Kapittel 12:
Rekursjon

Redigert av:

Khalid Azim Mughal (`khalid@ii.uib.no`)

Kilde:

Java som første programmeringsspråk (3. utgave)

Khalid Azim Mughal, Torill Hamre, Rolf W. Rasmussen
Cappelen Akademisk Forlag, 2006.
ISBN: 82-02-24554-0
`http://www.ii.uib.no/~khalid/jfps3u/`
(NB! Boken dekker opptil Java 6, men notatene er oppdatert til Java 7.)

Emneoversikt

- Rekursive definisjoner
- Rekursjon som problemløsningsteknikk
- Utforming av rekursjon
- Nøsting av metodekall
- Rekursive algoritmer
- Metodeaktiviseringer
- Rekursjonsdybde
- Evig rekursjon (rekursjonsbrønn)
- Forskjellige typer rekursjon:
  - Direkte rekursjon
  - Indirekte rekursjon
  - Enkel rekursjon
  - Hale-rekursjon
- Iterasjon kontra rekursjon

Eksempel:

- Fakultet-funksjon
- Binært søk
- Tårn i Hanoi
- Quicksort
- Fibonacci

Rekursjon

To iterate is human; to recurse, divine.

L. Peter Deutsch, Robert Heller

- Rekursjon oppstår når en operasjon benytter seg selv som en del av sin egen utførelse.
- Kan brukes på problemer som kan deles opp i mindre utgaver av seg selv.

- Problem: Finn ut hva fotokromi betyr, ved hjelp av ordbok:

  fotokromi: metode til fremstilling av fargetrykk i litografi.
  - Delproblem: Finn ut hva *litografi* betyr, ved hjelp av ordbok:

    litografi: grafisk trykkemetode hvorved en tegning eller skrift blir overført på en spesiell slags stein for derpå å trykkes på papir.
    - Del-delproblem: Finn ut hva *grafisk* betyr, ved hjelp av ordbok ...

- Hver deloperasjon må fullføres før operasjonen over kan fullføres.
- For at rekursiv operasjon skal kunne fullføres, må noen deloperasjoner kunne fullføres uten behov for flere deloperasjoner.

Rekursive definisjoner

- *Rekursiv definisjon*: en definisjon som er definert ved hjelp av seg selv.
- Sett i ordliste: *Rekursjon: se rekursjon.*
- Eks: Definisjon på en setning i Java er en rekursiv definisjon: en `for`-løkke kan ha en `for`-løkke i løkke-kroppen, og denne indre løkken kan ha en `for`-løkke i sin løkke-kropp, osv.

```
for (...; ...; ...) {
    for (...; ...; ...) {
        for (...; ...; ...) {
            ...
        }
    }
}
```

- Rekursjon er et velkjent begrep fra matematikken.
  - Faktorial-funksjon kan uttrykkes ved hjelp av en rekursiv definisjon:

```
0! = 1
n! = n * (n-1)!

3! = 3 * 2! = 3 * 2 * 1! = 3 * 2 * 1 * 0! = 3 * 2 * 1 * 1 = 6
```

Rekursjon som problemløsningsteknikk

- Modellerer problemer som kan deles i mindre, enklere underoppgaver som ligner på hverandre.
  - hver underoppgave kan løses ved å anvende samme teknikk.
- Hele oppgaven blir løst ved å kombinere løsninger til underoppgavene.
  - en form for splitt og hersk.
- I Java modellerer vi dette med metoder som kaller seg selv.
  - *Rekursiv metode*: En metode som er definert med kall til seg selv i metodekroppen.
- Krever et *basistilfelle* for å stoppe rekursjon.

Utforming av rekursjon

- Logikken i metoden må føre til at et basistilfelle blir utført: sekvens av mindre og mindre oppgaver *konvergerer* til et basistilfelle.
  - Dette oppnås vanligvis ved hjelp av en valgsetning, der en betingelse stopper rekursjon.
  - Denne betingelsen er vanligvis avhengig av en parameter til metoden. Et eller flere tilfeller der returverdien beregnes *uten bruk av rekursive kall*.
  - Disse tilfellene kalles for *basistilfeller*.
- Et eller flere tilfeller der returverdien beregnes *ved rekursive kall*.
  - Rekursive kall løser enda mindre versjoner av samme oppgaven.

Fakultet funksjon

Problem: Gitt *n* parkeringsplasser og *n* biler, finn antall kombinasjoner (*permutasjoner*) for å parkere bilene.

Iterativ definisjon:

```
n! = n * (n-1) * ... * 2 * 1
```

Rekursiv definisjon:

```
n! = n * (n-1)!
0! = 1
```

- Rekursive metodekall definerer funksjonen fakultet på samme måte som den matematiske definisjonen.
  - `fakultet(n)` = n!
  - Basistilfelle: For n = 0: `fakultet(n)` gir 1
  - Rekursivt kall: For n > 0: `fakultet(n)` gir `(n * fakultet(n-1))`

Eksempel: Iterativ utregning av fakultet

```
// IterativFakultet.java -- Iterativ utregning av fakultet
public class IterativFakultet {
    public static void main(String[] args) {
        System.out.println("5! = " + fakultet(5));
    }

    static int fakultet(int n) {
        int verdi = 1;

        for (int i=2; i<=n; i++)
            verdi *= i;

        return verdi;
    }
}
```

Utskrift ved kjøring:

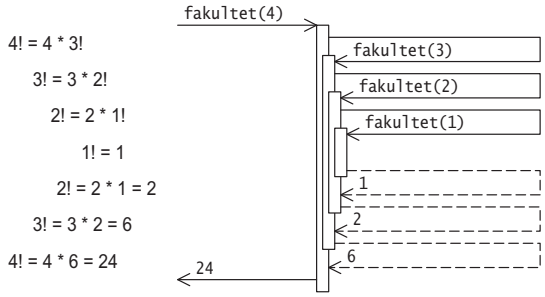
```
5! = 120
```

Eksempel: Rekursiv utregning av fakultet

```
// RekursivFakultet.java -- Rekursiv utregning av fakultet
public class RekursivFakultet {
    public static void main(String[] args) {
        System.out.print("Skriv heltall for utregning av fakultet: ");
        Scanner tastatur = new Scanner(System.in);
        int n = tastatur.nextInt();
        System.out.println(n + "! = " + fakultet(n));
    }

    static int fakultet(int n) {
        if (n == 0)
            return 1;                   // 0! = 1       (basistilfelle)

        return n * fakultet(n-1);       // n! = n * (n-1)!
    }
}
```

Kjøring av programmet:

```
Skriv heltall for utregning av fakultet:
12
12! = 479001600
```



Nøsting av metodekall

- *Rekursive metoder*:
  - Objekter kan sende (forskjellige) meldinger til seg selv, men må nå sende samme melding til seg selv.
  - Metoden må nå også håndtere mindre versjoner av den opprinnelige oppgaven.
- I en rekursiv metode *nøstes* metodekallene til basistilfellet nås.
- Når basistilfellet returnerer, så begynner alle metodekallene å *utnøstes*.
- Hver nøstede utføring av metoden tar vare på sine egne lokale variabler.
  - Disse variablene blir husket når programflyten returnerer fra et rekursivt metodekall.
  - Tilordninger som gjøres på lokale variabler i nøstede metodekall, vil ikke direkte påvirke lokale variabler i ytre metodekall.

Rekursive algoritmer

- Rekursiv algoritme:
  - Har to primære arbeidsmåter: *generelle tilfeller* og *basistilfeller*
  - Implementeres som en rekursiv metode.
- Oppgavens omfang:
  - angis av parameterene til den rekursive metoden.
  - avtar med hvert rekursive kall.
- *Generelle tilfeller:*
  - Gjør oppgaver mindre ved å dele den opp.
  - Benytter samme algoritme for å løse de mindre oppgavene.
  - Løsningen blir funnet ved hjelp av delløsningene.
- *Basistilfeller:*
  - Gir direkte løsninger for trivielle oppgaver.
  - Ingen nye rekursive kall.
  - Nødvendig for at de rekursive kallene skal slutte.
- Oppgavene *konvergerer* mot basistilfellet.

Metodeaktivisering og rekursjonsdybde

- Konsekvenser av rekursjon:
  - Mange aktiviseringer av en metode kan forekomme samtidig.
  - Hver aktivisering har egne instanser av lokale variabler (inkl. parametere).
  - *Rekursjonsdybde*: antall nøstede metodekall som gjøres før basistilfellet nås.
- *Rekursjonsbrønn*: rekursjon som aldri stopper.
  - Skjer hvis en rekursiv metode ikke konvergerer mot et basistilfelle.
  - Er en logisk programmeringsfeil.
  - Programmer med slike brønner vil som oftest bryte sammen under kjøring på grunn av den uendelige nøstingen.

Huskeregeler for bruk av rekursjon

- Kontroller at *rekursjonsbrønn* ikke forekommer.
  - For hvert rekursive kall må metoden komme et skritt nærmere basistilfellet.
  - Bunnen av rekursjonskallene er nådd når argumentene beskriver et basistilfelle.
- Et rekursivt kall må aldri resultere i at metoden blir kalt på nytt med samme argumenter.
  - Kontroller at hvert *basistilfelle* utfører riktig handling.
  - Kontroller at *for hvert tilfelle som bruker rekursjon*, *dersom* alle rekursive kall utfører sine handlinger riktig, *så* utføres hele tilfellet riktig.

Forskjellige typer rekursjon

- Direkte rekursjon:
  - Definisjon av en metode `foo()` inneholder (et eller flere) kall til metode `foo()`.
  - Eksempel: alle eksempler gitt i notatet.
- Indirekte rekursjon:
  - To eller flere metoder samarbeider rekursivt istedenfor bare én.
  - Metoder kan være implementert i samme eller i forskjellige objekter.
  - F.eks. definisjon av en metode `foo()` inneholder (et eller flere) kall til metode `bar()` (i samme eller forskjellige objekter) som i sin tur inneholder kall til metode `foo()`.
- Enkel rekursjon (*simple recursion*):
  - Kall til en metode `foo()` fører til ett rekursivt kall av metode `foo()`, mao. ingen *oppspalting* av rekursjon – hver underoppgave kaller kun én annen underoppgave.
  - Eksempel på enkel rekursjon: Faktorial-funksjon, binært søking.
  - Eksempel på *oppspalting* av rekursjon: Tårn i Hanoi, fibonacci tall.
- Halerekursjon (*tail recursion*):
  - Definisjon av en metode er slik at alle rekursive kall forekommer som den siste setningen som utføres før retur fra metoden.
  - Eksempel på halerekursjon: binært søking.

Sammenligning av rekursjon og iterasjon

- Rekursjon er vanligvis mer kostbar pga. flere metodekall.
- Rekursjon er mer konsis og elegant for oppgaver som naturlig egner seg til denne teknikken.
- *Enkel rekursjon* og *iterasjon* er beregningsmessig ekvivalente (jfr. Faktorial-eksempel).

	Iterasjon	**Rekursjon**
Basert på en kontroll-struktur:	• bruker en løkke-struktur (`for`, `while`, `do-while`)	• bruker en valg-struktur (`if`, `if-else`, `switch`)
Bruker repetisjon:	• *eksplisitt* bruk av en løkke-struktur for repetisjon	• gjentatte metodekall for å oppnå repetisjon
Stoppkriteriet:	• stopp når løkkebetingelsen blir usann • kan føre til *evig løkke*	• stopp når et basistilfelle blir utført • kan føre til *rekursjonsbrønn*
Konvergens mot terminering:	• teller-basert repetisjon konvergerer mot sluttverdi som terminerer løkken	• stadig enklere versjoner av underoppgaver konvergerer mot et basistilfelle som terminerer rekursjon

Binært søk

- Finner elementer i sorterte tabeller.
- Deler søkerommet i to for hvert skritt.
- Eliminerer halve søkerommet for hvert skritt.
- Kan løses både iterativt og rekursivt:

Rekursiv binærsøk algoritme:

Operasjon binærsøk(målelement, søkerom):
  Hvis søkerommet er tomt:
    Returner målet-finnes-ikke.
  Finn midterste-element i søkerommet.

  Hvis midterste-element == målelement:
    Returner posisjonen-til-målelementet.
  Hvis målelement < midterste-element:
    Returner binærsøk(målelement, søkerom-før-midterste-element).
  Ellers:
    Returner binærsøk(målelement, søkerom-etter-midterste-element).

```java
// FinnRekursivt.java -- Rekursivt binærsøk etter primtall
public class FinnRekursivt {
    // Konstant som signaliserer at et tall ikke finnes i tabellen.
    static final int FINNES_IKKE = -1;

    public static void main(String[] args) {
        // Tabell med primtallene mellom 1 og 100 i sortert rekkefølge:
        int[] primtall = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41,
                          43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97};
        System.out.print("Skriv heltall mellom 1 og 100: ");
        Scanner tastatur = new Scanner(System.in);
        int tall = tastatur.nextInt();
        if ((tall<1) || (tall>100)) {
            System.out.println("Tallet var ikke mellom 1 og 100");
            return;
        }

        int primtallIndex = finn(primtall, tall);
        if (primtallIndex == FINNES_IKKE) {
            System.out.println(tall + " er ikke et primtall");
        } else {
            System.out.println(tall + " er primtall nummer " +
                               (primtallIndex + 1));
        }
    }
```



```java
    static int finn(int[] sortertTabell, int nøkkel) {
        return binærsøk(sortertTabell, nøkkel, 0, sortertTabell.length - 1);
    }

    static int binærsøk(int[] sortertTabell, int mål, int nedre, int øvre) {
        if (nedre > øvre) {
            return FINNES_IKKE; // basistilfelle, tom søkerom.
        }

        int midten = (nedre + øvre)/2;
        int midtersteTall = sortertTabell[midten];

        if (mål == midtersteTall) {
            return midten; // Enda et basistilfelle. Målet ble funnet.
        }

        // Generelt tilfelle: søk i enten nedre eller øvre tabellsegment.
        if (mål < midtersteTall) {
            return binærsøk(sortertTabell, mål, nedre, midten-1);
        } else {
            return binærsøk(sortertTabell, mål, midten+1, øvre);
        }
    }
}
```

Java implementasjon av binærsøkalgoritme

- Finner heltall i en sortert tabell.
- Tabellen inneholder alle primtallene fra 1 til 100.
- For angitt heltall, slår opp i tabellen og rapporterer:
  - om tallet er et primtall, med andre ord, finnes i tabellen.
  - hvor langt ut i primtallrekken tallet er.

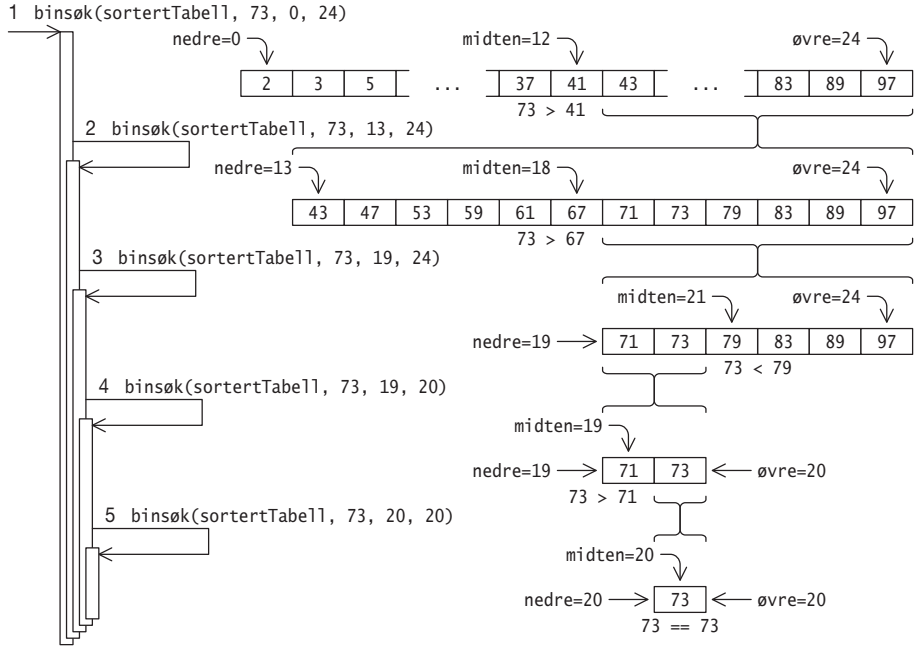
Kjøring av programmet:

```
Skriv heltall mellom 1 og 100: 73
73 er primtall nummer 21
```

- Parameterene spesifiserer nedre og øvre grensene til søkerommet.
- Søkerommet halveres for hvert rekursivt kall.
- Binærsøkalgoritmen bruker halerekursjon.

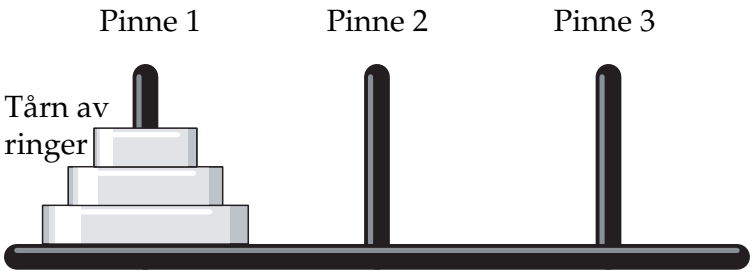
Søke eksempel

Søking etter tallet 73 ved kjøring:



Tårn i Hanoi

- Spill oppfunnet av den franske matematiker Edouard Lucas i 1883.
  - Tre pinner
  - Ringer av forskjellige størrelser



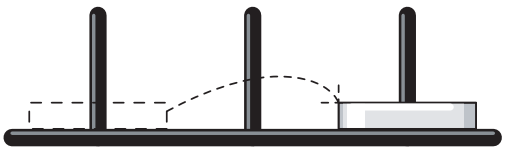
- Mål: flytt tårn med n ringer av forskjellige størrelser fra pinne 1 til pinne 3.
- Regel 1: Ringer kan ikke plasseres oppå mindre ringer.
- Regel 2: Kun én ring kan flyttes om gangen.

Tårn i Hanoi (en ring)

- Spillet kan spilles med et hvilket som helst antall ringer.

Hanoi-løsning for én ring:

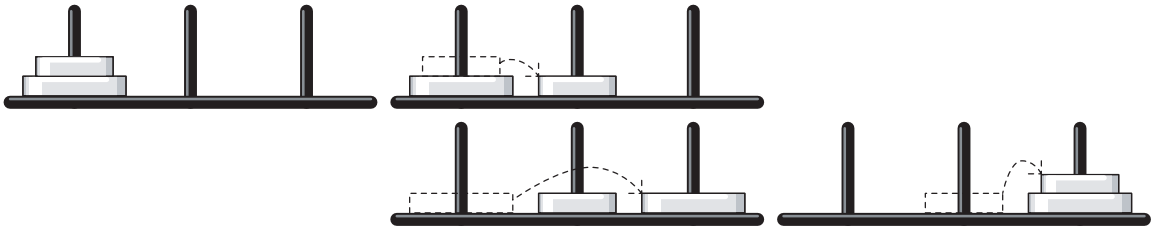
- Løsning er triviell.
  - *(tenk basistilfelle)*
- Ring kan flyttes direkte til målpinnen.



Tårn i Hanoi (to ringer)

Hanoi-løsning for to ringer:

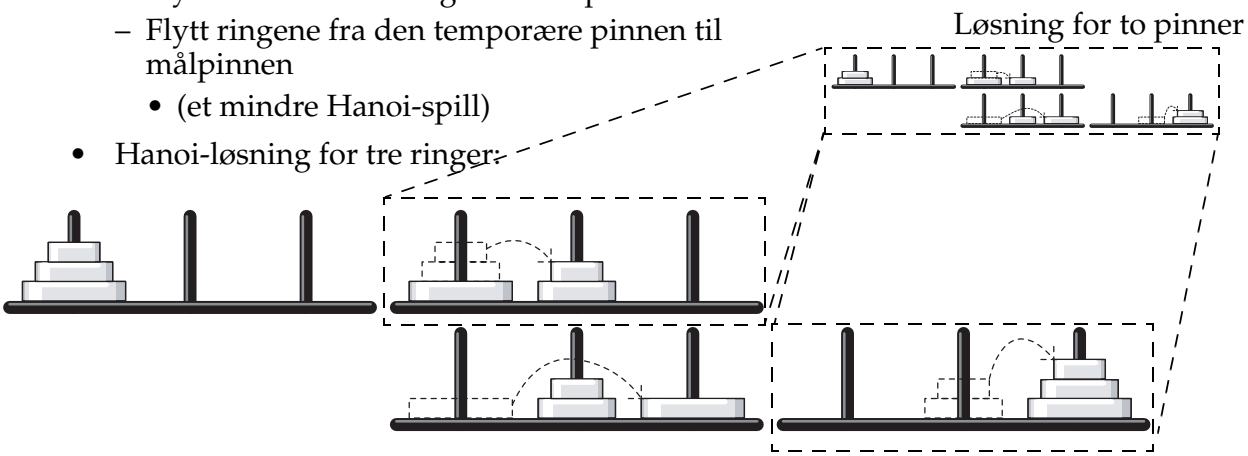
- Nederste ring må havne nederst på målpinnen. (regel 1)
- Ringen som ligger oppå må flyttes vekk først.



- Flytt den lille ringen til en midlertidig pinne.
- Flytt den store ringen til målpinnen.
- Flytt den lille ringen fra den midlertidige pinnen oppå den store ringen på målpinnen.

Tårn i Hanoi: rekursiv algoritme

- Løsninger følger et visst mønster.
  - Blir tydelig når antall ringer øker.
  - Kan beskrives som en rekursiv algoritme.
- *Flytte et tårn fra en pinne til en annen:*
  - Flytt vekk alle ringene bortsett fra den nederste ringen til en temporær pinne.
    - (et mindre Hanoi-spill)
  - Flytt den nederste ringen til målpinnen.
  - Flytt ringene fra den temporære pinnen til målpinnen
    - (et mindre Hanoi-spill)
- Hanoi-løsning for tre ringer:

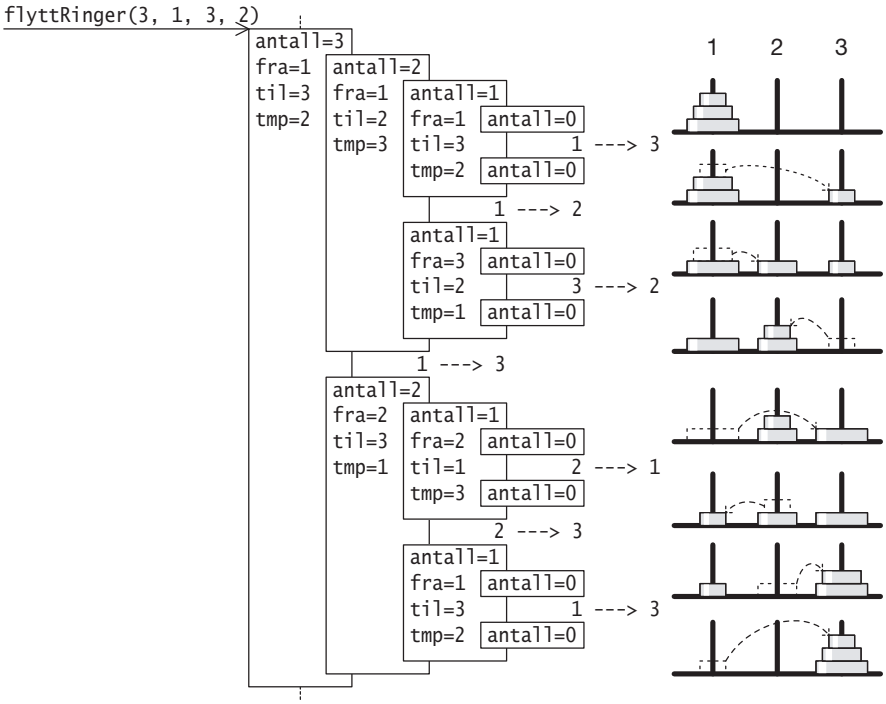


```
public class Hanoi {
    public static void main(String[] args) {
        int antallRinger = 3;
        System.out.println("Flytter " + antallRinger + " ringer:");
        /* Flytt alle ringene fra pinne 1 til pinne 3 ved å bruke 2 som
           midlertidig lagringsplass. */
        flyttRinger(antallRinger, 1, 3, 2);
    }
    static void flyttRinger(int antall, int fra, int til, int tmp) {
        if (antall < 1)
            return; // Basistilfelle: Ingen ringer å flytte.

        /* Først flyttes de antall-1 nederste ringene over til "tmp"-pinnen.
           Bruk "til"-pinnen som midlertidig lagringsplass: */
        flyttRinger(antall-1, fra, tmp, til);

        // Ringene over er fjernet, og den nederste ringen kan flyttes:
        System.out.println(fra + " ---> " + til);

        /* De antall-1 ringene på "tmp"-pinnen kan nå flyttes til
           "til"-pinnen. Bruk "fra"-pinnen som midlertidig lagringsplass: */
        flyttRinger(antall-1, tmp, til, fra);
    }
}
```

```
Flytter 3
ringer:
1 ---> 3
1 ---> 2
3 ---> 2
1 ---> 3
2 ---> 1
2 ---> 3
1 ---> 3
```


- To rekursive kall per rekursjonsnivå.
- Metoden `flyttRinger()` har følgende lokale variabler:
  - `antall`: antall ringer i tårnet som skal flyttes i denne deloppgaven
  - `fra`: tallet som identifiserer pinnen tårnet skal flyttes vekk fra
  - `til`: tallet som identifiserer pinnen tårnet skal flyttes til
  - `tmp`: tallet som identifiserer pinnen som kan brukes til midlertidig lagring av ringer
- Hver utføring av metoden har sin egen utgave av disse variablene.
  - Tas vare på under rekursjonen.
  - Når programflyten vender tilbake fra et rekursivt metodekall, vil variablene fremdeles være slik de var før det rekursive metodekallet.
- Under metodekall blir lokale variabler lagret i en implisitt stabel. (*programstabel*, eng. *program stack*)
- Hver metodeutføring har sin egen *stabelramme* på programstabelen:
  - Inneholder de lokale variablene.
  - Opprettes på programstabelen når en metode blir kalt.
  - Fjernes når metoden returnerer.

Programstabel som vokser og krymper



Antall rekursive kall: 2^n - 1, der n er antall ringer.

Rekursiv sorteringsalgoritme: Quicksort

- En effektiv rekursiv sorteringsalgoritme for tabeller.
- Denne *splitt-og-hersk* algoritmen deler sorteringsoppgaven i to og bruker et rekursivt kall for å løse hver del av oppgaven.
- Mesteparten av arbeidet i Quicksort-algoritmen består i å dele opp oppgaven.
  - En operasjon arbeider på et tildelt tabellsegment som skal sorteres.
  - Tabellsegmentet deles opp og tilpasses slik at oppgaven kan løses ved å sortere hver av delene separat.
  - Et segment deles slik at det største elementet i den første delen er mindre enn alle elementene i den andre delen.

Algoritme: Quicksort

Operasjon quicksort(segment):
Hvis segment er tomt:
Returner.
skilleelement = første element i segment
Utfør partisjonering av segment i to deler: del1 og del2
quicksort(del1)
quicksort(del2)

Operasjon partisjonering(segment):
skilleelement = et valgt element i segmentet
Bytt rundt på elementene i segmentet slik at:
Alle elementene mindre enn skilleelement kommer før skilleelement
Alle elementene større enn skilleelement kommer etter skilleelement

Quicksort

```
static <T extends Comparable<T>> void quicksort(T[] elementer,
                                                int første, int siste, int nivå) {
      // Basistilfelle: 0 eller ett element, ingen sortering nødvendig.
      if (første >= siste) {
          System.out.println(blanker(nivå) + nivå + "> basistilfelle");
          return;
      }

      // Generelt tilfelle: Partisjoner segmentet.
      skrivSegment(blanker(nivå) + nivå + "> segment før deling: ",
                   elementer, første, siste);
      int skillePosisjon = partisjoner(elementer, første, siste, nivå);
      System.out.println(blanker(nivå) + nivå + "> skilleelementet: " +
                         elementer[skillePosisjon]);
      skrivSegment(blanker(nivå) + nivå + "> segment etter deling: ",
                   elementer, første, siste);

      // Sorter elementene som var mindre eller lik skilleelementet:
      skrivSegment(blanker(nivå) + nivå + "> sorter: ",
                   elementer, første, skillePosisjon-1);
      quicksort(elementer, første, skillePosisjon-1, nivå+1);
      skrivSegment(blanker(nivå) + nivå + "> sortert: ",
                   elementer, første, skillePosisjon-1);
```

```
    // Sorter elementene som var større enn skilleelementet:
    skrivSegment(blanker(nivå) + nivå + "> sorter: ",
                 elementer, skillePosisjon+1, siste);
    quicksort(elementer, skillePosisjon+1, siste, nivå+1);
    skrivSegment(blanker(nivå) + nivå + "> sortert: ",
                 elementer, skillePosisjon+1, siste);
}
```


Partisjonering

```
static <T extends Comparable<T>> int partisjoner(T[] elementer,
                                                 int første, int siste, int nivå) {
   /* Generelt tilfelle: Del opp elementene i dem som er mindre
      eller lik skilleelementet, og dem som er større enn
      skilleelementet. */
   T skilleElement = elementer[første];
   int sisteLite = første;
   int sisteUdelte = siste;
   // Utfør så lenge det er flere elementer som ikke har blitt delt.
   while (sisteLite < sisteUdelte) {
       // skrivSegment(blanker(nivå) + nivå + "> deling: ",
       //            elementer, første, siste);
       int førsteUdelte = sisteLite + 1;
       T testElement = elementer[førsteUdelte];
       boolean større = testElement.compareTo(skilleElement) > 0;
       if (større) {
           // Bytt om for å plassere elementet etter de udelte.
           elementer[førsteUdelte] = elementer[sisteUdelte];
           elementer[sisteUdelte] = testElement;
           --sisteUdelte;
       } else {
           // Elementet er på riktig side av de udelte allerede.
           ++sisteLite;
       }
   }
```



```
   /* Ingen udelte igjen. Plassér skilleelementet mellom de store og
      små elementene ved å bytte plass med det siste av de små. */
   int skillePosisjon = sisteLite;
   elementer[første] = elementer[skillePosisjon];
   elementer[skillePosisjon] = skilleElement;
   // skrivSegment(blanker(nivå) + nivå + "> deling: ",
   //              elementer, første, siste);
   return skillePosisjon;
}
```

Kjøring av programmet:

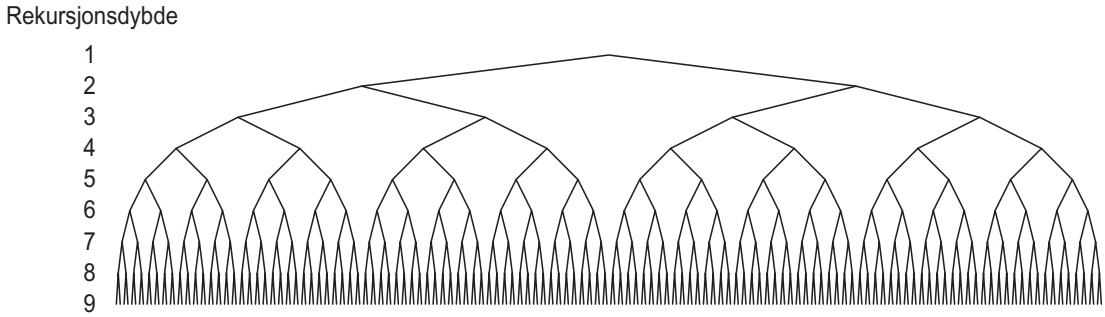
```
Tabell usortert: hei syk lot dal nes buk lam
1> segment før deling: hei syk lot dal nes buk lam
1> skilleelementet: hei
1> segment etter deling: dal buk hei nes lot lam syk
1> sorter: dal buk
    2> segment før deling: dal buk
    2> skilleelementet: dal
    2> segment etter deling: buk dal
    2> sorter: buk
        3> basistilfelle
    2> sortert: buk
    2> sorter:
        3> basistilfelle
    2> sortert:
1> sortert: buk dal
1> sorter: nes lot lam syk
    2> segment før deling: nes lot lam syk
    2> skilleelementet: nes
    2> segment etter deling: lam lot nes syk
    2> sorter: lam lot
        3> segment før deling: lam lot
        3> skilleelementet: lam
        3> segment etter deling: lam lot
        3> sorter:
            4> basistilfelle
        3> sortert:
        3> sorter: lot
            4> basistilfelle
        3> sortert: lot
    2> sortert: lam lot
    2> sorter: syk
        3> basistilfelle
    2> sortert: syk
1> sortert: lam lot nes syk
Tabell sortert: buk dal hei lam lot nes syk
```


Enhetstest for Quicksort

```
import junit.framework.TestCase;

public class TestSort extends TestCase {

  String[] array;

  public TestSort(String testMethodName) {
    super(testMethodName);
  }

  public void setUp() {
    array = new String[] { "This", "is", "not", "so", "difficult" };
  }

  public void testOrder() { // array[0] <= array[] <= ... <= array[n-1]
    Quicksort.sorter(array);
    for (int i = 1; i < array.length; i++) {
      int status = array[i-1].compareTo(array[i]);
      assertTrue("Not sorted. Check index: " + i, status <= 0);
    }
  }
}
```

Eksponentiell økning i antall metodekall

- Dersom oppgaven deles opp i to eller flere rekursive metodekall, er ikke rekursjonsdybden lik antall ganger metoden kalles.
  - I Quicksort-algoritmen, dobles det totale antall metodekall for hvert rekursjonsnivå.



- Resultat av mer enn ett rekursivt kall per rekursjonsnivå.
- Gjør at rekursive algoritmer ikke alltid er beste løsning.

Fibonacci-serien

- Tallrekke 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 510, 787...
- *Matematisk definisjon:*

  $f_1 = 1,\ f_2 = 1$

  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$
- *Java implementasjon:*

```
static int fibonacci(int n) {
    if (n < 3)
        return 1;
    return fibonacci(n-2) + fibonacci(n-1);
}
```

- Utregning av f_n vil kreve utregning av f_{n-1} og f_{n-2}.
  - begge disse krever utregning av f_{n-3}
  - utregningen vil skje separat for både f_{n-1} og f_{n-2}
- Mengden med dobbeltarbeid øker eksponentielt, med n.

Fibonacci-tall	Antall metodekall
f_3	3
f_4	5
f_5	9
f_6	15

- Iterativ utregning er bedre.

```
static int fibonacci(int n) {
  int nestSiste = 1;
  int siste = 1;
  for (int i=3; i<=n; i++) {
    int neste = siste + nestSiste;

    // Forskyv variablene:
    nestSiste = siste;
    siste = neste;
  }

  return siste;
}
```

- Regner ut f_n ved å regne ut verdiene fra f_1 til f_{n-1} i sekvens.