Rekursjon

I. TRE AV REKURSIVE KALL,

rekursjonsdybde
terminering – ordning

II. INDUKTIVE DATA TYPER

og Rekursjon over slike

III. "SPLITT OG HERSK" – PROBLEMLØSNING VED REKURSJON (Kap. 8.1.1)

IV. REKURSJONS EFFEKTIVITET

"dynamisk programmering"
avskjæring

V. STABEL AV REKURSIVE KALL

iterasjon til rekursjon
rekursjon implementert som iterasjon

VI. KORREKTHET

terminering
invarianter (notat til Krogdahl&Haveraaen)

Dermed ferdig med generell basis

Et enkelt eksempel

har en metode som

```
/** leser en linje fra terminalen
 *  @return innleste String
 *  @exception IOException – i tilfelle i/o problem
 */
    public String readln()
```

og vil lage en som

```
/** leser en linje fra terminalen
 *      inntil faar et heltall
 *  @return innleste tallet
 *  @exception  ingen unntak
 *      – det kommer et heltall
 */
/*  public int iRead() {
 *      String s= readln();
 *      int k= hent foerste int fra s;
 *      while (! alt ok)
 *          gjenta: k = proev neste linje;
 *      return k;
*/
```

```
/* public int myRead() {
 *      String s= readln();
 *      int k= hent foerste int fra s;
 *      if (alt ok) return k;
 *      else   // proev igjen med neste linje
 *          return myRead();
 */      }

 public int myRead() {
  try{
      return Integer.parseInt(readln());  }
  catch(IOException e) {
      return myRead(); }
  catch(NumberFormatException e) {
      return myRead(); }
 }
```

Iterasjon til rekursjon

```
/**  @param n > 0
     @return 1+2+...+n */
int sumW(int n) {
     int res =0;
     while (n > 0) {
        res = res + n;
        n = n–1;
     }
     return res;
}
```

```
/**  @param n > 0
     @return 1+2+...+n */
int sumR(int n) {
     if (n == 0) return 0;
     else return n + sumR(n-1);
}
```

Grovt – og ikke 100% riktig – sagt:

```
int Iter(int n) {
     res= init;
     while ( fortsett(n) ) {
        res= Kroppen(n,res);
        oppd(n);
     }
     return res;
}
```

```
int Rec(int n) {
     if ( !fortsett(n) ) return init;
     else return  Kroppen(n, Rec(oppd(n)));
}
```

*Enhver **iterasjon** kan skrives som **rekursjon***

... t.o.m. som hale-rekursjon

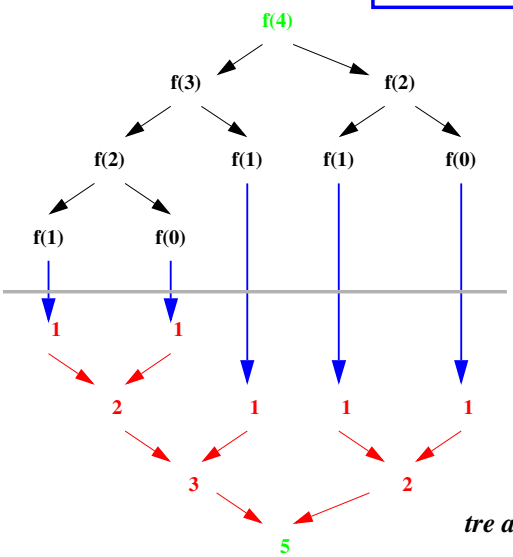
1. Rekursjons*tre* og *-dybde*

fib(0) = 0
fib(1) = 1
fib(n+2) = fib(n) + fib(n+1)

```
public int fib(int n) {
   if (n==0 || n==1) return 1;
   else
      return fib(n-1) + fib(n-2);
}
```

returner i **basistilfelle**

ellers beregn rekursivt **enklere** (mindre) deler og sett de sammen



tre av rekursive kall

```
f(4) ...?
__ f(3) ...?
__ __ f(2) ...?
__ __ __ f(1) ...?
__ __ __ > 1
__ __ __ f(0) ...?
__ __ __ > 1
__ __ > 2
__ __ f(1) ...?
__ __ > 1
__ > 3
__ f(2) ...?
__ __ f(1) ...?
__ __ > 1
__ __ f(0) ...?
__ __ > 1
__ > 2
> 5
```

rekkefølgen av kall

rekursjonsdybde

#svarte = #røde linjer = *# rekursive kall* .....

inntil basistilfelle er nådd (=høyden av treet)

2. Induktive Data Typer *(vilkårlig store men endelige)*

Strukturell ordering

naturlige tall N:

basis: **0** er et N

hvis **n** er et N

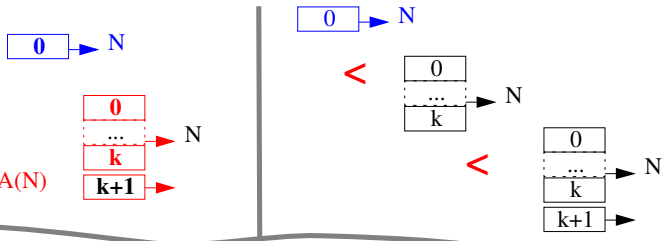
så er: **n+1** et N

array av N: A(N)

basis **0 -> N** er A(N)

hvis **[0...k] -> N** er A(N)

så er **[0...k,k+1] -> N** en A(N)

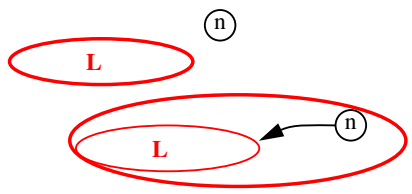


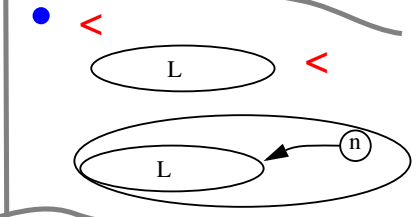
Lister av N: L(N):

basis: **null** er en L(N)

hvis **L** er L(N) og n er N

så er: **(L,n)** en L(N)



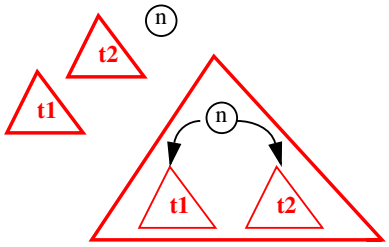


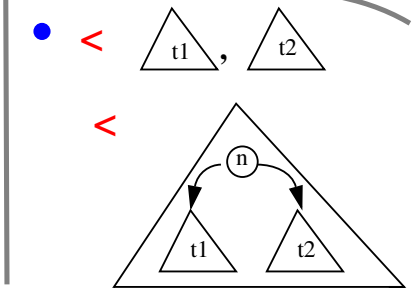
Binære Trær av N: BT(N):

basis: **null** er et BT(N)

hvis **t1**, **t2** er BT(N) og n er N

så er: **(t1, n, t2)** et BT(N)





Variasjoner over tema

induktiv definisjon *= fra basis og oppover –* ***rekursjon*** *= fra toppen mot basis*

N
basis: 0
ind: n+1

```
int fib(n) {
    if (n==0 || n==1) return 1;
    else return fib(n-1) + fib(n-2);
}
```

```
int sum(k) {
    if (k==0) return 0;
    else return k + sum(k-1);
}
```

Array[N]
basis: [0] -> N
ind: [0.. k, k+1] -> N

```
void inc(AN A, int k) {
    A[k]++;
    if (k > 0) inc(A,k-1); }
```

```
int sum(AN A, int k) {
    if (k==0) return A[0];
    else return A[k] + sum(A,k-1); } }
```

Liste[N]
basis: null
ind: (L+n)

```
class LT {
    int n;
    LT nxt; }
```

```
void inc(LS L) {
    if (L==null) {}
    else { n++;
           inc(L.nxt); }
```

```
int sum(LS L) {
    if (L==null) return 0;
    else return sum(L.next)+n;
}
```

BinærtTre[N]
basis: null
ind: (t1,n,t2)

```
class BT {
    int n;
    BT left;
    BT right;}
```

```
void inc(BT B) {
    if (T==null) { }
    else { n++;
           inc(T.left);
           inc(T.right); } }
```

```
int sum(BT T) {
    if (T==null) return 0;
    else    return n +
            sum(T.left) +
            sum(T.right) ; }
```

FRACTALer

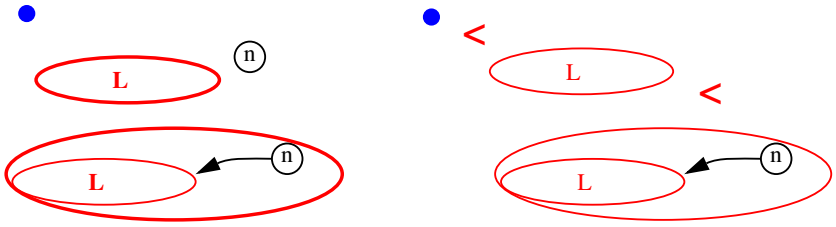
En teknisk bemerkning

Lister av N: L[N]:

basis: **null** er en L[N]

hvis **L** er L[N] og n er N

så er: **(L,n)** en L[N]



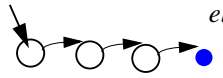
***Rekursjon implementert** "utenfra" datastrukturen :*

```
class LN {
    public int n;
    public LN nxt;
    ...  }
```

```
inc(LN L) {
    if (L==null) { }
    else { L.n++;
        inc(L.nxt); }
```

```
int sum(LN L) {
    if (L==null) return 0;
    else  return sum(L.next)+L.n;
}
```

L



eller "innenfor" datastrukturen :

```
class LN {
    private int n;
    private LN nxt;
    inc() {...}
    int sum() {...}     }
```

```
inc() {
    n++;
    if (nxt != null)
        nxt.inc(); }

inc(LN L) {
    if (L != null)
        L.inc();
}
```

```
int sum() {
    if (nxt != null)
        return nxt.sum()+n;
    else return n; }

int sum(LN L) {
    if (L != null)
        return L.sum();
    else return 0; }
```


3. "Splitt og hersk"

***Rekursjon** som en generell strategi for problemløsning og algoritmedesign*

Gitt en instans **n** *av et problem* **P** *:*

1. *hva gjør jeg når* ***n** er basis tilfelle*
2. *hvordan konstruere løsning for* **n** *utfra løsninger for noen* **mi < n**

P = sorter input array A (n = A.length)

O (n^2)

```
/* int[] SS(int[] A,k) {
 * initielt kall med SS(A,0)
 * n = A.length;
 *    if (k==n-1) { return A; }
 *    else {
 *        i= indeksen til minste elementet
 *            i A[k...n-1];
 *        bytt A[k] med A[i];
 *        return SS(A, k+1); } }   */
```

O (n*log n)

```
/* int[] MS(int[] A) { int n= A.length;
 *    if (n == 1) { return A; }
 *    else { del A i midten i
 *        t1= A[0...n/2] og t2= A[n/2+1...lgh];
 *        sorter rekursivt begge (mindre)
 *            r1= MS(t1) og r2= MS(t2)
 *        return flettet resultat av rekursive kall FL(r1,r2)
 * FL - fletter to sorterte array i en sortert array */
```

P = finn et gitt element x i en array A

Hvis A *er usortert : sjekk* A[n]*; hvis x ikke er der, lett i* A[0...n–1]

O (n)

Hvis A er sortert ...

Binær Søk

```
/*  finn indeks i A til et element x:
*   @param A  int A[...] sortertint
*   @param x  finn x i A
*   @param l, h søk i A bare fom. l tom. h
*   @return   indeks til x;
*             –1 hvis x ikke finnes
*/
```

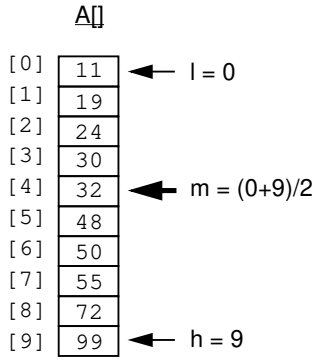
```
int BS(int[] A,x,l,h) {
    m= (l+h) / 2 ;
    if (l > h) return -1;
    else if (A[m] == x) return m;
    else if (A[m] < x) return BS(A,x,m+1,h);
    else return BS(A,x,l,m-1); }

// initielt kall med BS(A, x, 0, A.length–1)
```

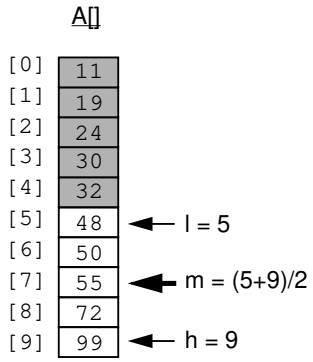
O (log n)

Nøkkel er 48

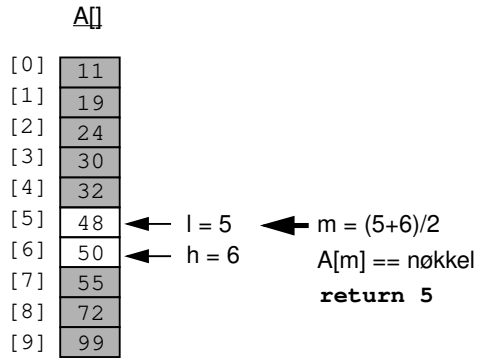
1. kall
binSøk(A, 48, 0, 9)



2. kall
binSøk(A, 48, 5, 9)



3. kall
binSøk(A, 48, 5, 6)

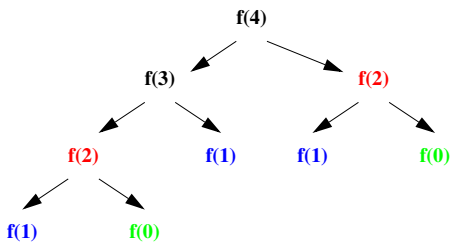


basis tilfelle

4. Rekursjon og effektivitet

– *Reduser antall rekursive kall* –

```
int fib(int n) {
    if (n==0 || n==1) return 1;
    else return fib(n-1)+fib(n-2);
}
```

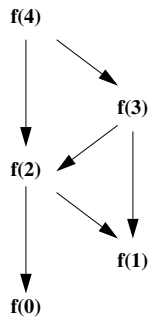


1. "Dynamisk programmering" :

Istedenfor gjentatte rekursive kall til f(k) med samme k, kan resultatet av f(k) lagres for senere bruk:

```
int Fib(int n) {
    int[] ar= new int[n+1];
    ar[0]=1; ar[1]=1;
    return fibo(n, ar);
}

int fibo(int n, int[] ar) {
    if (ar[n] > 0) {
        return ar[n]; }
    else {
        int z= fibo(n–1) + fibo(n–2);
        ar[n]= z;
        return z;
}  }
```



Rekursjon & effektivitet

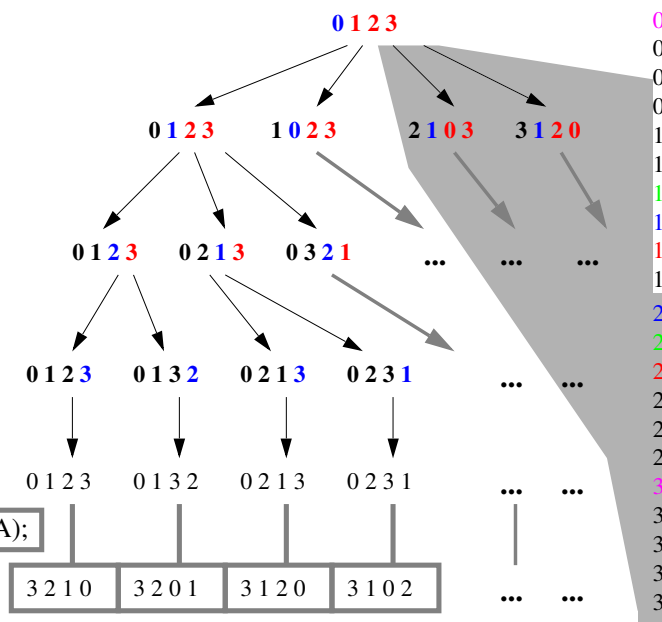
2. Avskjæring

Finn alle permutasjoner av [0,1,2...n-1] (for et partall n)

```
/*  perm(A,n) { int l= A.length-1;
 *  if (n==l) { skriv A; }
 *  else {
 *      for hver ind: n+1...l
 *          perm(A,n+1);
 *          bytt A[n] og A[ind]
 *      perm(A,n+1);
 *      roterL[n...l]; }
 */
    A[0..n-1] A[n] A[n+1..l]
    perm(A,0) skriver alle perm

/*  PE(A) { int l= A.length-1;
 *  for hver n: 0...l/2 {
 *      bytt A[0] og A[n];
 *      perm2(A,1);
 *      bytt A[0] og A[n]; }
 */
```

skriv inv(A);



0,1,2,3
0,1,3,2
0,2,1,3
0,2,3,1
0,3,2,1
0,3,1,2
1,0,2,3
1,0,3,2
1,2,0,3
1,2,3,0
1,3,2,0
1,3,0,2
2,1,0,3
2,1,3,0
2,0,1,3
2,0,3,1
2,3,0,1
2,3,1,0
3,1,2,0
3,1,0,2
3,2,1,0
3,2,0,1
3,0,2,1
3,0,1,2

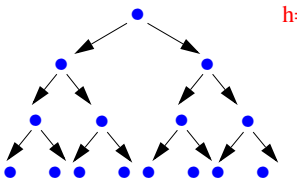
Kompleksitet av en rekursiv funksjon

≈ antall noder i rekursjonstreet

avhenger av

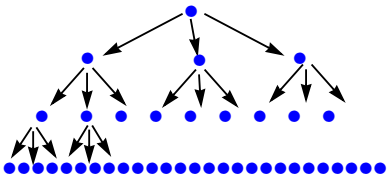
- *"**størrelsen på steget**" mot basis i hvert rekursivt kall (høyden av treet)*
- ***antall rekursive kall** i hvert steg ("bredden" av forgreninger)*
- *arbeidsmengden ved "sammensetting" av resultater fra rekursive kall*

F(0) = 1, F(1) = 1
F(n+1) = F(n) + F(n) $O(2^{n+1} - 1)$



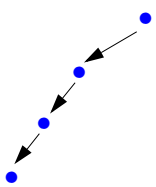
h= 3
2
1
0

F(0) = 1, F(1) = 1
F(n+1) = F(n) + F(n) + F(n) $O(3^{n+1} - 1)$



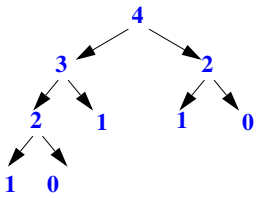
h= 3
2
1
0

F(0) = 1, F(1) = 1
F(n+1) = F(n) * 2 $O(n)$



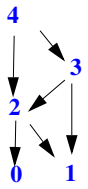
h= 3
2
1
0

F(0) = 1, F(1) = 1
F(n+2) = F(n+1) + F(n) $O(1.6^n)$



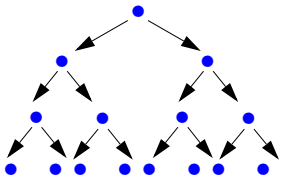
h= 3
2
1
0

n/2 * 2 = $O(n)$



MS(1) = 1
MS(n) = MS(n/2) + MS(n/2)

$2^{\log(n)+1} - 1 = 2n-1 = O(n)$

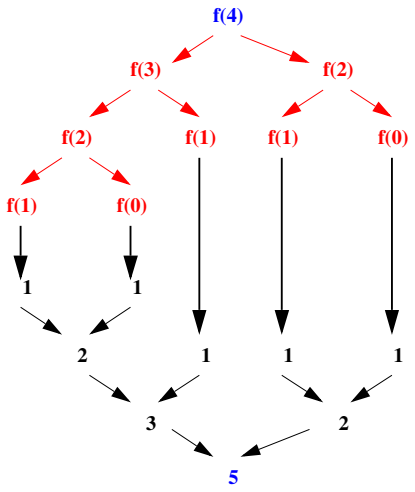


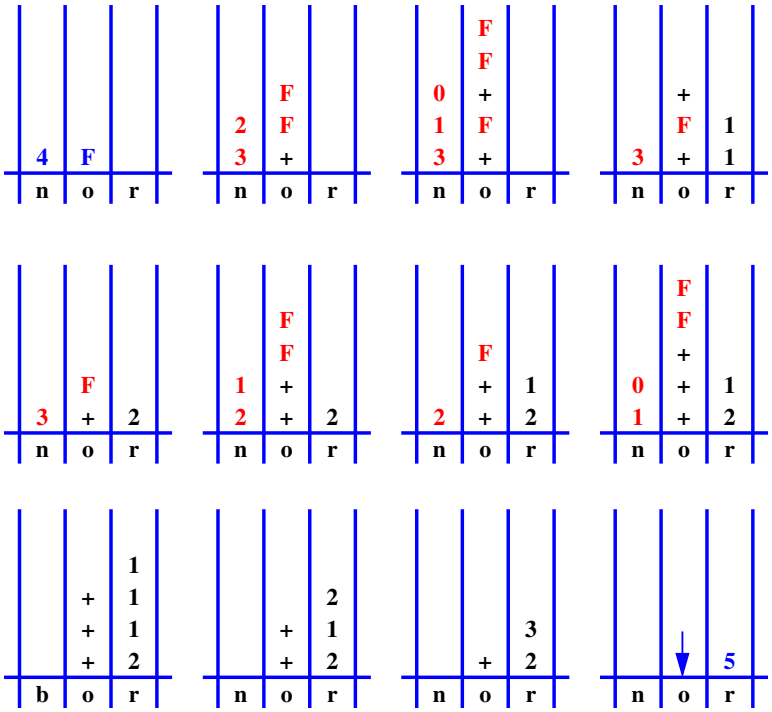
h= 3 =log(n)
2 (n/2)
1 (n/4)
0 (n/8)

5. Rekursjon . . .

implementeres med Stabel

```
int Fib(int n) {
if (n==0 || n==1) return 1;
else
    return Fib(n-1) + Fib(n-2);}
```





Rekursjon til iterasjon

(kan alltid omgjøres v.hj.a. Stabel)

```
int Fib(int n) {
  if (n==0 || n==1) return 1;
  else
      return Fib(n-1) + Fib(n-2);
}
```

Noen rekursjon (f.eks. hale-rekursjon) kan omgjøres til iterasjon på en enklere måte.

```
int fibS(int a) {
  String  o; int n, a1, a2;
  Stack op = new StackImp();
  Stack re = new StackImp();
  Stack ar = new StackImp();

  op.push("F"); ar.push( new Integer(a) );
  while (!op.empty()) {
    o= (String) op.pop();

    if ( o.equals("F") ) {
        n= ( (Integer)ar.pop() ).intValue();
        if (n==0 || n==1) re.push( new Integer(1) );
        else {
            op.push("+"); op.push("F"); op.push("F");
            ar.push( new Integer(n-1) );
            ar.push( new Integer(n-2) ); }

    } else if ( o.equals("+") ) {
        a1= ( (Integer)re.pop() ).intValue();
        a2= ( (Integer)re.pop() ).intValue();
        re.push( new Integer(a1+a2) ); }
  }
  return ( (Integer)re.pop() ).intValue();
}
```

6. Korrekthet

Gitt en instans **n** *av et problem* **P** *:*

1. hva gjør jeg når **n** *er basis tilfelle*

2. hvordan konstruere løsning for **n** *utfra løsninger for noen* **mi** < **n**

P(n)
  if Basis(**n**)
    return ???

  else
    return
    Kombiner(**P(m1)** ... **P(mk)**)

Terminering:

P(n)
  if Basis(**n**)
  – stopper rekursjon

  else
  – vær sikker at hver **mi < n**, er nærmere Basis

Korrekthet:

P(n)
  if Basis(**n**)
  – kontroller at det utføres riktig handling

  else
  – **HVIS** hvert rekursivt kall **P(mi)** returnerer riktig resultat

  !!! DETTE ANTAR VI !!!

  – **SÅ** gir Kombiner(**P(m1)** ... **P(mk)**) riktig resultat

kombinasjon opprettholder ***rekursjons-invariant***

Korrekthet: rekursjons-invariant

```
/* int[] MS(int[] A) { int n= A.length;
 *    if (n == 1) { return A; }
 *    else {
 *        del A i midten i :
 *        t1= A[0...n/2]  og  t2 = A[n/2+1...n];
 *        sorter rekursivt (mindre) delene
 *            r1= MS(t1) og
 *            r2= MS(t2)
 *        return flettet resultat av
 *            rekursive kall FL(r1,r2) }
 */
```

Invariant:
MS(A) *returnerer sortert argument* A:

if **lgh==1** – ***da er A sortert***

else – deler A i to disjunkte deler

t1= **A[0...n/2]** og t2= **A[n/2+1...n]**

r1= MS(**t1**) ***returnerer sortert t1***
r2= MS(**t2**) ***returnerer sortert t2***

hvis FL *fletter korrekt to sorterte array, så returnerer hele else-grenen sortert* A

```
/* int BS(int[] A, int x, int l, int h) {
 *    int m= (l+h) / 2 ;
 *    if (l > h) return –1;
 *    else if (A[m] == x) return m;
 *    else if (A[m] < x) return BS(A, x, m+1, h);
 *    else return BS(A, x, l, m–1); }
 */
```

Invariant:
argumentet A *er sortert &*
er x *i* A, *så er den mellom* [l ... h]
(*initielt kall med* (A, x, 0, A.length-1)

if **l > h** – **x** ***kan ikke være der (–1 er riktig)***

else if **A[m] = x** – ***da har vi funnet den (m er riktig)***

else if **A[m] < x** –

er x *i* A, *så må den være mellom* **[m+1... h]**

BS(A, x, **m+1**, **h**) ***vil returnere riktig resultat***

else **A[m] > x** –

er x *i* A, *så må den være mellom* **[l ... m–1]**

BS(A, x, **l**, **m–1**) ***vil returnere riktig resultat***

Løkke-invariant

```
int sum(int n) {
    if (n == 0) return 0;
    else return n + sum(n–1);
```

basis – gir riktig sum(0) =0

hvis sum(n–1) gir riktig = $\sum_{i=0}^{n-1} i$ så er sum(n) = n + sum(n–1) = $\sum_{i=0}^{n} i$

1. **Løkke-invariant, LI:** $r = \sum_{k=0}^{i} k$

2. **Initialisering:** i=0 & r=0 = $\sum_{k=0}^{i=0} k$ **=> LI**

3a. **hvis LI:** $r = \sum_{k=0}^{i} k$ **holder før kroppen**

3b. **så holder LI':** $r' = \sum_{k=0}^{i'} k$ **etter kroppen**

4. **Utgang**: **LI:** $r = \sum_{k=0}^{i} k$ **& i =n =>** $r = \sum_{k=0}^{n} k$

```
int sumw(int n) {

    int i=0, r=0;

    while (i != n)  {

        r= r+i;
        i++;
// r'= r+i, i'=i+1
    }

    return r;
}
```

```
int sumw(int n) {

    int i=0, r=0;

    while (i != n) {

        i++;
        r= r+i;
// i'= i+1, r'= r+i'
    }

    return r;
}
```


Løkke-invaraint: eksempel 1.

```
/**  beregner heltalls kvosient samt resten
     @param x >= 0
     @param y > 0
     @return (q, r) sa. x= q*y + r  &  0 <= r < y  &  0 <= q
*/
divr(int x, int y)  {
  int q = 0 ; int r = x ;
```

initialisering: q = 0 & r = x >= 0 → **x= q*y + r & 0 <= r & 0 <= q**

```
  while (y <= r)  {
```

LI: **0 <= r & x = q*y + r & 0 <= q**

– anta at den gjelder ved inngang, samt **y <= r**

```
    q = q+1 ;
    r = r – y;
```

– da gjelder, etter løkkekroppen:

q' = q+1 & **0 <= q** → **0 <= q'** &

r' = r–y & **0 <= r** & **y <= r** → **0 <= r'**

q'*y + r' = (q+1)*y + (r–y) = q*y + y + r – y = q*y + r = **x**

– dvs. LI opprettholdes gjennom kroppen

```
  }
```

utgang fra løkken: **LI** & **r<y** → **x = r + q*y** & **0 <= r < y** & **0 <= q**

```
  return (q, r) ;  }
```

Løkke-invariant: eksempel 2.

```
/**     beregner største felles divisor
        @param x1 > 0
        @param x2 > 0
        @return y2 = gcd(x1,x2) */
gcd(x1,x2) {
    y1= x1; y2= x2;      ← initialisering: x1 = y1 & x2 = y2 → gcd(x1,x2) == gcd(x1,x2)

    while (y1 != 0) {
        ←                LI: gcd(y1,y2) = gcd(x1,x2) – anta at den gjelder her
        if (y2 < y1)
            (y1,y2) = (y2,y1);      – gcd(x1,x2) = gcd(y1,y2) = gcd(y2,y1) = gcd(y1',y2')
        else // (y2 >= y1)
            y2= y2–y1;              – gcd(x1,x2) = gcd(y1,y2) = gcd(y1,y2-y1) = gcd(y1,y2')
        ←                LI': cd(y1',y2') = gcd(x1,x2)
    }
                         utgang: LI & y1 = 0 →
    ←                      gcd(x1,x2) = gcd(y1,y2)
                                        = gcd(0,y2) = y2
    return y2;
}
```

Hvis gcd(y1,y2) = z >=1 & y2 >= y1, så
*) y1 = z*k1 <= z*k2 = y2 & gcd(k1,k2) = 1
Men da:
y2'= y2–y1 = z*(k2–k1) & gcd(k1, k2–k1) = 1
hvis ikke, dvs. gcd(k1,k2–k1) = v > 1, da
k1= v*a & k2–k1= v*b, så
k2= v*b+v*a = v*(b+a)
dvs. da også gcd(k1,k2) = v >1 – motsier *)

Oppsummering

1. ***Rekursjon** – "**Splitt og hersk**"*
   – bestem hva som må gjøres i basis tilfelle(r)
   – konstruer ("hersk") en løsning fra (rekursive) løsninger for ("splitt") noen mindre instanser
2. *Enhver induktiv datatype (nat, int, lister, trær, ...) gir ophav til rekursive algoritmer*
3. *Rekursjon vs. iterasjon (rekursjon implementeres iterativt med bruk av stabel)*
4. *Kompleksistet av rekursiv funksjon avhenger av*
   – antall noder i rekursjonstre ("splitt")
   - *dybden (høyden) av treet – hvor stort steg mot basis utgjør hver "splitting"*
   - *antall rekursive kall (bredden av treet) på hvert nivå*

   – arbeidsmengden for å konstruere en løsning utfra løsninger for mindre instanser ("hersk")
5. ***Korrekthet***
   – bestem rekursjons-ivarianten
   - ***verifiser** at basistilfelle(r) etablerer invarianten*
   - *under **antakelse** at rekursive kall etablerer invarianten, **vis** at konstruksjonen vil opprettholde den*

   – bestem løkke-invariant
   - ***vis** at den gjelder etter initialisering (like før inngangen i løkken)*
   - *under **antakelse** at den gjelder før løkkekroppen, **vis** at den gjelder etter*