Implementasjon

EN ADT AV EN ANNEN DT

- Data representasjon
- Data Invariant

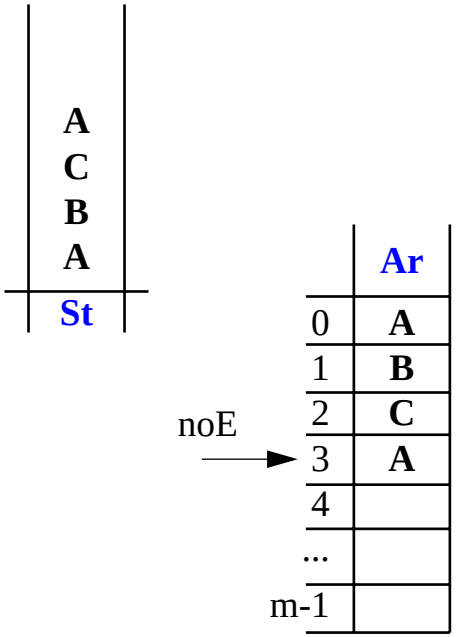
ALGORITMEANALYSE

- Asymptotisk notasjon

Kap. 1-2

Implementasjon (*Stack* med array)

```
public interface Stack {
   void push(Object o);
   Object pop() throws
      EmptyStackException;
   Object peek() throws
      EmptyStackException;
   boolean empty();
...}
```



I Data Representasjon

Hvordan skal en stabel representeres ?

- **en array med en peker tilsvarende peek()**
- **rekkefølgen er omvend rekkefølgen i Stabel**

II Data Struktur

Hvilke konkrete data trenger jeg å holde rede på ?

class Stab

– Object[] Ar

– int noE

– int max

III Data Invariant

DS kan holde forskjellige "inkonsistente" verdier – de må bindes på en måte som tilsvarer Stabel og denne "binding" må opprettholdes

noE – Ar[noE] er toppen av stabel – hvis

noE+1 = antall elementer > 0

Må passe på at **noE** *ikke går forbi* **Ar.length** *!*

max = Ar.length > noE >= –1

Opprettholdelse av DataInvarianten

```
public class Stab implements Stack {
    private Object[] Ar;
    private int noE, max=10;

    public Stab() {
        Ar= new Object[max]; noE= –1;
    }                                   // er DI ok etter initialisering ?

    public void push(Object o) {        // hvis: DI ok ved kall
        if (noE=max-1) {
            Object[] temp= new Object[max];
            Copy(Ar, tab);
            max= 2*max; Ar= new Object[max];
            Copy(tab,Ar);  }
        noE++;
        Ar[noE]= o;
    }                                   //  er DI ok ved retur ?

    public Object pop()                 // hvis: DI ok ved kall
        throws EmptyStackException {
        if (empty())
            throw new EmptyStackException("Tom");
        else { noE--; return Ar[noE+1]; }
    }                                   //  er DI ok ved retur ?
```

noE – Ar[noE] er toppen av stabel – hvis
noE+1 = antall elementer > 0
max = Ar.length > noE >= –1

```
    public Object peek()                // hvis: DI ok ved kall
        throws EmptyStackException {
        if (empty())
            throw new EmptyStackException("Tom");
        else return Ar[noE];
    }                                   // er resultatet ok ?

    public boolean empty() {            // hvis: DI ok ved kall
        return noE < 0;
    }                                   // er resultatet ok ?

    private void Copy(Object[] fra, Object[] til) {
                                        // hvis: DI ok ved kall
        for (int k=0; k<fra.length; k++)  til[k]= fra[k];
    }                                   // er DI ok ved retur ?
}
```

DataInvarianten kan – og bør – implementeres

noE – Ar[noE] er toppen av stabel – hvis
noE+1 = antall elementer > 0
max = Ar.length > noE >= –1

```
public class Stab implements Stack {
  private Object[] Ar; private int noE, max=10;
  public Stab() throws DIExc {  Ar= new Object[max]; noE= –1;
   if (!DI()) throw new DIExc("Init feil");
  }
  public void push(Object o) throws DIExc {
   if (!DI()) throw new DIExc("DI feil før push");
   if (noE=max-1) {
     Object[] temp= new Object[max];
     Copy(Ar, tab);
     max= 2*max; Ar= new Object[max];
     Copy(tab,Ar);  }
   noE++;
   Ar[noE]= o;
   if (!DI()) throw new DIExc("DI feil etter push");
  }
  public Object pop()  throws DIExc,
     EmptyStackException {
   if (!DI()) throw new DIExc("DI feil før pop");
   if (empty())
     throw new EmptyStackException("Tom");
   else { noE--;
     if (!DI()) throw new DIExc("DI feil etter pop");
     else return Ar[noE+1]; }
  }
```

```
protected boolean DI() {
  if (noE >= –1 && noE < max && max==Ar.length)
     return true;
  else return false;
}
public Object peek() throws DIExc,
     EmptyStackException {
  if (!DI()) throw new DIExc("DI feil før peek");
  if (empty())
     throw new EmptyStackException("Tom");
  else return Ar[noE];
}
public boolean empty() throws DIExc {
  if (!DI()) throw new DIExc("DI feil ved empty");
  return noE < 0;
}
private void Copy(Object[] fr, Object[] ti) throws DIExc {
  if (!DI()) throw new DIExc("DI feil");
  for (int k=0; k<fr.length; k++)  ti[k]= fr[k];
  if (!DI()) throw new DIExc("DI feil etter kopi");
}
```

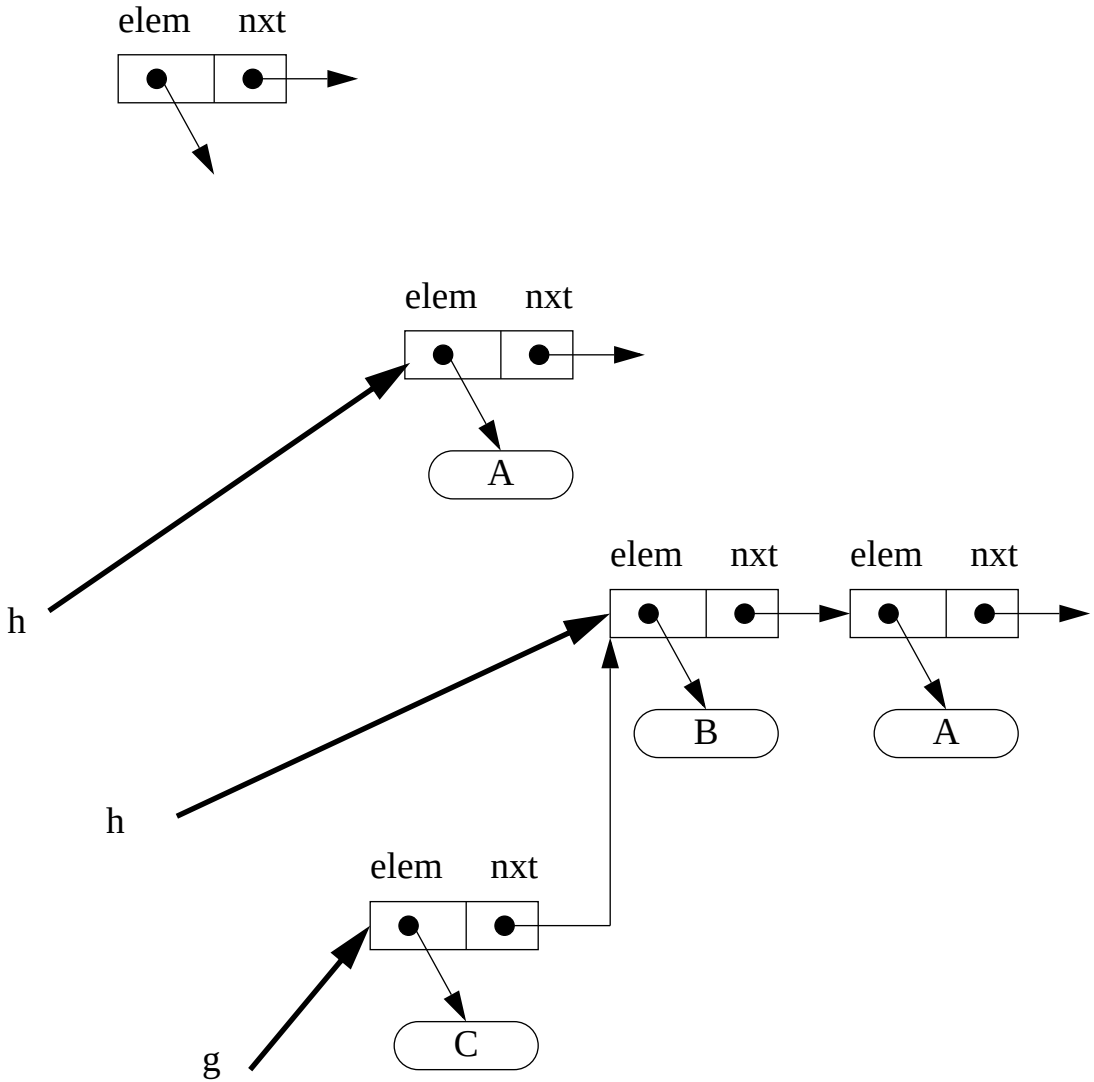
En-veis Lenket Liste - datastruktur

```
public class Node {
   private Object elem;
   private Node next;
   public Node(Object o, Node n) {
       elem= o; next= n;}
   public Node() { this(null, null); }
   public Object getElem() { return elem; }
   public Node getNext() { return next; }
   public void setElem(Object o) { elem= o; }
   public void setNext(Node n) { next= n; }
}
```

Node h= new Node(A,null);

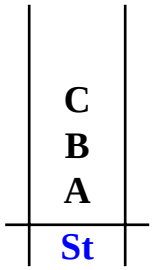
h= new Node(B,h);

Node g= new Node(C,h)



Implementasjon (*Stack* med LenketListe)

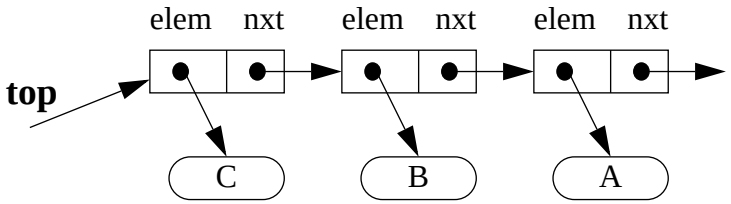
```
public interface Stack {
   void push(Object o);
   Object pop() throws
      EmptyStackException;
   Object peek() throws
      EmptyStackException;
   boolean empty();
...}
```



I Data Representasjon

Hvordan skal en stabel representeres ?

- **en klasse med en peker til top-node = peek()**
- **innsetting skjer i starten av listen**



II Data Struktur

Hvilke konkrete data trenger jeg å holde rede på ?

class StackLL

– Node top

III Data Invariant

DS kan holde forskjellige "inkonsistente" verdier – de må bindes på en måte som tilsvarer Stabel og denne "binding" må opprettholdes

top == peker alltid på toppen av stabel

== null hviss stabel er tom

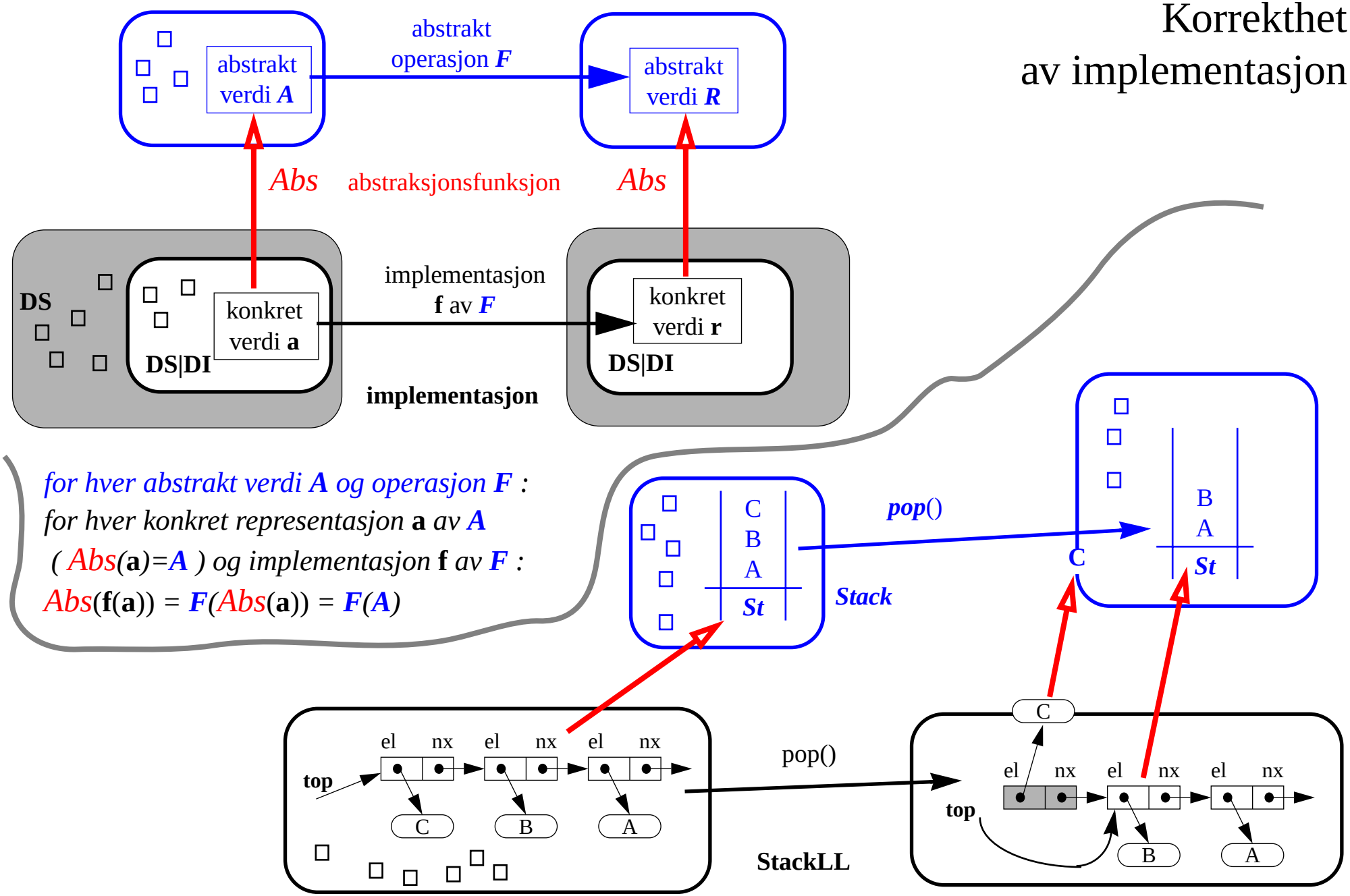
Opprettholdelse av DataInvarianten

```
public class StackLL implements Stack {
  private Node top;

  public StackLL() { top= null; }
                              // er DI ok etter initialisering ?

  public void push(Object o) {        //hvis: DI ok ved kall
    top= new Node(o,top);
  }                                   // er DI ok ved retur ?

  public Object pop()                 // hvis: DI ok ved kall
    throws EmptyStackException{
    if (empty()) throw
      new EmptyStackException("Tom ved pop");
    else {
      Object u= top.getElem();
      top= top.getNext();
      return u;
  } }                                 // er DI ok ved retur ?
```

top == peker på toppen av stabel
== null hviss stabel er tom

```
  public Object peek()  // hvis: DI ok ved kall
   throws EmptyStackException {
      if (empty()) throw
                  new EmptyStackException("Tom");
      else return top.getElem();
  }                                   // er resultatet ok ?

  public boolean empty()  {
                                // hvis: DI ok ved kall
      return (top==null);
  }                                   // er resultatet ok ?
}
```

Korrekthet av implementasjon



Oppsummering: implementasjon (av en (A)DT med en DT)

1. ***DataRepresentasjon:*** *hvordan kan* ***ADT****-elementene representeres v.hj.a.* ***DT****-elementene*

– det kan godt hende at du trenger flere konkrete DT'er, ***I1****,* ***I2****...****In****, for å holde all nødvendig informasjon*

2. ***DataStruktur:*** *velg en måte å binde sammen de relevante aspektene fra* ***I1****...****In***

– beskriv abstraksjonsfunksjonen ***Abs***
(denne avbilder kun de instansene av ***DT*** *som oppfyller* ***DataInvarianten****)*

3. ***DataInvarianten:*** *for din DataStruktur; spesifiser*

– hvilke instanser av DataStruktur faktisk representerer abstrakte verdier fra ***ADT***

– hvordan karakteriseres disse med relasjoner mellom attributter av forskjellige ***I1****...****In***

4. Implementer operasjonene fra ***ADT*** *på den valgte DataStrukturen*

– implementasjonen skal oppfylle spesifikasjonen (gitt i interface ; for- og bakbetingelser)

– verifiser, evt. implementer ***DataInvarianten****, forsikre deg om at*

- ***DI*** *holder etter initialisering*

og for hver implementert/konkret operasjon ***f*** *i din* ***DT****:*

- *dersom* ***DI*** *holder før* ***f*** *kalles, så holder den også etter at* ***f*** *returnerer*

5. Se hvor ***effektiv*** *din implementasjon er*

Effektivitet = tidskompleksitet

Tidsforbruk = *antall primitive (atomære) operasjoner*, P(_)

Primitive operasjoner:

- *sammenlikning*
- *aritmetikk (+, /, ...)*
- *aksess (A[x], P.k)*
- *tilordning,*
- *metodekall,*
- *return*
- . . .

```
                                                    P(op)
Stab(){ Ar= new Object[max]; noE= –1;}               3
void push(Object o) { if (noE==max-1) {              2
      Object[]temp = new Object[max];                2
      Copy(Ar,tab); max= 2*max;                    max+2
      Ar = new Object[max];                          2
      Copy(tab,Ar);  }                             max
   noE++; Ar[noE] = o;                               3
}                                                 5 / 11+ 2*max
Object pop() { if (empty()) return null;           1+1
   else { noE--; return Ar[noE+1];}                  3
}                                                   2/4
Object peek() { if (empty()) return null;          1+1
   else return Ar[noE];                             2
}                                                   2/3
boolean empty()  { return (noE < 0); }              2
```

- **P**(Stab.push(**n**)) = 11+2*max > 2 = **P**(LL.push(**n**))
- *Alt i LL tar konstant – uavhengig av* **n** *– tid*
- Stab.push *avhenger av* **max** *– ikke av* **n**

```
                                                    P(op)
StackLL() { top= null; }                             1
void push(Object o) {
   top= new Node(o,top);  }                          2
Object pop() {
   if (empty()) return null;                        1+1
   else { Object u= top.getElem();                   3
      top= top.getNext(); return u;                  4
} }                                                 2/8
Object peek() { if (empty()) return null;          1+1
   else return top.getElem();                       3
}                                                   2/4
boolean empty() {return (top==null);}               2
```

Tidskompleksitet = tidsforbruk *som funksjon av inputstørrelse* **n**

En operasjon *op* er *av orden 1*, *op* = **O**(1),
hviss det finnes to konstanter *k*, *n0* s.a.
$\forall n\ (n > n0 \rightarrow \mathbf{P}(op(n)) \leq k*1)$

O(1) = **O**(5) = **O**(k)

Algoritmeanalyse

```
/*    SS - sorterer input array (SeleksjonSort)
 *        @param  - int tab[0...n]
 *        @return - sortert tab
 *
 *    for (k = 0,1,2...n) {
 *        i = k
 *        for ( j = k+1...n)
 *            if (tab[j] < tab[i]) i = j;
 *        bytt elementene ved indeks k og i
 *        }
 */
```

Hvor mange ganger må jeg utføre basis operasjoner ?
sammnlikn. + flytting

k= 0	2	4	**1**	3	5	4 + 1
k= 1	**1**	4	**2**	3	5	3 + 1
k= 2	**1**	**2**	4	**3**	5	2 + 1
k= 3	**1**	**2**	**3**	**4**	5	1 + 1
k= 4	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	0 + 0
						10 + 4 = 14

for en vlikårlig input tabell med lengde **n***:*

- *utfører* **n** *iterasjoner (for k=1,2...***n***) og*
- *i hver iterasjon går gjennom sluttsegment* **[k...n]**, *(for j=k+1...n), dvs.*

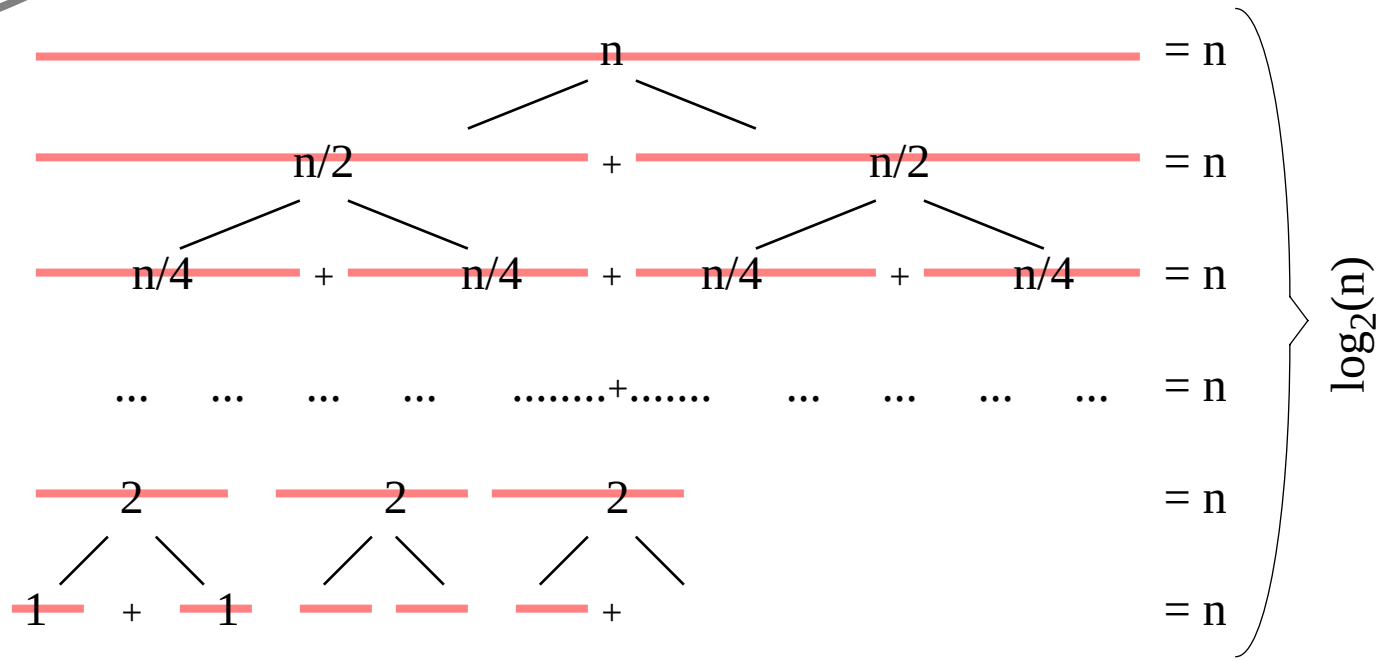
$$\text{tidskompleksistet } \boldsymbol{SS}(n) = \left(\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n \right) = (n + n^2)/2 = \mathbf{O}(n^2)$$

MergeSort

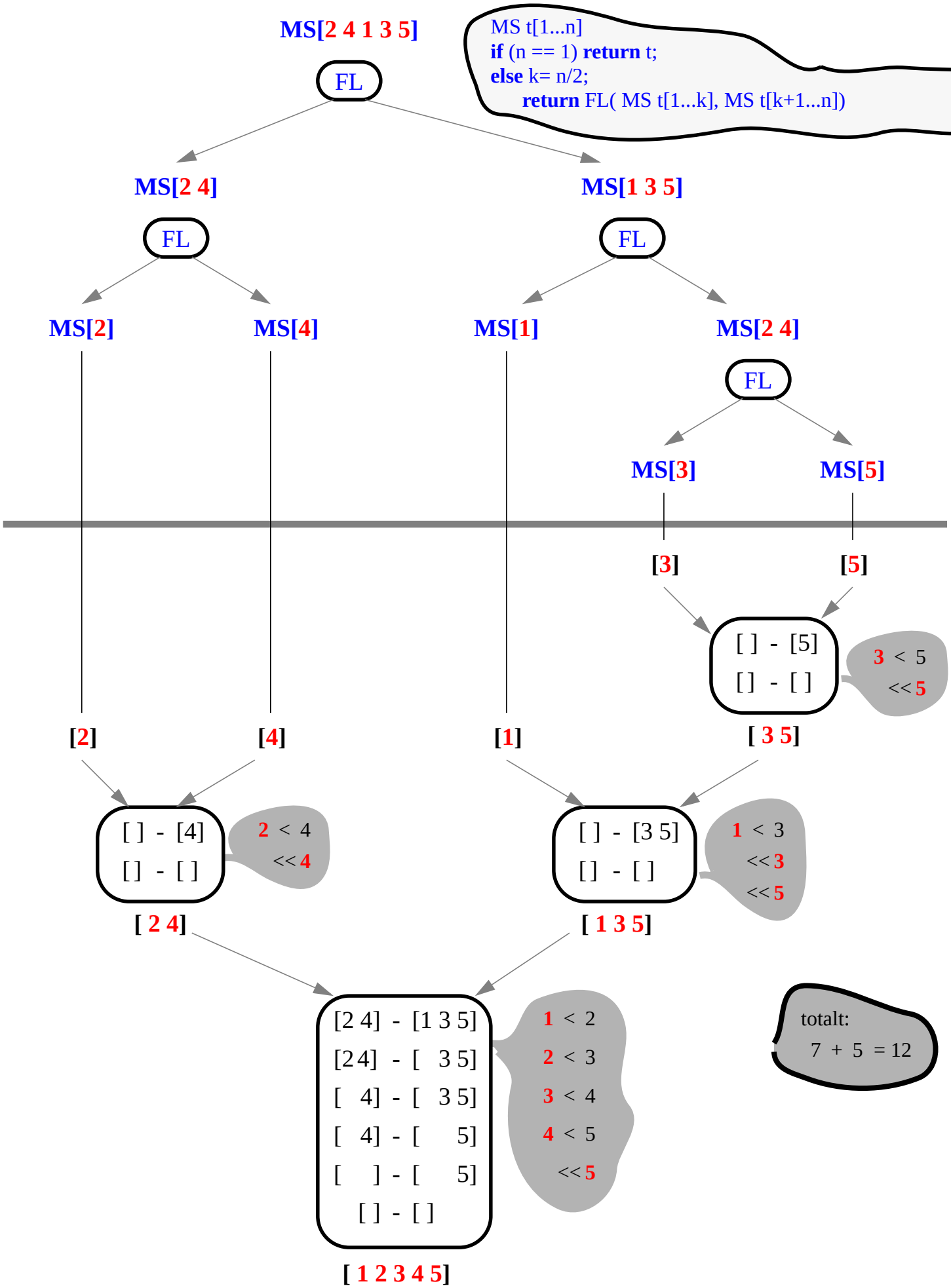
```
/*   FL - fletter to sorterte array:
 *       @param  - int t1[0...n1], t2[0...n2] - sorterte
 *       @return - sortert t[0.....n1+n2]
 *   gå (samtidig) gjennom t1 og t2 (med i1 og i2)
 *   if      t1[i1] < t2[i2] plasser t1[i1] i t og øk i1, i
 *   else                    plasser t2[i2] i t og øk i2, i
 *   hvis noe igjen i t1 eller t2, flytt det til t
 *   return t;
 */
```

$$FL(n1,n2) = O\ (n1+n2)$$

```
/*   MS - sorterer input array:
 *       @param  - int tab[0...n-1]
 *       @return - sortert tab
 *   if (n == 1) return tab
 *   else { k= n/2;
 *       return FL ( MS(tab[0...k]), MS(tab[k+1..n-1]) ); }
 */
```

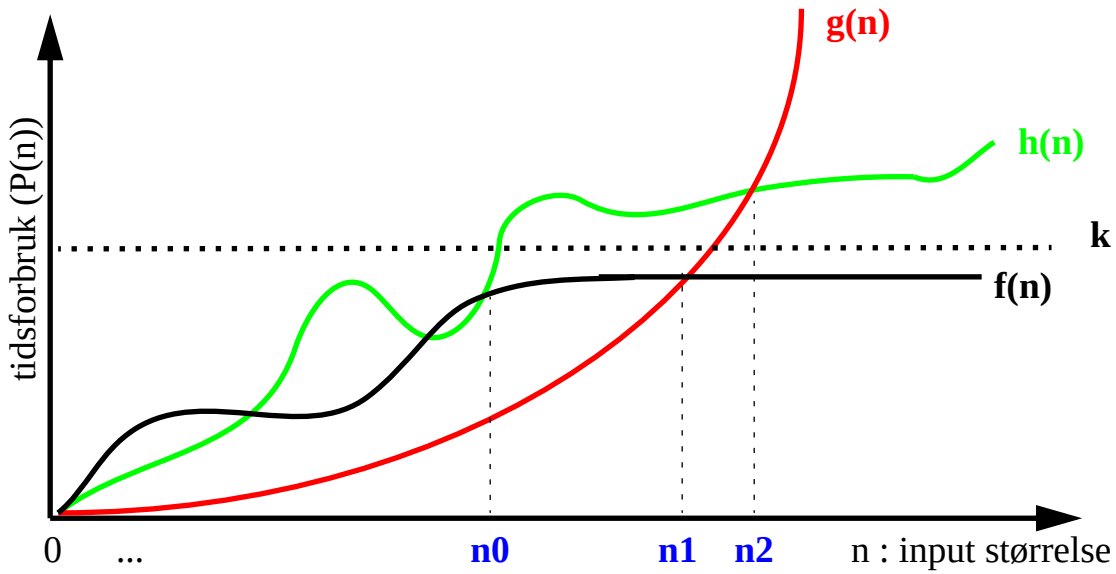


$$MS(n) = O\ (n * log_2(n))$$


MS[2 4 1 3 5]
FL
MS t[1...n]
if (n == 1) return t;
else k= n/2;
return FL(MS t[1...k], MS t[k+1...n])
MS[2 4]
MS[1 3 5]
FL
FL
MS[2]
MS[4]
MS[1]
MS[2 4]
FL
MS[3]
MS[5]
[2]
[4]
[1]
[3]
[5]
[ ] - [4]
[ ] - [ ]
2 < 4
<< 4
[2 4]
[ ] - [3 5]
[ ] - [ ]
1 < 3
<< 3
<< 5
[1 3 5]
[ ] - [5]
[ ] - [ ]
3 < 5
<< 5
[3 5]
[2 4] - [1 3 5]
[2 4] - [3 5]
[4] - [3 5]
[4] - [5]
[ ] - [5]
[ ] - [ ]
1 < 2
2 < 3
3 < 4
4 < 5
<< 5
[1 2 3 4 5]
totalt:
7 + 5 = 12

Asymptotisk notasjon: f(n) = **O**(g(n))

En funksjon f(n) *er av orden* g(n), f(n)= O(g(n)), *hviss*
det finnes konstanter **c** *og* **n0** s.a. $\forall n$ (n > **n0** $\rightarrow$ f(n) $\leq$ **c** * g(n))



for alle n > **n1** : **f(n)** $\leq$ **1** * **g(n)** :
f(n) = **O**(g(n))

for alle n > **n0** : **f(n)** $\leq$ **1** * **h(n)** :
f(n) = **O**(h(n))

for alle n > **0** : **f(n)** $\leq$ **k** * **h(n)** :
f(n) = **O**(h(n))

for alle n > **0** : **f(n)** $\leq$ **1** * **k** :
f(n) = **O**(k)

for enhver konstant **c** >= 1:

for alle n > **0** : f(n) $\leq$ **k** * **c** – f(n) = **O**(**c**)

for alle n > **0** : f(n) $\leq$ **k** * **1** – f(n) = **O**(**1**) **!!!**

for alle n > **n2** : h(n) $\leq$ **1** * **g(n)** – h(n) = **O**(**g(n)**)

O-notasjon

Gitt heltallsfunksjoner f, g, h : N → N

- f(n) = $\boldsymbol{O}$(g(n)) det finnes c, n0: n > n0 ! f(n) ≤ c * g(n) $f \leq_{\boldsymbol{O}} g$
  - $\boldsymbol{o}$(g(n)) $f <_{\boldsymbol{O}} g$
- f(n) = Ω(g(n)) hvis g(n) = $\boldsymbol{O}$(f(n)) $f \geq_{\boldsymbol{O}} g$
  - ω(g(n)) $f >_{\boldsymbol{O}} g$
- f(n) = Θ(g(n)) hvis f(n) = $\boldsymbol{O}$(g(n)) og g(n) = $\boldsymbol{O}$(f(n)) $f =_{\boldsymbol{O}} g$

***O** forekommer ikke på venstre side av =*

- Hvis f(n) = $\boldsymbol{O}$(h(n)) og h(n) = $\boldsymbol{O}$(g(n)) så også f(n) = $\boldsymbol{O}$(g(n))

  f(n) = $\boldsymbol{O}$(h(n))

  h(n) = $\boldsymbol{O}$(g(n))

  f(n) = $\boldsymbol{O}$(g(n))
- f(n) + g(n) = $\boldsymbol{O}$(max{ f(n), g(n) })
- Hvis f(n) = $\boldsymbol{O}$(h(n)) så f(n) + g(n) = $\boldsymbol{O}$(h(n) + g(n))
- Hvis f(n) = $\boldsymbol{O}$(h(n)) så f(n) * g(n) = $\boldsymbol{O}$(h(n) * g(n))
- for en gitt c: $\log(n^c) = \boldsymbol{O}(\log(n))$

En tommelfinger regel:

Glem lavereordens termer og konstanter:

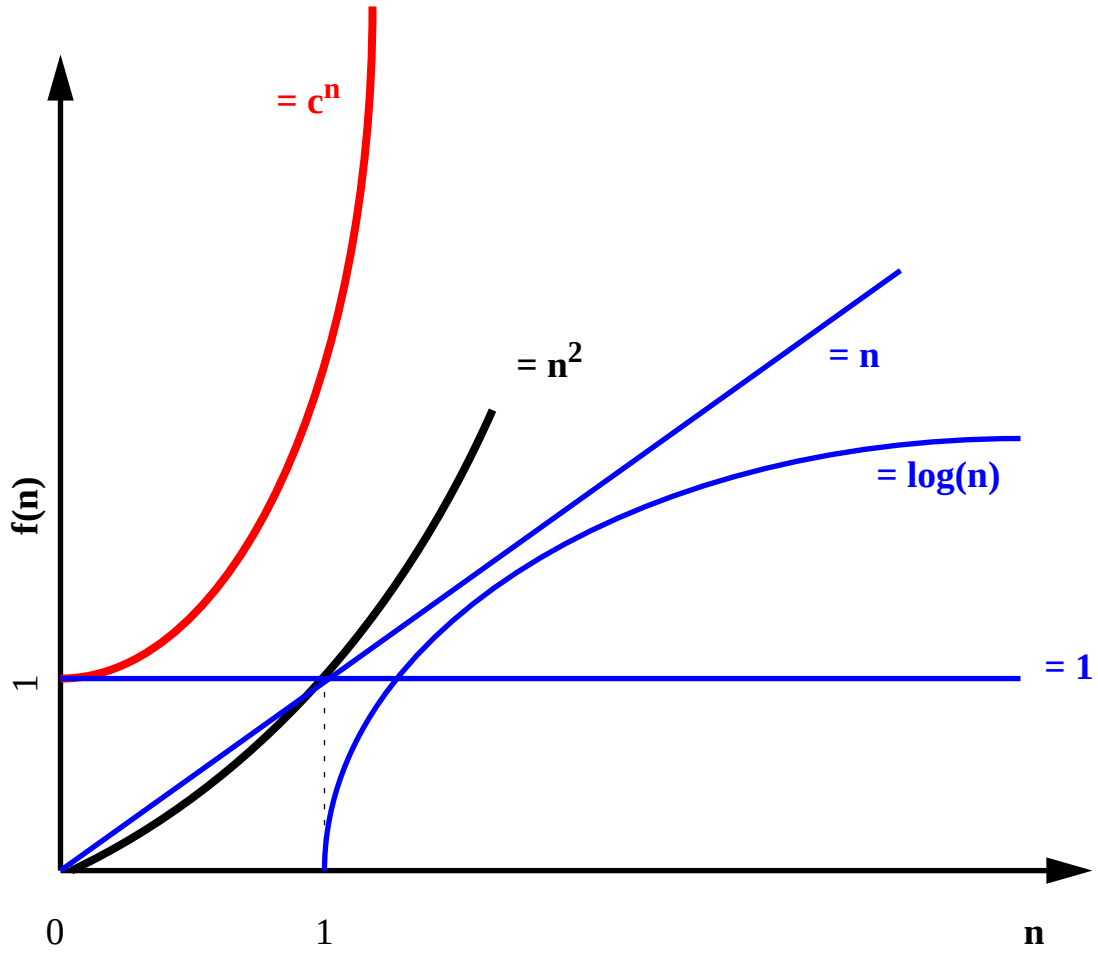
f(n) = $2 * \mathbf{n^3} + 16 * n^2 + 5000$

= $\boldsymbol{O}(n^3)$

f(n) = $8 * \mathbf{n^2 * \log(n)} + 3*n$

= $\boldsymbol{O}(n^2 * \log(n))$

Mest vanlige kompleksitets-klasser



konstant $O(1)$

$1 =_O 5 =_O 100 =_O 2^{100} =_O \ldots <_O$

logaritmisk $O(\log(n))$

$5 * \log(n) =_O 2^{100} * \log(n) =_O \ldots <_O$

linær $O(n)$

$5 * n =_O 7 * n - 3 =_O n + \log(n) =_O \ldots <_O$

kvadratisk $O(n^2)$

$5 * n^2 =_O 125 * n^2 + 5 * n - 3 =_O \ldots <_O$

polynomisk $O(n^k)$ $k > 1$

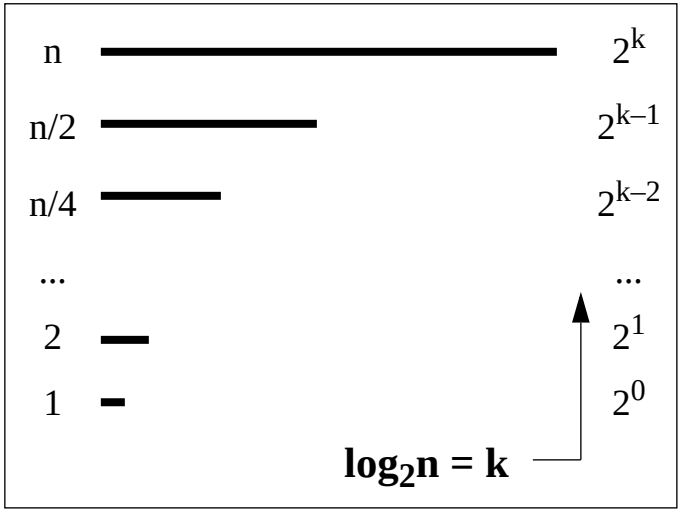
$5 * n^3 + 5 * n^2 + 5 * n + 3 <_O n^4 <_O n^6 <_O \ldots$

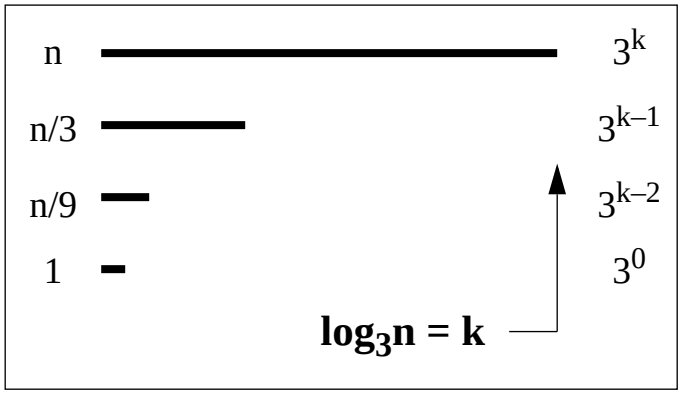
eksponensielt $O(k^n)$ $k > 1$

$5 * 2^n <_O 3^n =_O 3^n + n <_O 5^n <_O \ldots$

Noen enkle fakta

$\log_b n = k$ hviss **$b^k = n$**





$$\log_b n = \frac{\log_c n}{\log_c b}$$

$$\log_3 n = \frac{\log_2 n}{\log_2 3} = O$$

$$\log(n * m) = \log(n) + \log(m)$$

$$\log(n^c) = c * \log(n) = O$$

$$\log(n/m) = \log(n) - \log(m)$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2 + n}{2}$$

$$a^0 + a^1 + \ldots + a^n = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \qquad 0 < a \neq 1$$

Er det noen vits...???

$5 =_{\boldsymbol{O}} 2^{100}$

men er en algoritme som utfører 5 operasjoner like god som en som bruker 2^{100} .....?

Nei – i praksis burde man ta hensyn til slike konstanter skjult bak $\boldsymbol{O}(\_)$ – cf. Oblig.1

Vi har jo stadig raskere maskiner ...

$\boldsymbol{O}(\ )$	faktisk	problemstørrelse – løses på 1 sekund		
		dagens maskin	60-gngr raskere	3600-gngr raskere
n	400 * n	2 500	150 000	9 000 000
n * log(n)	20*n*log(n)	4 000	170 000	8 000 000
n^2	$2 * n^2$	700	5 500	43 000
n^4	n^4	30	90	250
2^n	2^n	20	25	30

3600-ganger raskere maskin vil løse et problem 9.000.000-stor dersom i dag kan den løse et problem 2.500 – dersom vi har en linær algoritme !!!

Men er algoritmen eksponensielt, vil dagens maskin kunne løse et problem 20-stor, mens en 3600-ganger raskere maskin vil, i samme tid, kunne løse bare et 30-stort problem !!!

Typisk ja, men i Verste Fall ...

Finn indeks til et element x i en array A[0...n]

```
/* int finn(x)
 *        i= 0; funnet= false;
 *        while (!funnet) {
 *            if   (Ar[i] == x) r = i; funnet = true;
 *            else i++; }
 *        if (funnet) return r
 *        else return –1;
 */
```

	Ar
0	**A**
1	**B**
2	**C**
3	**Z**
4	**V**
5	**Y**
n= 6	**X**

finn(A) – 1

i beste fall : 1 $\boldsymbol{O}(1)$

finn(V) – 5

gjennomsnittlig : n/2 $\boldsymbol{O}(n)$

finn(X) – 7

i verste fall : n $\boldsymbol{O}(n)$

O-notasjon brukes nesten utelukkende for verste-fall analyse

Oppsummering

Implementasjon av (A)DT

- *Data Representasjon*
- *Data Struktur*
- *Data Invariant*
- *Korrekthet*
  - *opprettholdelse av Data Invarianten*
  - *korrekt implementasjon av abstrakte operasjoner*

Effektivitet:

- *tidskompleksitet = hvordan avhenger tidsforbruket av størrelsen på input*
- *kompleksitets-klasser*
  - *linær*
  - *logaritmisk*
  - *polynomisk (kvadratisk)*
  - *eksponensiell*
- *verste-fall analyse*