Oppgave 3b

Ser at antall reelle muligheter må være $\leq$ antall partisjoner av tallet $\sum_{u_i \in U} s(u_i) = W \leq B \cdot n$ (har at $W \leq B \cdot n$ da elementene uten tap av generalitet ikke kan være større enn B) da det jo er en partisjon av W i K elementer eller binner vi er ute etter. En partisjon av W kan jo selvfølelig være falsk fordi den ikke har elementer i U som kan adderes opp til de summene vi har i partisjonene av W, men det støtter bare opp om argumentet at våre aktuelle muligheter må være $\leq$ antall partisjoner av W.

Vi har fra [”Discrete and Combinatorial Mathematics”, Grimaldi 1999, side 400] at antall partisjoner av et tall ’n’ i tall som ikke overstiger ’r’ er koeffesienten til x^n i produktet: $\prod_{i=1}^{r} \frac{1}{1-x^i}$. Dette er resultat av at vi har telt opp antall 1’ere, antall 2’ere osv. ved hjelp av den generende funksjonen $f(x) = (1 + x + x^2 + ...)(1 + x^2 + x^4 + ...)(1 + x^3 + ...) \cdots$ Hvis vi ønsker kan vi skrive dette om til:
$g(x) = (1 + x + x^2 + ...x^r)(1 + x^2 + x^4 + ...x^r)(1 + x^3 + ...x^r) \cdots (1 + x^r)$ (egentlig det største heltallet $\leq$ r som {1, 2, 3 ... r} går opp i og ikke r selv) siden vi er kun er ute etter tall $\leq$ r.

I vårt tilfelle får vi da altså at antall partisjoner av W i tall som er ikke overstiger B er koeffesienten til x^W i $\prod_{i=1}^{B} \frac{1}{1-x^i}$. Skrevet om på formen g(x) som vist ovenfor får vi:
$g(x) = (1 + x + x^2 + ...x^B)(1 + x^2 + x^4 + ...x^B)(1 + x^3 + ...x^B) \cdots (1 + x^B)$. Siden vi får maksimalt B paranteser og maksimalt B elementer i hver parentes får vi $O(B^B)$ multiplikasjoner å utføre (vi trenger egentlig ikke utføre alle – kan bruke avskjering og kun gjøre de som gir koeffesienten til x^W - altså de hvor summen av eksponenetene er w). Siden totalt antall multiplikasjoner er $O(B^B)$ må jo også koeffesienten som er summen av de multiplikasjonene som gir x^W også være $O(B^B)$ og siden dette er et konstant tall når B er konstant har vi et konstant antall mulige partisjoner å sjekke!