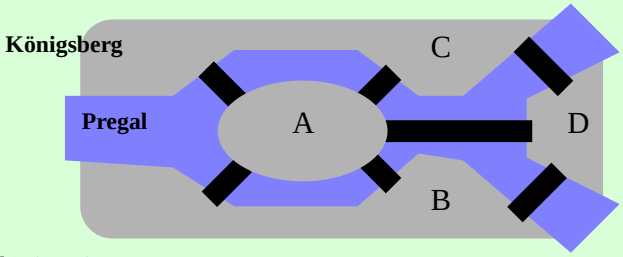
• **Hvis** ***k*** < ***n*** –1 **så er ikke** G **sammenhengende**
men ikke omvendt !!!



n =10
k =20 > 9

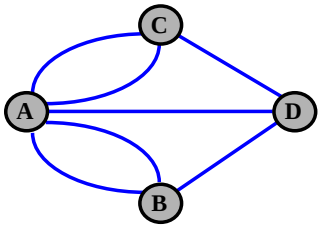
1.b) *Kants spasering og Eulers tur*

Kant :
Kan jeg krysse hver bro nøyaktig én gang ?



Euler (1736) :
Nei – og jeg kan bevise det v.hj.a. grafer !

Tillatt grafer med flere kanter mellom to noder. (multigrafer)



Eulers tur : en sti som traverserer hver kant nøyaktig én gang

Eulers teorem : En (sammenhengende) graf G har en Eulers tur hvis og bare hvis G har 0 eller 2 odde noder (graden er oddetall) **O(n+k)**

Hamiltonsk sykel : en enkel sykel som traverserer hver node nøyaktig en gang **O(n!)**

... **...**

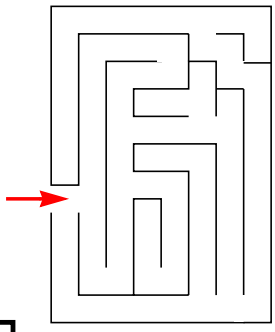
2. *Ariadnes (t)råd*

Minos :

OK, Theseus, but you must first find and kill Minotaur hidding in the Labirynth.

Theseus :

I'm good at killing but how the heck am I going to find it and then get out of there **?**



Ariadne :

(she felt in love with Theseus in the meantime...)

Ta denne tråden og fest den ved inngangen til Labirynten.

(**k**) Hver gang du kommer til et nytt kryss **u**, merk **u** '**visited**'.

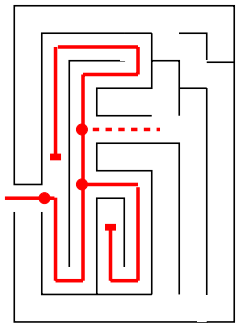
(**r**) Velg en vilkårlig vei – merk den og følg men **dra tråden** etter deg

Når du så kommer til et nytt kryss **v** : dersom det er

- en blind gate, gå tilbake **langs tråden** (**nøst** den igjen)
- et kryss merket '**visited**', gå tilbake **langs tråden** (**nøst** den igjen)
- et umerket kryss, **gjenta** det hele (**k**)

Etter hvert vil alle veier (**r**) fra krysset **u** bli merket

- gå da tilbake **langs tråden** til forrige krysset og fortsett å utforske umerkede veier derfra.



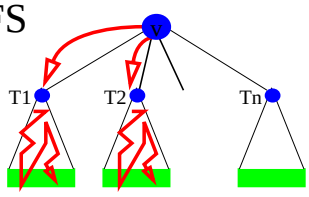
Du vil på denne måten kunne utforske hele labirynten og returnere til inngangen

Chorus :

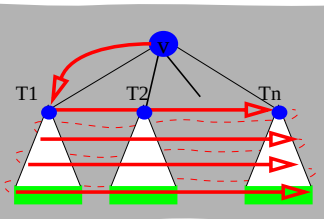
Smart Girl!

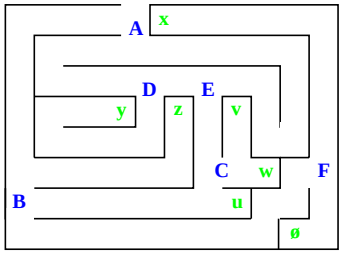
2. Graf traversering

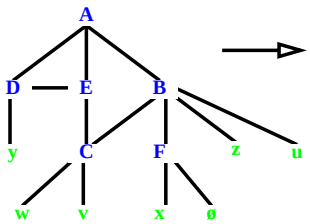
a) DFS



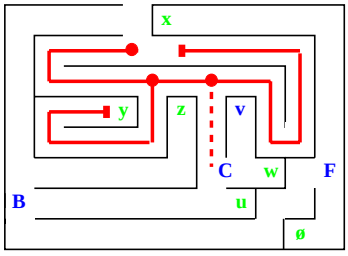
b) BFS

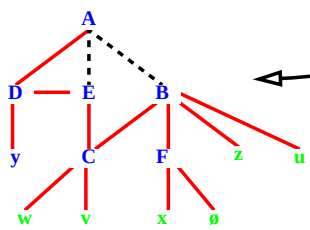







```
DFS(A)
  merk A visited
  for hver kant e = (A, X)
    if ( ! merket X )  // ! e er rød
       // merk–e–rød
       DFS(X)
    // else merk–e–svart
```





Kanter merket med rød under DFS traversering gir et **utspennende tre for grafen**

– roten til treet kan velges vilkårlig !

2.a) DFS traversering av grafer

```
DFS(s)
  merk s visited
  for hver kant e = (s,u)
     if ( ! merket–u )
        // merk–e–rød
        DFS(u)
```

9.12 DFS traversering av en ikke-rettet graf G fra en node s:

a) besøker *alle* noder i en *sammenhengende komponent* til s

b) merkete kanter gir et *utspennende tre*, DFS tre, for denne komponenten til s

Begrunnelse :

a) Anta, kontrapositivt, at det finnes en ubesøkt node v.
Siden komponenten er sammenhengende, finnes det en sti fra s til enhver node,
så anta at v er den første ubesøkte noden på en sti fra s:

- Siden v er den første slike, finnes det en nabo node u ("like før") som ble besøkt
- Men da – mens vi besøkte u – måtte vi også ha sett på kanten (u,v) og, siden v ikke var merket, måtte den ha blitt besøkt.

b) Vi merker kanter (u,v) kun når vi går til endenoden v for første gang

- Derfor danner vi aldri en sykel – vi fåren asyklisk graf, dvs. et tre
- Treet er utspennende fordi alle komponentens noder er med (a)

2.a) DFS traversering av grafer

```
DFS(s)
  merk s visited
  for hver kant e = (s,u)
     if ( ! merket–u )
        // merk–e–rød
        DFS(u)
```

Kjøretid av DFS:

DFS kalles 1 gang for hver node og ser hver kant 2 ganger :
$O(n_s+k_s)$ hvis

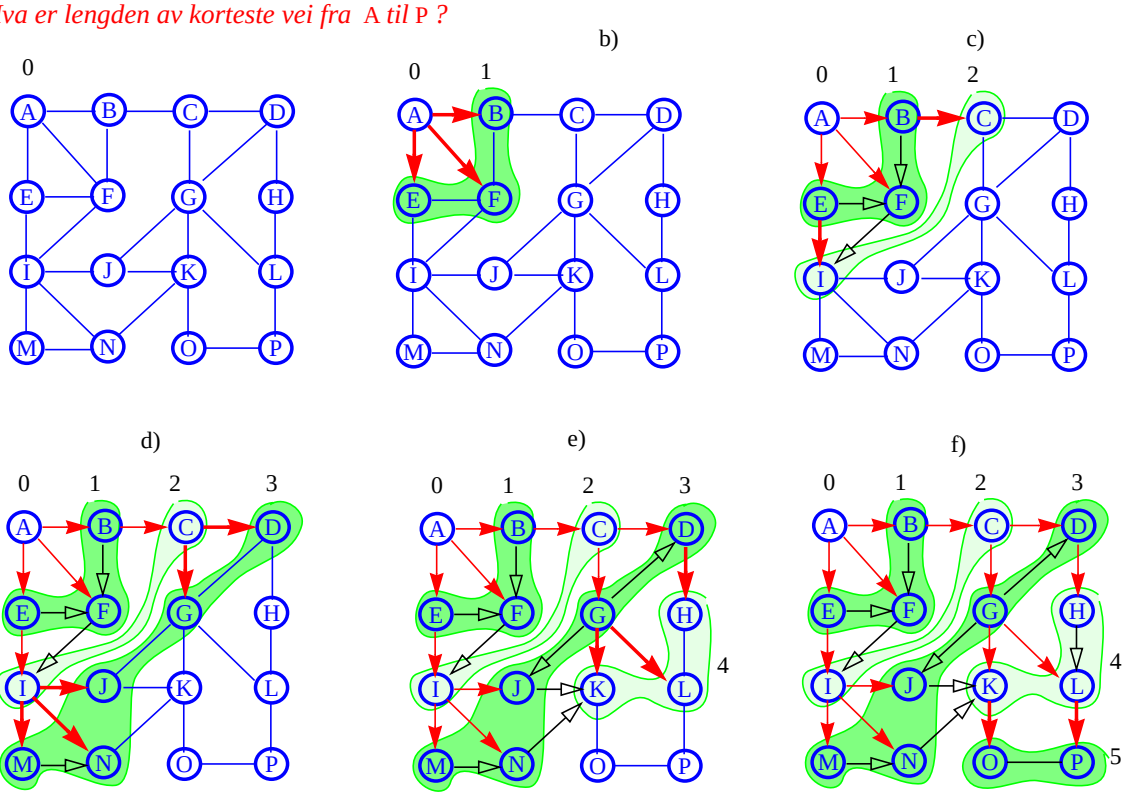
- gitt en kant, kan man aksessere dens ende-noder i $O(1)$
- merking av noder/kanter og sjekking om de er merket tar $O(1)$
- for hver node v, kan alle dens kanter akssesere 1 gang i $O(k(v))$

DFS kan brukes for å lage $O(n+k)$ algoritmer for å :

- sjekke om G er sammenhengende og finne sammenhengende komponenter
- finne utspennende tre for G
- sjekke om det finnes en sti mellom to noder;
- se om G inneholder sykler

2.b) BFS traversering av grafer

Hva er lengden av korteste vei fra A *til* P *?*



2.b) BFS graf traversering

Tree DFS

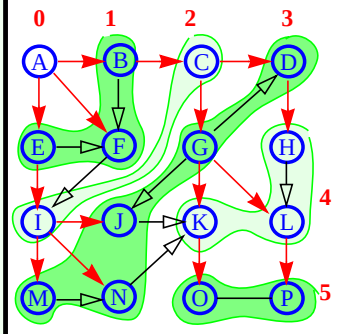
```
/*DFS(Tree T,Position s)
 *   Stack S = new StackIM()
 *   S.push(s)
 *   while (!S.isEmpty())
 *      p= S.pop()
 *      for each p's child c
 *         S.push(c)
 */
```

Tree BFS

```
/*BFS(Tree T,Position s)
 *   Queue S = new QueueIM()
 *   S.enqueue(s)
 *   while (!S.isEmpty())
 *      p= S.dequeue()
 *      for each p's child c
 *         S.enqueue(c)
 */
```

Graph BFS

```
// initielt er alle noder umerket

BFS(Graph G, Position s)
    Queue S = new QueueIM()
    merk(v, 0) – merker med nivå
    S.enqueue(s)
    while (!S.isEmpty())
      k= S.dequeue()
      for each kant e=(k,m)
        if (! merket(m))
            merk(m, k.merke+1)
            merk(e, rød)
            S.enqueue(m)
```



9.14. BFS traversering av en ikke-rettet graf G fra en node s:

a) besøker alle noder i en sammenhengende komponent til s

b) røde kanter danner et utspennende tre, så kalt BFS tre, for G

c) korteste stien fra **s** til hver node på nivå ***i*** har ***i*** kanter og enhver annen sti har minst ***i*** kanter

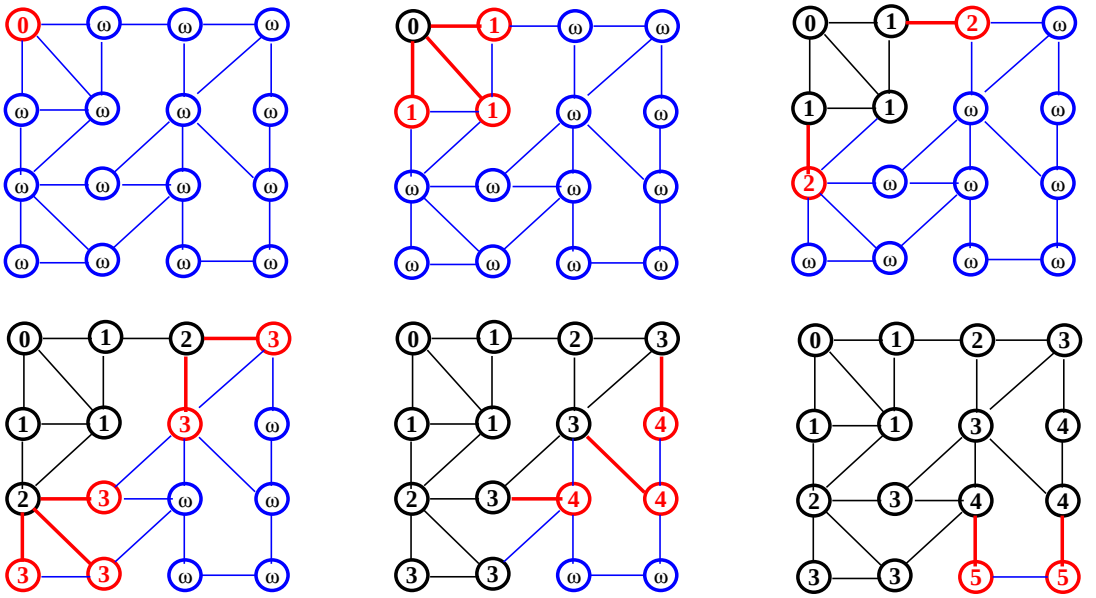
d) er ikke kant **(u,v)** med i BFS tre, så er nivå forskjellen mellom **u** og **v** høyst ***1***

BFS gir opphav til O**(n+k)** algoritmer for å

- sjekke om G er sammenhengende
- finne sammenhengende komponenter i G
- finne utspennende tre for G
- beregne minimalt antall kanter mellom to noder (korteste sti)

BFS: Ford-Bellman

```
for each node v : D[v]= ω      // ω er et maksimalt tall (her ω > n)
D[s] = 0;                      // s er startnoden
for (i=1; i<n; i++)            // n er antall noder i grafen G                    O(n*k)
   for each kant (k,m)         // for en ikke-rettet G : (k,m) ε G hviss (m,k) ε G
      if ( D[k] + 1 < D[m])  D[m] = D[k] + 1
```



Graf ADT *(ikke-rettet utsnitt)*

package jdsl.core.api;

```
public interface PositionalContainer
                          extends Container {
// size(); isEmpty(); elements();
  Enumeration positions();
  void swap(Position p, Position q);
  object replace(Position p, Object o);
}
```

```
public interface Position {
  Object element();
  Container container();
  void setElement(Object o);
}
```

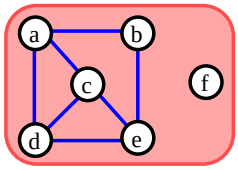
```
public interface Edge
      extends Position { }
```

```
public interface Vertex
      extends Position { }
```

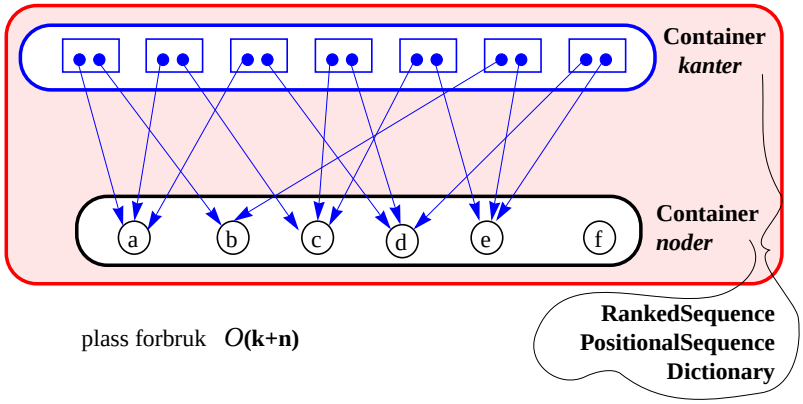
```
public interface InspectableGraph
                    extends PositionalContainer {
  int numVertices();
  int numEdges();
  Enumeration vertices();
  Enumeration edges();

  Vertex[] endVertices(Edge e)
  Vertex opposite(Vertex v, Edge e);

  int degree(Vertex v);
  Enumeration adjacentVertices(Vertex v);
  Enumeration incidentEdges(Vertex v);
  ...
}
```

```
public interface Graph extends InspectableGraph {
  Vertex insertVertex(Object o);
  Edge insertEdge(Vertex u, Vertex v, Object o);
  Object removeEdge(Edge e);
  Object removeVertex(Vertex v); !!!
  ...
}
```

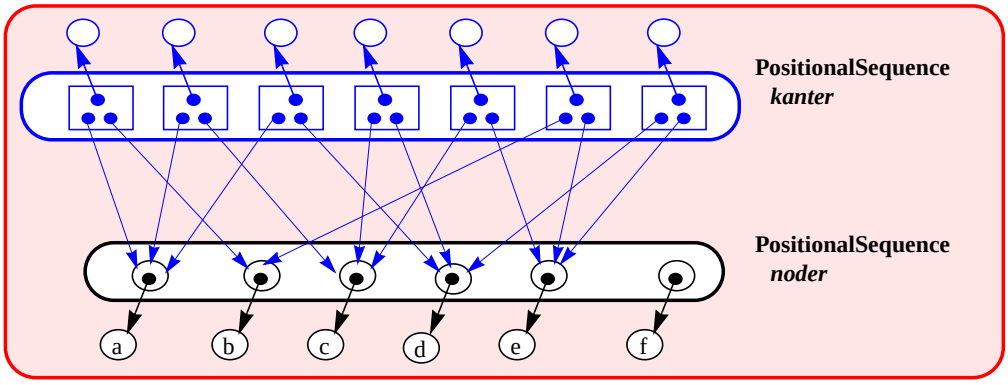
1. Implementasjon av Graph *med Kant-Liste*



endV(e), opposite(v,e),
degree(v) ..... O**(1)**
insertV(o), insertE(v,u,o),
removeE(e) ..... O**(1)**
incidentE(v), adjacentV(v) .. O**(k)**
removeV(v) ..... O**(k)**
areAdjacent(v,u) ..... O**(k)**

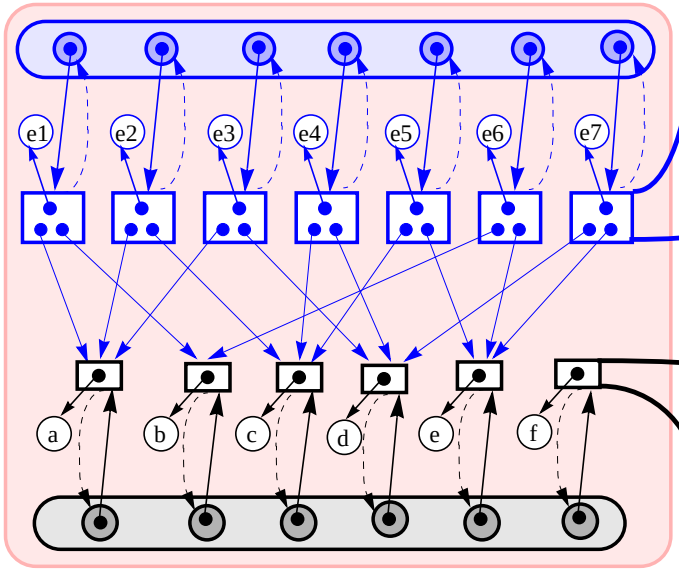


plass forbruk O**(k+n)**



public class *GraphKL* implements *Graph* {

```
private PositionalSequence kanter, noder;
public GraphKL(PositionalSequence k, n)
  { kanter = k; noder = n; }
```



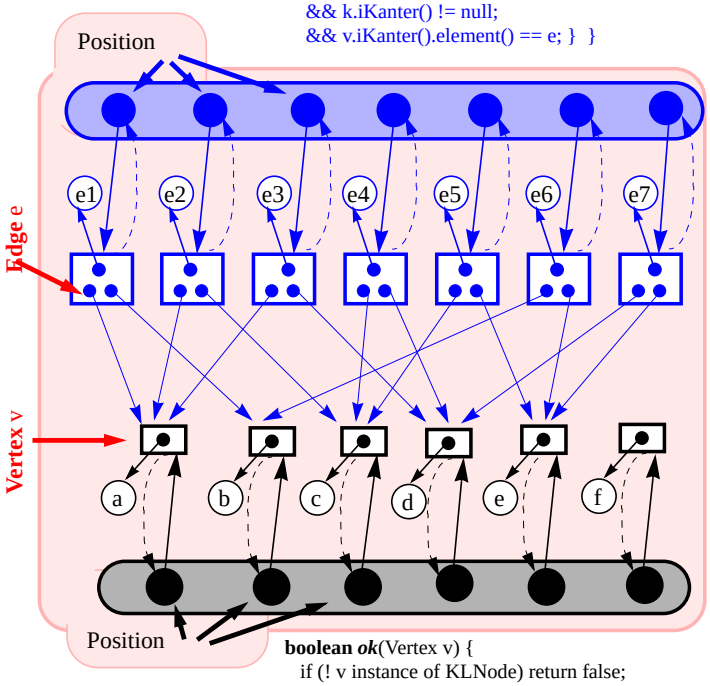

```
public int numEdges() { kanter.size(); }
public int numVertices() { noder.size(); }
. . .
```

```
class KLEdge implements Edge {
  protected Object elem; Container s;
  protected Position kp;
  protected Vertex[] ee=new Vertex[2];
  public KLEdge (Vertex a,Vertex b,
                 Object o, Container n) {
    elem=o; ee[0]=a; ee[1]=b; s=n; }
  public Vertex[] endV() { return ee; }
  public boolean has(Vertex v) {
    return (ee[0]==v || ee[1]==v) ; }
  public Position iKanter() { return kp; }
  public void setPos(Position p) { kp = p; }
  ... }
```

DataInvariant:
e . iKanter() . element() == e
n . iNoder() . element() == n

```
class KLNode implements Vertex {
  protected Object elem; int deg=0;
  protected Container s;
  protected Position np;
  public KLNode(Object o,Container n) {
    elem=o; s=n; }
  public Position iNoder() {return np; }
  public void setPos(Position p) { np = p; }
  public int degree() { return deg; }
  public void inc() { deg = deg+1; }
  public void dec() { deg = deg–1; }
... }
```

```
boolean ok(Edge e) {
  if (! e instance of KLEdge) return false;
  else {    KLEdge k = (KLEdge) e;
    return k.container() == this;
           && k.iKanter() != null;
           && v.iKanter().element() == e; } }
```




```
boolean ok(Vertex v) {
  if (! v instance of KLNode) return false;
  else {    KLNode n = (KLNode) n;
    return n.container() == this;
           && n.iNoder() != null;
           && n.iNoder().element() == n; } }
```

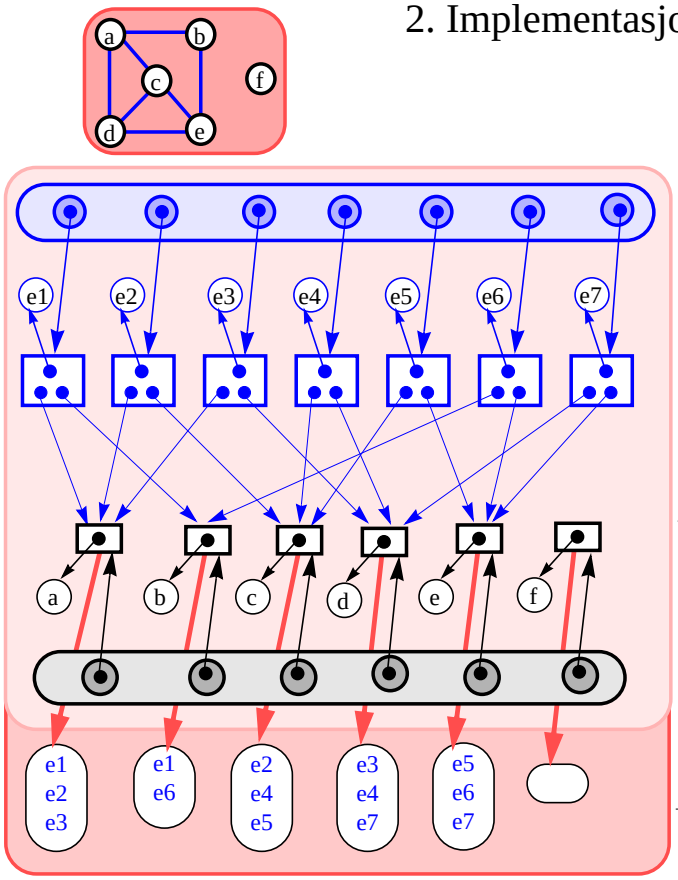
```
Edge insertEdge(Vertex v,u, Object o) {
  if (ok(v) && ok(u) && !areAdjacent(v,u))
  { KLEdge e = new KLEdge(v,u,o,this);
    e . setPos ( kanter . insertLast(e) );
    ((KLNode) v).inc(); ((KLNode) u).inc();
    return e;
  } else if (areAdjacent(v,u))  throw ...
  else throw new InvalidPosExc("");  }
```

```
Object removeEdge(Edge e) {                    O(1)
  if (ok(e)) {  KLEdge k = (KLEdge)e;
    Object ret= k.element();
    kanter.remove(k . iKanter());              !!!
    ( (KLNode) k.endV()[0] ).dec();
    ( (KLNode) k.endV()[1] ).dec();
    return ret; }
  else throw new InvalidPosExc(""); }
```

```
Vertex insertVertex(Object o) {
  KLNode v = new KLNode(o,this);
  v . setPos ( noder . insertLast(v) );
  return v; }
```

```
Object removeVertex(Vertex v) {
  if (ok(v)) {  Object ret= v.element();
    Enumeration k= kanter.elements();
    while ( k.hasMoreElement() ) {          O(k)
      KLNode e= (KLNode)k.nextElement();
      if (e.has (v)) removeEdge(e);  }
    noder.remove(((KLNode)v).iNoder());   !!!
    return ret;
  } else throw new InvalidPosExc("");  }
```


2. Implementasjon av Graph *med Nabo-Liste*



er som Kant-Liste men i tillegg

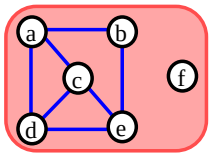
- hver node v har en samling Inc(v) med sine (incident) kanter
- (hver kant (u,v) holder en referanse til sin posisjon i Inc(v) og Inc(u))

endV(e), opposite(v,e), degree(v)	O(1)	O(1)
insertV(o), insertE(v,u,o), removeE(e)	O(1)	O(1)
incidentE(v), adjacentV(v)	O(k)	O(deg v)
removeV(v)	O(k)	O(deg v)
areAdjacent(v,u)	O(k)	O(deg v|u)

```
Object removeVertex(Vertex v) {
  if (ok(v)) {  Object ret= v.element();
    Enumeration k= ((NLNode) v) . inc();
    while (k.hasMoreElements() ) {     O(deg v)
      NLNode e= (NLNode)k.nextElemet();
      if (e.has(v)) removeEdge(e);  }
    noder.remove( ((NLNode)v).iNoder() );
    return ret;
  } else throw new InvalidPosExc("");  }
```

- Inc(v) har ofte kun nabo-noder

3. Implementasjon av Graph *med Nabo-Matrise*

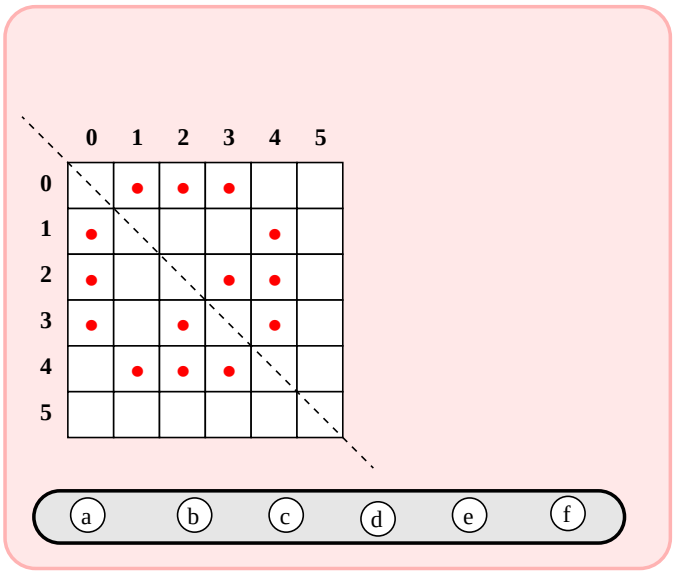


Enumerer alle noder fra 0...n-1:

a	b	c	d	e	f	
0	1	2	3	4	5	no

i en **n** x**n** matrise **boolean A[n][n]**

- **A[i][j]** == **true** hviss G har en kant e=(i,j)
- **A[i][j]** == **false** hviss (i,j) ikke er en kant i G



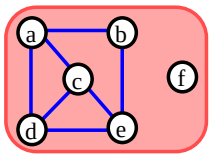
plass forbruk $O(\mathbf{n^2})$

endV(e), opposite(v,e), degree(v)	$O(\mathbf{1})$	$O(\mathbf{1})$
insertE(v,u,o), removeE(e) ..	$O(\mathbf{1})$	$O(\mathbf{1})$
insertV(o)	$O(\mathbf{1})$	$O(\mathbf{n^2})$
incidentE(v), adjacentV(v)	$O(\deg \mathbf{v})$	$O(\mathbf{n})$
removeV(v)	$O(\deg \mathbf{v})$	$O(\mathbf{n^2})$
areAdjacent(v,u)	$O(\deg \mathbf{v}\|\mathbf{u})$	$O(\mathbf{1})$

```
boolean areAdjacent(Vertex v, Vertex u)
  { if ( ok(v) && ok(u) )
    return A [no(v)] [no(u)]  ; }

void insertEdge(Vertex v,u) {
  if ( ok(v) && ok(u) )
    A [no(v)] [no(u)]  = true ;
  } else if ( areAdjacent(v,u) )  throw ...
  else throw new InvalidPosExc("");  }
```

DataInvariant for ikke-rettet graf:
A [**i**] [**k**] == **A** [**k**] [**i**]

3. Implementasjon av Graph *med Nabo-Matrise*

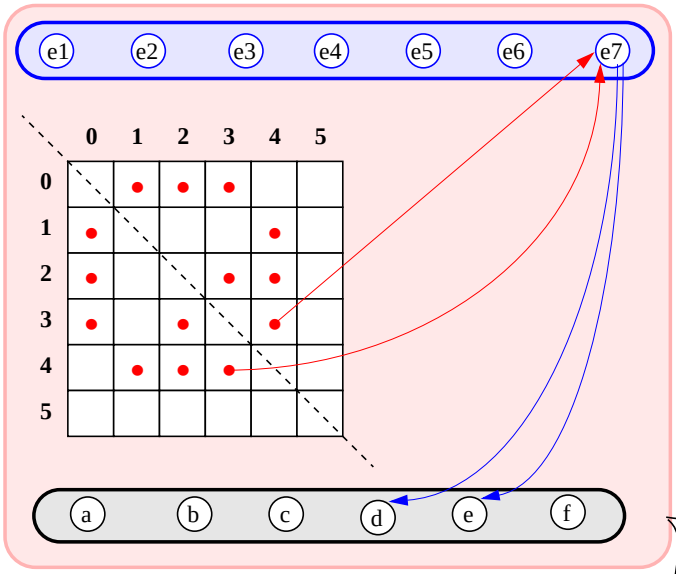


Enumerer alle noder fra 0...n-1:

a	b	c	d	e	f	
0	1	2	3	4	5	no

i en **n** x**n** matrise **A**

- **A[i][j]** == **e** (**true**) hviss G har en kant e=(i,j)
- **A[i][j]** == **null** (**false**) hviss (i,j) ikke er en kant i G



plass forbruk $O(\mathbf{n^2})$

endV(e), opposite(v,e), degree(v)	$O(\mathbf{1})$	$O(\mathbf{1})$
insertE(v,u,o), removeE(e) ..	$O(\mathbf{1})$	$O(\mathbf{1})$
insertV(o)	$O(\mathbf{1})$	$O(\mathbf{n^2})$
incidentE(v), adjacentV(v)	$O(\deg \mathbf{v})$	$O(\mathbf{n})$
removeV(v)	$O(\deg \mathbf{v})$	$O(\mathbf{n^2})$
areAdjacent(v,u)	$O(\deg \mathbf{v}\|\mathbf{u})$	$O(\mathbf{1})$

```
Edge insertEdge(Vertex v,u, Object o) {
  if (ok(v) && ok(u) && !areAdjacent(v,u))
  { NMEdge e = new NMEdge(v,u,o,this);
    e . setPos ( kanter . insertLast (e) );
    ((KLNode) v).inc(); ((KLNode) u).inc();
    A[no(v)] [no(u)]  = e ;
    return e;
  } else if (areAdjacent(v,u))  throw ...
  else throw new InvalidPosExc("");  }
```

Utmerket for **stabile**, nesten **komplette** grafer (ikke for traversering)

Implementasjoner av Graph

n : antall noder **k** : antall kanter

kompleksitet operasjon	Kant-Liste	Nabo-Liste	Nabo-Matrise
size, isEmpty	1	1	1
newContainer	1	1	1
elements, positions	n+k	n+k	n+k
replace, swap	1	1	1
numVertices(), numEdges()	1	1	1
vertices() / edges()	n / k	n / k	n / k
degree(v)	1	1	1
endVertices(e), opposite(v,e)	1	1	1
adjacentVertices(v), incidentEdges(v)	k	deg v	n
insertVertex(o)	1	1	n^2
removeVertex(v)	k	deg v	n^2
insertEdge(v,u,o)	1	1	1
removeEdge(e)	1	1	1
areAdjacent(v,u)	k	deg u|v	1

Oppsummering

- *Graf – definisjon, terminologi*
  ikke-rettet
  rettet
- ***Traversering** av Grafer*
  DFS – rekursiv algoritme
  – basis for andre algoritmer
  DFS tre, sammenhengende komponent, sti mellom to noder, ...
  BFS – iterativ algoritme (med Queue) : O(n+k)
  *– Ford-Bellman algoritme : O(n*k)*
  – basis for andre algoritmer
  BFS tre, sammenhengende komponent, sti mellom to noder, ...
  ***kortest** sti mellom to noder*
- *Graph ADT og dens implementasjoner*
  Kant-Liste
  Nabo-Liste
  Nabo-Matrise