Rekursjon

I. TRE AV REKURSIVE KALL,

rekursjonsdybde
terminering – ordning

II. INDUKTIVE DATA TYPER

og Rekursjon over slike

III. "SPLITT OG HERSK" – PROBLEMLØSNING VED REKURSJON (Kap. 8.1.1)

IV. REKURSJONS EFFEKTIVITET

"dynamisk programmering"
avskjæring

V. STABEL AV REKURSIVE KALL

iterasjon til rekursjon
rekursjon implementert som iterasjon

VI. KORREKTHET

terminering
invarianter (notat til Krogdahl&Haveraaen)

Dermed ferdig med generell basis

Et enkelt eksempel

har en metode som

```
/**  leser en linje fra terminalen
 *   @return innleste String
 *   @exception IOException – i tilfelle i/o problem
 */
     public String readln()
```

og vil lage en som

```
/**  leser en linje fra terminalen
 *       inntil faar et heltall
 *   @return innleste tallet
 *   @exception  ingen unntak
 *       – det kommer et heltall
 */
/*   public int iRead() {
 *       String s= readln();
 *       int k= hent foerste int fra s;
 *       while (! alt ok)
 *           gjenta: k = proev neste linje;
 *       return k;
*/
```

```
/* public int myRead() {
 *       String s= readln();
 *       int k= hent foerste int fra s;
 *       if (alt ok) return k;
 *       else   // proev igjen med neste linje
 *           return myRead();
 */      }

 public int myRead() {
   try{
        return Integer.parseInt(readln());  }
   catch(IOException e) {
        return myRead(); }
   catch(NumberFormatException e) {
        return myRead(); }
 }
```

Iterasjon til rekursjon

```
/**  @param n > 0
     @return 1+2+...+n */
int sumW(int n) {
     int res =0;
     while (n > 0) {
        res = res + n;
        n = n–1;
     }
     return res;
}
```

```
/**  @param n > 0
     @return 1+2+...+n */
int sumR(int n) {
     if (n == 0) return 0;
     else return n + sumR(n-1);
}
```

Grovt – og ikke 100% riktig – sagt:

```
int Iter(int n) {
     res= init;
     while ( fortsett(n) ) {
        res= Kroppen(n,res);
        oppd(n);
     }
     return res;
}
```

```
int Rec(int n) {
     if ( !fortsett(n) ) return init;
     else return  Kroppen(n, Rec(oppd(n)));
}
```

*Enhver **iterasjon** kan skrives som **rekursjon***

... t.o.m. som hale-rekursjon

1. Rekursjons***tre*** og ***-dybde***

fib(0) = 0

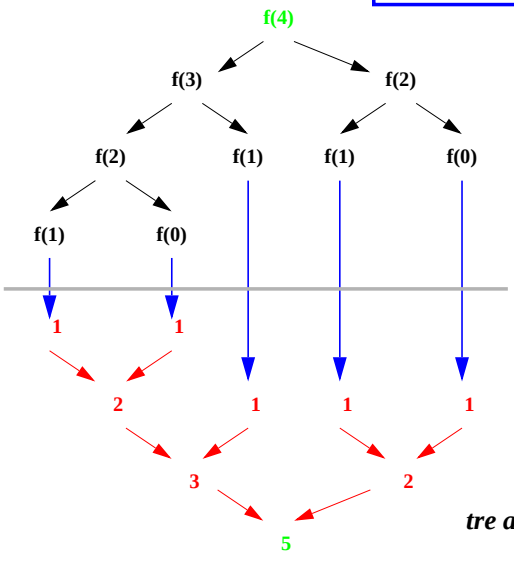
fib(1) = 1

fib(n+2) = fib(n) + fib(n+1)

```
public int fib(int n) {
   if (n==0 || n==1) return 1;
   else
      return fib(n-1) + fib(n-2);
}
```

returner i **basistilfelle**

ellers beregn rekursivt **enklere** (mindre) deler og sett de sammen



tre av rekursive kall

```
f(4) ...?
 f(3) ...?
  f(2) ...?
   f(1) ...?
   > 1
   f(0) ...?
   > 1
  > 2
  f(1) ...?
  > 1
 > 3
 f(2) ...?
  f(1) ...?
  > 1
  f(0) ...?
  > 1
 > 2
> 5
```

rekkefølgen av kall

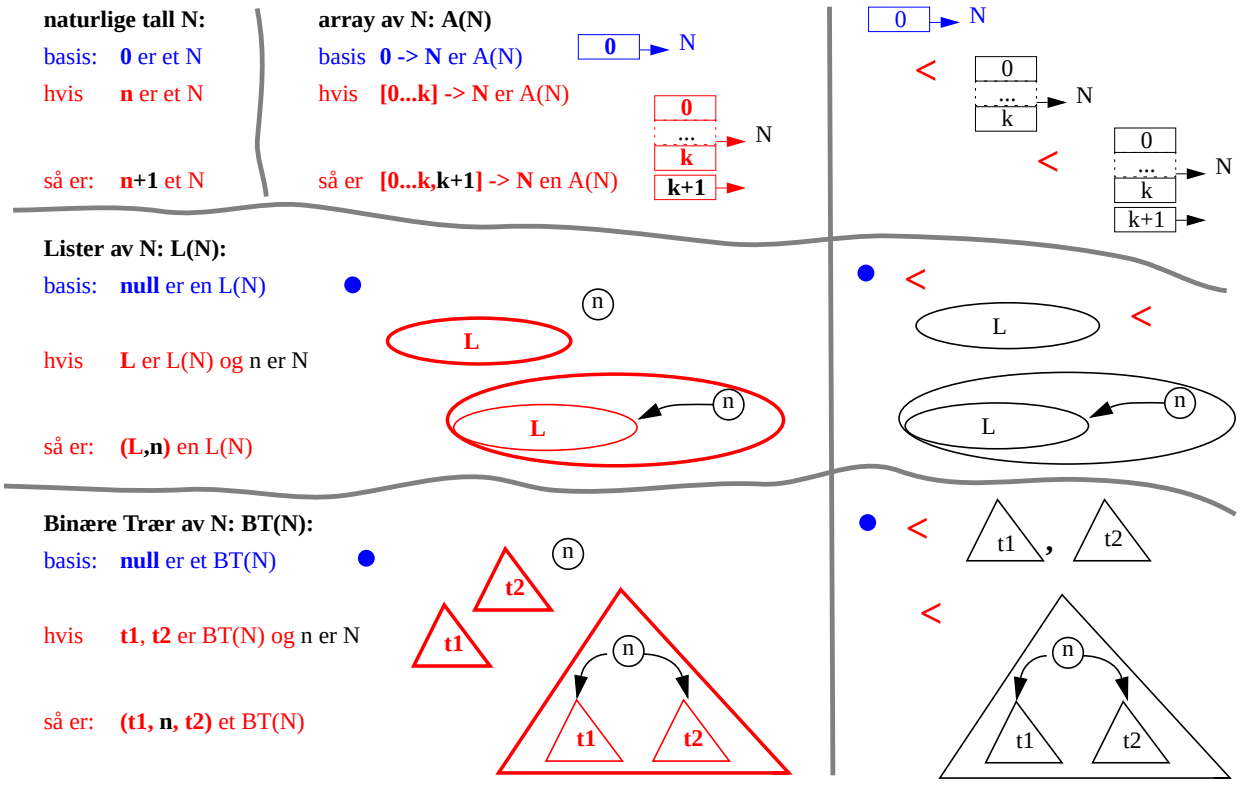
rekursjonsdybde

#svarte = #røde linjer = *# rekursive kall* .....

inntil basistilfelle er nådd (=høyden av treet)

2. Induktive Data Typer *(vilkårlig store men endelige)*

Strukturell ordering



Variasjoner over tema

induktiv definisjon *= fra basis og oppover –* ***rekursjon*** *= fra toppen mot basis*

N
basis: 0
ind: n+1
		int fib(n) {
		if (n==0 || n==1) return 1;
		else return fib(n-1) + fib(n-2);
		}
			int sum(k) {
			if (k==0) return 0;
			else return k + sum(k-1);
			}

Array[N]
basis: [0] -> N
ind: [0.. k, k+1] -> N
		void inc(AN A, int k) {
		A[k]++;
		if (k > 0) inc(A,k-1); }
			int sum(AN A, int k) {
			if (k==0) return A[0];
			else return A[k] + sum(A,k-1); } }

Liste[N]
basis: null
ind: (L+n)
	class LT {
	int n;
	LT nxt; }
		void inc(LS L) {
		if (L==null) {}
		else { n++;
		inc(L.nxt); }
			int sum(LS L) {
			if (L==null) return 0;
			else return sum(L.next)+n;
			}

BinærtTre[N]
basis: null
ind: (t1,n,t2)
	class BT {
	int n;
	BT left;
	BT right;}
		void inc(BT B) {
		if (T==null) { }
		else { n++;
		inc(T.left);
		inc(T.right); } }
			int sum(BT T) {
			if (T==null) return 0;
			else return n +
			sum(T.left) +
			sum(T.right) ; }

FRACTALer

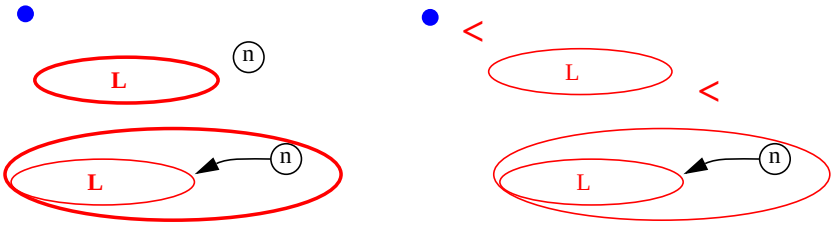
En teknisk bemerkning

Lister av N: L[N]:

basis: **null** er en L[N]

hvis **L** er L[N] og n er N

så er: **(L,n)** en L[N]



Rekursjon implementert *"utenfra" datastrukturen :*

```
class LN {
   public int n;
   public LN nxt;
   ...  }
```

```
inc(LN L) {
   if (L==null) {}
   else { L.n++;
      inc(L.nxt); }
```

```
int sum(LN L) {
   if (L==null) return 0;
   else  return sum(L.next)+L.n;
}
```

L

eller "innenfor" datastrukturen :

```
class LN {
   private int n;
   private LN nxt;
   inc() {...}
   int sum() {...}     }
```

```
inc() {
   n++;
   if (nxt != null)
      nxt.inc(); }

inc(LN L) {
   if (L != null)
      L.inc();
}
```

```
int sum() {
   if (nxt != null)
      return nxt.sum()+n;
   else return n; }

int sum(LN L) {
   if (L != null)
      return L.sum();
   else return 0; }
```


3. "Splitt og hersk"

Rekursjon som en generell strategi for problemløsning og algoritmedesign

Gitt en instans **n** *av et problem* **P** *:*

1. *hva gjør jeg når* **n** *er basis tilfelle*
2. *hvordan konstruere løsning for* **n** *utfra løsninger for noen* **mi** < **n**

P = sorter input array A (n = A.length)

O (n^2)

```
/* int[] SS(int[] A,k) {
 * initielt kall med SS(A,0)
 * n = A.length;
 *    if (k==n-1) { return A; }
 *    else {
 *       i= indeksen til minste elementet
 *          i A[k...n-1];
 *       bytt A[k] med A[i];
 *       return SS(A, k+1); } }   */
```

O (n*log n)

```
/* int[] MS(int[] A) { int n= A.length;
 *    if (n == 1) { return A; }
 *    else { del A i midten i
 *       t1= A[0...n/2] og t2= A[n/2+1...lgh];
 *       sorter rekursivt begge (mindre)
 *          r1= MS(t1) og r2= MS(t2)
 *       return flettet resultat av rekursive kall FL(r1,r2)
 * FL - fletter to sorterte array i en sortert array */
```

P = finn et gitt element x i en array A

Hvis A *er usortert : sjekk* A[n]*; hvis x ikke er der, lett i* A[0...n–1] ***O*** (n)

Hvis A er sortert ...

Binær Søk

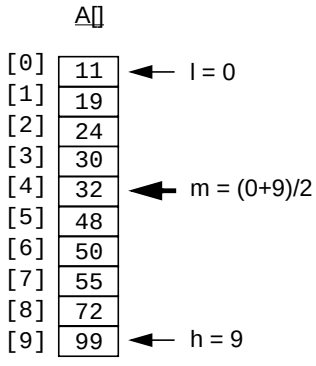
```
/*  finn indeks i A til et element x:
*   @param A  int A[...] sortertint
*   @param x  finn x i A
*   @param l, h søk i A bare fom. l tom. h
*   @return   indeks til x;
*             –1 hvis x ikke finnes
*/
```

```
int BS(int[] A,x,l,h) {
    m= (l+h) / 2 ;
    if (l > h) return -1;
    else if (A[m] == x) return m;
    else if (A[m] < x) return BS(A,x,m+1,h);
    else return BS(A,x,l,m-1); }
// initielt kall med BS(A, x, 0, A.length–1)
```

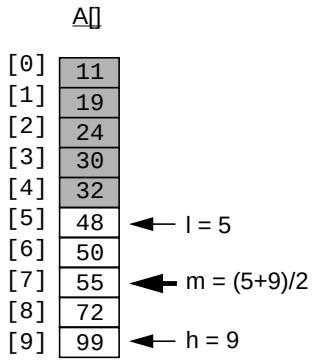
O (log n)

Nøkkel er 48

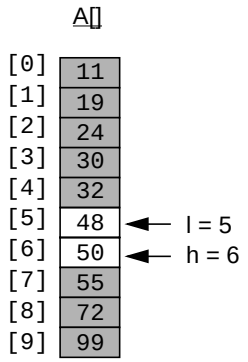
1. kall
`binSøk(A, 48, 0, 9)`



2. kall
`binSøk(A, 48, 5, 9)`



3. kall
`binSøk(A, 48, 5, 6)`



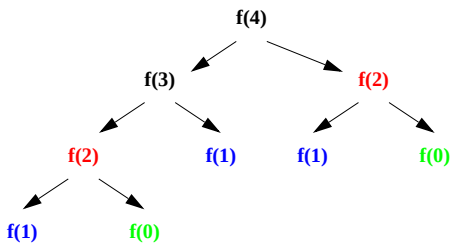
basis tilfelle

m = (5+6)/2
A[m] == nøkkel
`return 5`

4. Rekursjon og effektivitet

– *Reduser antall rekursive kall* –

```
int fib(int n) {
   if (n==0 || n==1) return 1;
   else return fib(n-1)+fib(n-2);
}
```

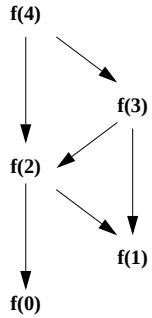


1. "Dynamisk programmering" :

Istedenfor gjentatte rekursive kall til f(k) med samme k, kan resultatet av f(k) lagres for senere bruk:

```
int Fib(int n) {
   int[] ar= new int[n+1];
   ar[0]=1; ar[1]=1;
   return fibo(n, ar);
}

int fibo(int n, int[] ar) {
   if (ar[n] > 0) {
      return ar[n]; }
   else {
      int z= fibo(n–1) + fibo(n–2);
      ar[n]= z;
      return z;
} }
```



Rekursjon & effektivitet

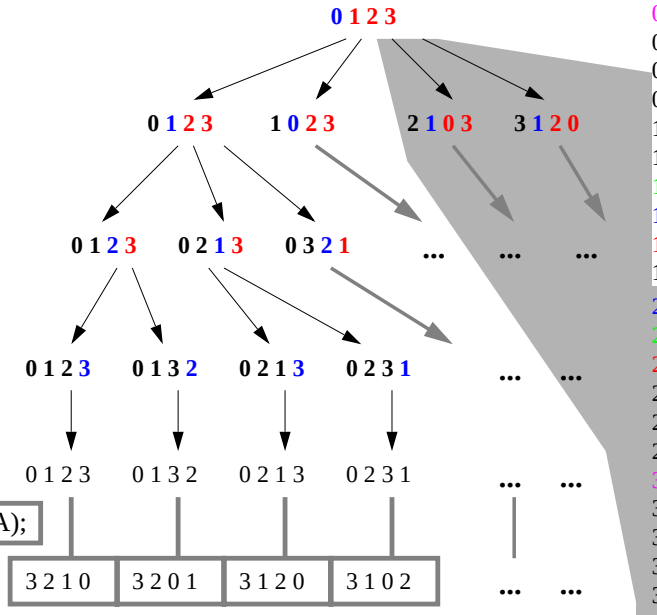
2. Avskjæring

Finn alle permutasjoner av [0,1,2...n-1] (for et partall n)

```
/*   perm(A,n) { int l= A.length-1;
 *   if (n==l) { skriv A; }
 *   else {
 *       for hver ind: n+1...l
 *           perm(A,n+1);
 *           bytt A[n] og A[ind]
 *       perm(A,n+1);
 *       roterL[n...l]; }
 */
     A[0..n-1] A[n] A[n+1..l]
     perm(A,0) skriver alle perm

/*   PE(A) { int l= A.length-1;
 *   for hver n: 0...l/2 {
 *       bytt A[0] og A[n];
 *       perm2(A,1);
 *       bytt A[0] og A[n]; }
 */
```

skriv inv(A);



0,1,2,3
0,1,3,2
0,2,1,3
0,2,3,1
0,3,2,1
0,3,1,2
1,0,2,3
1,0,3,2
1,2,0,3
1,2,3,0
1,3,2,0
1,3,0,2
2,1,0,3
2,1,3,0
2,0,1,3
2,0,3,1
2,3,0,1
2,3,1,0
3,1,2,0
3,1,0,2
3,2,1,0
3,2,0,1
3,0,2,1
3,0,1,2

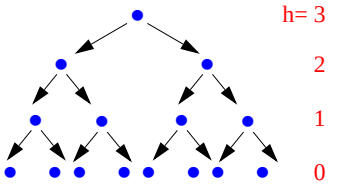
Kompleksitet av en rekursiv funksjon

≈ antall noder i rekursjonstreet

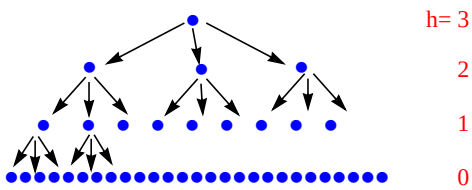
avhenger av

- *"**størrelsen på steget**" mot basis i hvert rekursivt kall (høyden av treet)*
- ***antall rekursive kall** i hvert steg ("bredden" av forgreninger)*
- *arbeidsmengden ved "sammensetting" av resultater fra rekursive kall*

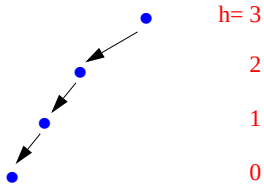
F(0) = 1, F(1) = 1
F(**n+1**) = F(**n**) + F(**n**) ***O***($2^{n+1} - 1$)



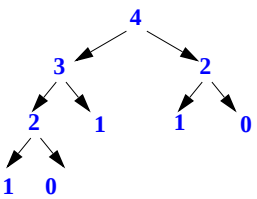
F(0) = 1, F(1) = 1
F(**n+1**) = F(**n**) + F(**n**) + F(**n**) ***O***($3^{n+1} - 1$)



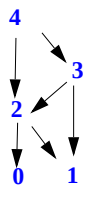
F(0) = 1, F(1) = 1
F(**n+1**) = F(**n**) * 2 ***O***(**n**)



F(0) = 1, F(1) = 1
F(**n+2**) = F(**n+1**) + F(**n**) ***O***(1.6^n)

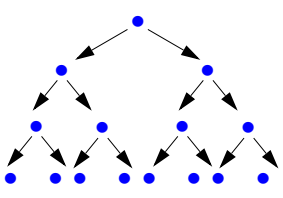


n/2 * 2 = ***O***(**n**)



MS(1) = 1
MS(**n**) = MS(**n/2**) + MS(**n/2**)

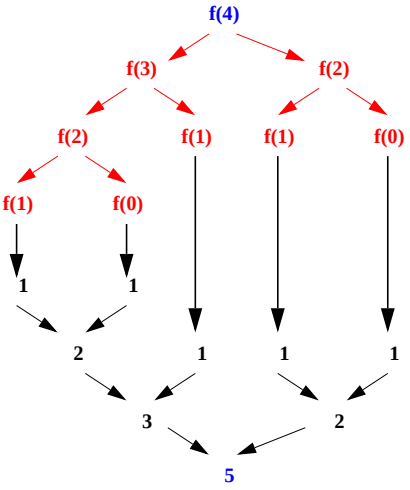
$2^{\log(n)+1}-1 = 2n-1 = O(n)$

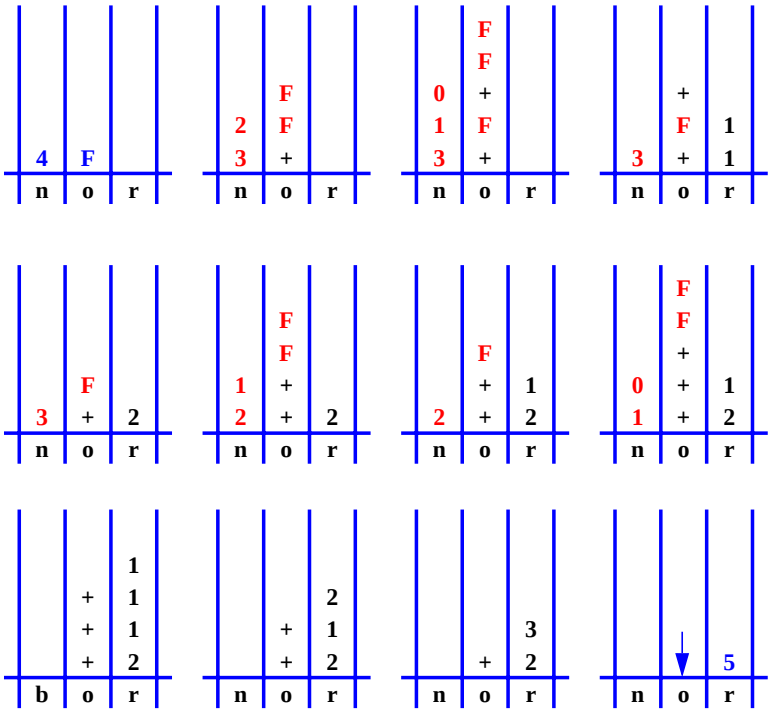


5. Rekursjon . . .

implementeres med Stabel

```
int Fib(int n) {
if (n==0 || n==1) return 1;
else
     return Fib(n-1) + Fib(n-2);}
```





Rekursjon til iterasjon

(kan alltid omgjøres v.hj.a. Stabel)

```
int Fib(int n) {
  if (n==0 || n==1) return 1;
  else
     return Fib(n-1) + Fib(n-2);
}
```

Noen rekursjon (f.eks. hale-rekursjon) kan omgjøres til iterasjon på en enklere måte.

```
int fibS(int a) {
  String  o; int n, a1, a2;
  Stack op = new StackImp();
  Stack re = new StackImp();
  Stack ar = new StackImp();

  op.push("F"); ar.push( new Integer(a) );
  while (!op.empty()) {
    o= (String) op.pop();

    if ( o.equals("F") ) {
        n= ( (Integer)ar.pop() ).intValue();
        if (n==0 || n==1) re.push( new Integer(1) );
        else {
            op.push("+"); op.push("F"); op.push("F");
            ar.push( new Integer(n-1) );
            ar.push( new Integer(n-2) ); }

    } else if ( o.equals("+") ) {
        a1= ( (Integer)re.pop() ).intValue();
        a2= ( (Integer)re.pop() ).intValue();
        re.push( new Integer(a1+a2) ); }
  }
  return ( (Integer)re.pop() ).intValue();
}
```

6. Korrekthet

Gitt en instans **n** *av et problem* **P** *:*

1. hva gjør jeg når **n** *er basis tilfelle*

2. hvordan konstruere løsning for **n** *utfra løsninger for noen* **mi** < **n**

P(n)
  if Basis(**n**)
    return ???

  else
    return
    Kombiner(**P(m1)** ... **P(mk)**)

Terminering:

P(n)
  if Basis(**n**)
  – stopper rekursjon

  else
  – vær sikker at hver **mi < n**, er nærmere Basis

Korrekthet:

P(n)
  if Basis(**n**)
  – kontroller at det utføres riktig handling

  else
  – **HVIS** hvert rekursivt kall **P(mi)** returnerer riktig resultat

  !!! DETTE ANTAR VI !!!

  – **SÅ** gir Kombiner(**P(m1)** ... **P(mk)**) riktig resultat

kombinasjon opprettholder ***rekursjons-invariant***

Korrekthet: rekursjons-invariant

```
/* int[] MS(int[] A) { int n= A.length;
 *    if (n == 1) { return A; }
 *    else {
 *       del A i midten i :
 *       t1= A[0...n/2]  og  t2 = A[n/2+1...n];
 *       sorter rekursivt (mindre) delene
 *          r1= MS(t1) og
 *          r2= MS(t2)
 *       return flettet resultat av
 *          rekursive kall FL(r1,r2) }
 */
```

Invariant:
MS(A) *returnerer sortert argument* A:

if **lgh==1** – ***da er A sortert***

else – deler A i to disjunkte deler

t1= **A[0...n/2]** og t2= **A[n/2+1...n]**

r1= MS(**t1**) ***returnerer sortert t1***
r2= MS(**t2**) ***returnerer sortert t2***

hvis FL *fletter korrekt to sorterte array,*
så returnerer hele else-grenen sortert A

```
/* int BS(int[] A, int x, int l, int h) {
 *    int m= (l+h) / 2 ;
 *    if (l > h) return –1;
 *    else if (A[m] == x) return m;
 *    else if (A[m] < x) return BS(A, x, m+1, h);
 *    else return BS(A, x, l, m–1); }
 */
```

Invariant:
argumentet A *er sortert &*
er x *i* A, *så er den mellom* [l ... h]
(*initielt kall med* (A, x, 0, A.length-1)

if **l > h** – **x** ***kan ikke være der (–1 er riktig)***

else if **A[m] = x** – ***da har vi funnet den (m er riktig)***

else if **A[m] < x** –

er x *i* A, *så må den være mellom* **[m+1... h]**

BS(A, x, **m+1**, **h**) ***vil returnere riktig resultat***

else **A[m] > x** –

er x *i* A, *så må den være mellom* **[l ... m–1]**

BS(A, x, **l**, **m–1**) ***vil returnere riktig resultat***

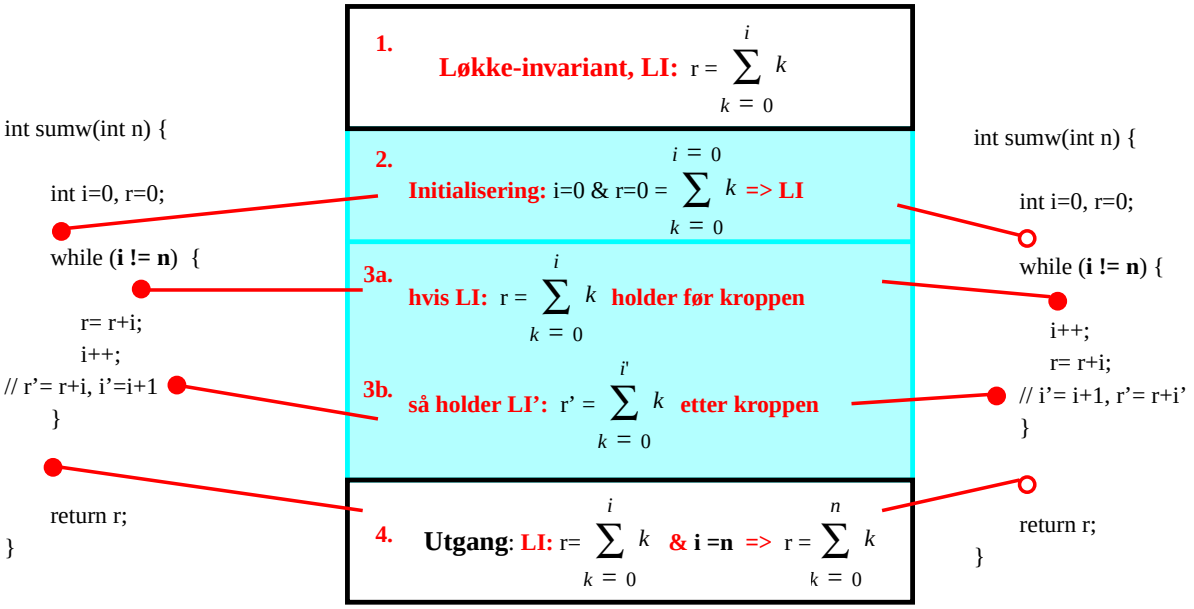
Løkke-invariant

```
int sum(int n) {
    if (n == 0) return 0;
    else return n + sum(n–1);
```

basis – gir riktig sum(0) =0

hvis sum(n–1) gir riktig = $\sum_{i=0}^{n-1} i$

så er sum(n) = n + sum(n–1) = $\sum_{i=0}^{n} i$



Løkke-invaraint: eksempel 1.

```
/**  beregner heltalls kvosient samt resten
     @param x >= 0
     @param y > 0
     @return (q, r) sa. x= q*y + r  &  0 <= r < y  &  0 <= q
*/
divr(int x, int y)  {
  int q = 0 ; int r = x ;
```

initialisering: q = 0 & r = x >= 0 → **x= q*y + r & 0 <= r & 0 <= q**

```
  while (y <= r)  {
```

LI: **0 <= r & x = q*y + r & 0 <= q**

– anta at den gjelder ved inngang, samt **y <= r**

```
    q = q+1 ;
    r = r – y;
```

– da gjelder, etter løkkekroppen:

q' = q+1 & **0 <= q** → **0 <= q'** &

r' = r–y & **0 <= r** & **y <= r** → **0 <= r'**

q'*y + r' = (q+1)*y + (r–y) = q*y + y + r – y = q*y + r = **x**

– dvs. LI opprettholdes gjennom kroppen

```
  }
```

utgang fra løkken: **LI** & **r<y** → **x = r + q*y** & **0 <= r < y** & **0 <= q**

```
  return (q, r) ;  }
```

Løkke-invariant: eksempel 2.

```
/**   beregner største felles divisor
      @param x1 > 0
      @param x2 > 0
      @return y2 = gcd(x1,x2) */
gcd(x1,x2) {
   y1= x1; y2= x2;   ←  initialisering: x1 = y1 & x2 = y2  →  gcd(x1,x2) == gcd(x1,x2)
   while (y1 != 0) {
      ←  LI:  gcd(y1,y2) = gcd(x1,x2) – anta at den gjelder her
      if (y2 < y1)
         (y1,y2) = (y2,y1);      – gcd(x1,x2) = gcd(y1,y2) = gcd(y2,y1) = gcd(y1',y2')
      else // (y2 >= y1)
         y2= y2–y1;              – gcd(x1,x2) = gcd(y1,y2) = gcd(y1,y2-y1) = gcd(y1,y2')
      ←  LI': cd(y1',y2') = gcd(x1,x2)
   }
   ←  utgang: LI  &  y1 = 0  →
        gcd(x1,x2) = gcd(y1,y2)
                   = gcd(0,y2) = y2
   return y2;
}
```

Hvis gcd(y1,y2) = z >=1 & y2 >= y1, så
*) y1 = z*k1 <= z*k2 = y2 & gcd(k1,k2) = 1
Men da:
y2'= y2–y1 = z*(k2–k1) & gcd(k1, k2–k1) = 1
hvis ikke, dvs. gcd(k1,k2–k1) = v > 1, da
k1= v*a & k2–k1= v*b, så
k2= v*b+v*a = v*(b+a)
dvs. da også gcd(k1,k2) = v >1 – motsier *)

Oppsummering

1. ***Rekursjon*** – *"**Splitt og hersk**"*
   – *bestem hva som må gjøres i basis tilfelle(r)*
   – *konstruer ("hersk") en løsning fra (rekursive) løsninger for ("splitt") noen mindre instanser*
2. *Enhver induktiv datatype (nat, int, lister, trær, ...) gir ophav til rekursive algoritmer*
3. *Rekursjon vs. iterasjon (rekursjon implementeres iterativt med bruk av stabel)*
4. *Kompleksistet av rekursiv funksjon avhenger av*
   – *antall noder i rekursjonstre ("splitt")*
   • *dybden (høyden) av treet – hvor stort steg mot basis utgjør hver "splitting"*
   • *antall rekursive kall (bredden av treet) på hvert nivå*
   – *arbeidsmengden for å konstruere en løsning utfra løsninger for mindre instanser ("hersk")*
5. ***Korrekthet***
   – *bestem rekursjons-ivarianten*
   • ***verifiser** at basistilfelle(r) etablerer invarianten*
   • *under **antakelse** at rekursive kall etablerer invarianten, **vis** at konstruksjonen vil opprettholde den*
   – *bestem løkke-invariant*
   • ***vis** at den gjelder etter initialisering (like før inngangen i løkken)*
   • *under **antakelse** at den gjelder før løkkekroppen, **vis** at den gjelder etter*