Αλγόριθμοι σε Κατηγορίες Τέλειων Γραφημάτων

Η ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

υποβάλλεται στην

ορισθείσα από την Γενική Συνέλευση Ειδικής Σύνθεσης

του Τμήματος Πληροφορικής Εξεταστική Επιτροπή

από τον

Χάρη Παπαδόπουλο

ως μέρος των Υποχρεώσεων για τη λήψη του

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΟΥ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΣΤΗΝ

ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

Ιούλιος 2005

Ευχαριστιες

Θα ήθελα να απευθύνω τις ιδιαίτερες ευχαριστιές μου στον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Σταύρο Δ. Νικολόπουλο για την πολύτιμη βοήθειά του στην περάτωση της παρούσης εργασίας. Η συμβολή του ήταν ουσιαστική και βασίστηκε στην γνώση του για το αντικείμενο και στην προθυμία για βοήθεια και υπομονή που τον χαρακτήριζαν καθ' όλη την διάρκεια της μελέτης αυτής. Επιπλέον, τον ευχαριστώ θερμά για την ενθουσιώδη και συνεχή προτροπή του για περαιτέρω (μεταδιδακτορική) έρευνα στο πεδίο της αλγοριθμικής θεωρίας γραφημάτων, καθώς και για την ουσιαστική βοήθειά του στην επίτευξη του στόχου αυτού.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή του Τμήματος Πληροφορικής κ. Λεωνίδα Παλιό (μέλος της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής) για την βοήθεια, τις συμβουλές και τον χρόνο που μου αφιέρωσε. Οι συμβουλές του ήταν καθοριστικές σε όλα τα ερευνητικά θέματα που μελετήσαμε. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή κ. Σταύρο Κοσμαδάκη (μέλος της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής) για την επιστημονική συμβολή του στην εκπόνηση της διατριβής μου. Τέλος, ευχαριστώ τους κκ. Στάθη Ζάχο, Παύλο Σπυράκη, Γιάννη Σταματίου, και Χρήστο Νομικό (μέλη της επταμελούς εξεταστικής επιτροπής) για τις εύστοχες και εποικοδομητικές παρατηρήσεις τους σε αρκετά από τα θέματα μελέτης μου.

Θα ήταν παράλειψη να μην ευχαριστήσω τον καθηγητή κ. Ισαάκ Λαγαρή (Πρόεδρος του Τμήματος Πληροφορικής) για την αμέριστη και έμπρακτη υποστήριξη που μου παρείχε όλα τα χρόνια των σπουδών μου στο Τμήμα, τόσο με την ιδιότητα του μέλους του Τμήματος όσο και με την ιδιότητα του Προέδρου.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου για την υλική και ηθική υποστήριξή τους καθ' όλη την διάρκεια των προπτυχιακών και μεταπτυχιακών μου σπουδών.

Χάρης Παπαδόπουλος

Ιωάννινα, 4 Ιουλίου 2005

Περιληψη

Αυτή η εργασία επικεντρώνεται στην σχεδίαση και ανάλυση ακολουθιακών, παράλληλων και δυναμικών (ή άμεσων) αλγορίθμων για προβλήματα (i) αναγνώρισης, (ii) βελτιστοποίησης (Hammiltonicity, και επικάλυψης με μονοπάτια (path cover)) και (iii) απαρίθμησης (σκελετικών δέντρων) σε κλάσεις τέλειων γραφημάτων. Συγκεκριμένα, απασχολείται με την σχεδίαση και ανάλυση αλγορίθμων της θεωρίας γραφημάτων στις ακόλουθες περιοχές, όπου, στις περισσότερες από αυτές, έχουμε ήδη δημοσιευμένα αποτελέσματα.

Δενδρική αναπαράσταση
Η δενδρική αναπαράσταση για ειδικά γραφήματα, μεταξύ άλλων δομών, είναι συχνά η βάση για γρήγορες λύσεις σε αλγοριθμικά προβλήματα που είναι γενικά δύσκολα. Πολλές κλάσεις γραφημάτων έχουν μια μοναδική δενδρική αναπαράσταση, που βασίζεται σε μια γενική αντιμετώπιση, γνωστή ως m-αποσύνθεση (modular decomposition) γραφημάτων. Χρησιμοποιώντας δενδρική αναπαράσταση, πολλά προβλήματα αναγνώρισης, βελτιστοποίησης και απαρίθμησης μπορούν να επιλυθούν αποτελεσματικά για ποικίλες κατηγορίες γραφημάτων, όπως

- quasi-threshold γραφήματα,
- tree-cographs,
- P_4-tidy γραφήματα,
- permutation γραφήματα,
- split-perfect γραφήματα,
- $(P_5, \text{diamond})$-free γραφήματα,
- cographs,
- P_4-sparse γραφήματα,
- $(q, q-4)$ γραφήματα,
- chordal γραφήματα,
- (P_5, gem)-free γραφήματα,
- και semi-P_4-sparse γραφήματα.

Έχουμε αποδείξει αποτελέσματα αναγνώρισης, βελτιστοποίησης και απαρίθμησης για μερικές από τις παραπάνω κλάσεις γραφημάτων.

Απαρίθμηση σκελετικών δέντρων των QT-γραφημάτων
Θεωρούμε το πρόβλημα υπολογισμού του πλήθους σκελετικών δέντρων στην κλάση των γραφημάτων, ή QT-γραφήματα για συντομία. Δείχνουμε ότι ένα τέτοιο γράφημα επιτρέπει σημαντικές δομικές και αλγοριθμικές ιδιότητες μαζί με ένα μοναδικό, ως προς τον ισομορφισμό, δέντρο αναπαράστασης που ονομάζεται cent-δέντρο. Βασιζόμενοι στις ιδιότητες του cent-δέντρου ενός QT-γραφήματος G αναδεικνύουμε έναν τύπο που δίνει το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος G· η απόδειξη βασίζεται στο Kirchhoff πίνακα δέντρων θεώρημα. Τα αποτελέσματά μας γενικεύουν και επεκτείνουν προηγούμενα αποτελέσματα σχετικά με το πλήθος των σκελετικών δέντρων σε QT-γραφήματα [91].

Αυτή η εργασία οδήγησε στην δημοσίευση:

- S.D. Nikolopoulos and C. Papadopoulos, A formula for the number of spanning trees in quasi-threshold graphs, *Proc. 1st Balkan Conference on Informatics (BCI'03)*, 192–202, Thessaloniki, Greece, 2003.

Γραμμικός αλγόριθμος υπολογισμού του πλήθους των σκελετικών δέντρων των συμπληρωματικά-παραγόμενων γραφημάτων

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε έναν γραμμικό αλγόριθμο που καθορίζει το πλήθος των σκελετικών δέντρων της κλάσης των συμπληρωματικά-παραγόμενων γραφημάτων, επίσης γνωστή ως cographs· για ένα cograph G με n κορυφές και m ακμές, ο αλγόριθμός μας υπολογίζει το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος G σε $O(n+m)$ χρόνο και χώρο, όπου η πολυπλοκότητα των αριθμητικών πράξεων μετριέται με βάση το ομοιόμορφο κριτήριο κόστους (uniform cost criterion). Ο αλγόριθμος εκμεταλλεύεται το cotree του δοθέντος γραφήματος το οποίο βαθμιαία συρρικνώνεται με έναν συστηματικό τρόπο έως ότου γίνει μια μοναδική κορυφή, ενώ ταυτόχρονα ενημερώνονται ορισμένοι παράμετροι που το γινόμενό τους δίνει το επιθυμητό πλήθος σκελετικών δέντρων. Η ορθότητα του αλγορίθμου επικυρώνεται μέσα από το Kirchhoff πίνακα δέντρων θεώρημα και επίσης βασίζεται σε δομικές και αλγοριθμικές ιδιότητες των cographs. Τα αποτελέσματά μας γενικεύουν προηγούμενα αποτελέσματα και επεκτείνουν την οικογένεια των γραφημάτων που δέχονται γραμμικούς αλγόριθμους για το πλήθος των σκελετικών τους δέντρων.

Αυτή η εργασία οδήγησε στην δημοσίευση:

- S.D. Nikolopoulos and C. Papadopoulos, Counting spanning trees in cographs, *Electronic Notes in Discrete Mathematics (ENDM)* **13**, 87–95, 2003. Also in: *Proc. of the Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization (CTW'03)*, Enschede, The Netherlands, 2003.

Απαρίθμηση σκελετικών δέντρων γραφημάτων χρησιμοποιώντας m-αποσύνθεση

Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζουμε έναν αλγόριθμο που καθορίζει το πλήθος των σκελετικών δέντρων ενός γραφήματος G που εκμεταλλεύεται την δομή του md-δέντρου (modular decomposition tree) του γραφήματος G. Συγκεκριμένα ο αλγόριθμός μας δουλεύει συρρικνώνοντας το md-δέντρο του εισαγόμενου γραφήματος G από κάτω προς τα πάνω έως ότου μετατραπεί σε έναν μοναδικό κόμβο· τότε το πλήθος των σκελετικών δέντρων του G έχει υπολογιστεί ως το γινόμενο από μια συλλογή τιμών που συσχετίζονται με τις κορυφές του γραφήματος G και ενημερώνονται κατά την διάρκεια της φάσης συρρίκνωσης. Συγκεκριμένα, όταν εφαρμόζεται σε ένα $(q, q-4)$ γράφημα για συγκεκριμένο q, σε ένα P_4-tidy γράφημα, ή σε ένα tree-cograph, ο αλγόριθμός μας υπολογίζει το πλήθος των σκελετικών δέντρων σε χρόνο γραμμικό ως προς το μέγεθος του γραφήματος, όπου η πολυπλοκότητα των αριθμητικών πράξεων μετριέται με βάση το ομοιόμορφο κριτήριο κόστους (uniform cost criterion). Αυτό επάγει ότι το πρόβλημα έχει γραμμικό σε χρόνο λύση για πολλές γνωστές κλάσεις γραφημάτων, όπως είναι τα cographs, P_4-sparse γραφήματα, P_4-reducible γραφήματα, P_4-lite γραφήματα, και P_4-extendible γραφήματα. Η ορθότητα του αλγορίθμου αποδεικνύεται μέσα από το Kirchhoff πίνακα δέντρων θεώρημα και επίσης βασίζεται σε δομικές και αλγοριθμικές ιδιότητες των γραφημάτων υπό μελέτη. Τα αποτελέσματά μας γενικεύουν προηγούμενα αποτελέσματα και επεκτείνουν την οικογένεια των γραφημάτων που δέχονται γραμμικούς αλγόριθμους για το πλήθος των σκελετικών τους δέντρων.

Αυτή η εργασία οδήγησε στις δημοσιεύσεις:

- S.D. Nikolopoulos and C. Papadopoulos, The number of spanning trees in P4-reducible graphs, *Proc. 3rd Int'l Colloquium on Mathematics and Computer Science: Algorithms, Trees, Combinatorics and Probabilities (MathInfo III)*, Vienna, 2004. In: Trends in Mathematics, Birkhauser, 141–143, 2004.

- S.D. Nikolopoulos, L. Palios and C. Papadopoulos, Counting spanning trees in graphs using modular decomposition, TR-2004-09, Dept. of Computer Science, University of Ioannina, 2004 (submitted for journal publication).

Μεγιστοποίηση του πλήθους των σκελετικών δέντρων σε αστεροειδή γραφήματα
Η εξαγωγή μαθηματικών τύπων για διαφορετικούς τύπους γραφημάτων μπορεί να αποδειχθεί χρήσιμη για τον προσδιορισμό εκείνων των γραφημάτων που περιέχουν το μέγιστο πλήθος σκελετικών δέντρων. Φαίνεται προφανές ότι η σχεδόν τακτικότητα (almost regularity) ενός γραφήματος είναι το απαιτούμενο προσόν. Επομένως, τόσο για θεωρητικούς όσο και για πρακτικούς λόγους, αφού το πλήθος σκελετικών δέντρων είναι στενά συνδεδεμένο με την αξιοπιστία δικτύων υπολογιστών, είναι ενδιαφέρον να εξάγει κανείς μαθηματικό τύπο για το πλήθος των σκελετικών δέντρων ενός γραφήματος.

Ακολουθώντας την προηγούμενη καθοδήγηση, εξετάζουμε την κλάση των γραφημάτων που το συμπλήρωμά τους είναι αστεροειδή γραφήματα και εξάγουμε κλειστούς τύπους για το πλήθος σκελετικών δέντρων για τα μέλη αυτής της ομάδας γραφημάτων. Τα προτεινόμενα αποτελέσματα καλύπτουν προηγούμενα αποτελέσματα για μερικές κλάσεις γραφημάτων και επεκτείνουν τα αποτελέσματα για τις κλάσεις των multi-star και multi-complete/star γραφημάτων στην μεγαλύτερη κλάση των αστεροειδή γραφημάτων. Αποδεικνύουμε θεωρήματα μεγιστοποίησης που μας επιτρέπουν να χαρακτηρίσουμε τα γραφήματα της κλάσης αυτής με το μέγιστο πλήθος σκελετικών δέντρων.

Αυτή η εργασία οδήγησε στην δημοσίευση:

- S.D. Nikolopoulos, L. Palios and C. Papadopoulos, Maximizing the number of spanning trees in K_n-complements of asteroidal graphs, (submitted for publication) 2005.

Πλήθος σκελετικών δέντρων σε κατηγορίες γραφημάτων της μορφής $K_n^m \pm G$
Επεκτείνοντας την έννοια του $K_n - G$ (K_n-συμπλήρωμα) και θεωρώντας πολυγραφήματα (multigraphs), εξάγουμε τύπους, που βασίζονται στην ορίζουσα, για το πλήθος των σκελετικών δέντρων των γραφημάτων της μορφής $K_n^m \pm G$, όπου K_n^m είναι το πλήρες πολυγράφημα των n κορυφών με ακριβώς m ακμές να ενώνουν κάθε ζεύγος κορυφών και το γράφημα G είναι ένα πολυγράφημα που επάγεται από ένα σύνολο ακμών του K_n^m. Αποδεικνύουμε επίσης κλειστούς τύπους για το πλήθος των σκελετικών δέντρων της μορφής $K_n^m \pm G$, όπου G είναι (i) ένα πλήρες πολυμερές (complete multipartite) γράφημα, και (ii) ένα multi-star γράφημα.

Αυτή η εργασία οδήγησε στην δημοσίευση:

- S.D. Nikolopoulos and C. Papadopoulos, On the number of spanning trees of $K_n^m \pm G$ graphs, TR-2005-10, Dept. of Computer Science, University of Ioannina, 2005 (submitted for journal publication).

Δυναμικοί αλγόριθμοι για την αναγνώριση κλάσεων γραφημάτων
Σε αυτή την ενότητα επιλύουμε το δυναμικό πρόβλημα αναγνώρισης για την κλάση των P_4-sparse γραφημάτων: ο σκοπός είναι να χειριστούμε πρόσθεση και διαγραφή ακμών/κορυφών, να ανακαλύψουμε πότε τέτοιες τροποποιήσεις επιφέρουν ένα P_4-sparse γράφημα και σε περίπτωση που αληθεύει, να ενημερώσει κατάλληλα την αναπαράσταση του γραφήματος. Η αντιμετώπισή μας βασίζεται στην διατήρηση του md-δέντρου του γραφήματος το οποίο χρησιμοποιούμε για την επίλυση του προβλήματος αναγνώρισης. Αποδεικνύουμε δομικές ιδιότητες του δέντρου και πετυχαίνουμε έναν πλήρως δυναμικό αλγόριθμο αναγνώρισης που υποστηρίζει τροποποιήσεις ακμών (εισαγωγές και διαγραφές) σε $O(1)$ χρόνο και τροποποιήσεις κορυφών (εισαγωγές και διαγραφές) σε $O(d)$ χρόνο για κορυφή βαθμού d.

Αυτή η εργασία οδήγησε στην δημοσίευση:

- S.D. Nikolopoulos, L. Palios and C. Papadopoulos, A fully dynamic algorithm for the recognition of P_4-sparse graphs, (submitted for publication) 2005.

Παράλληλοι αλγόριθμοι για το πρόβλημα της επικάλυψης με μονοπάτια

Επικεντρώνουμε το ενδιαφέρον μας στην ανάπτυξη ενός βέλτιστου παράλληλου αλγορίθμου που βρίσκει και αναφέρει τον μικρότερο αριθμό των ανεξάρτητων-κορυφών μονοπατιών που καλύπτουν τις κορυφές (γνωστό ως το πρόβλημα επικάλυψης με μονοπάτια–path cover problem) ενός P_4-sparse γραφήματος. Επωφελούμαστε της δομής του md-δέντρου (και στην πραγματικότητα των πρώτων γραφημάτων του) και εκμεταλλευόμαστε τα μονοπάτια δέντρων (path trees–μια δομή που διατηρεί τα μονοπάτια της επικάλυψης μονοπατιών). Πιο συγκεκριμένα, δοθέντος του md-δέντρου ενός P_4-sparse γραφήματος G σε n κορυφές, χρησιμοποιούμε κλασικές δενδρικές τεχνικές συρρίκνωσης και ταίριασμα παρενθέσεων (bracket matching) και περιγράφουμε ένα βέλτιστο παράλληλο αλγόριθμο που τρέχει σε $O(\log n)$ χρόνο με $O(n/\log n)$ επεξεργαστές στο EREW-PRAM μοντέλο. Είναι ενδιαφέρον κανείς να επεκτείνει αυτήν την τεχνική σε άλλες κλάσεις γραφημάτων, και ακόμα περισσότερο, να θεωρήσει μερικές παραλλαγές του προβλήματος, όπως είναι το πρόβλημα επικάλυψης με τελικά μονοπάτια (terminal path cover), δηλαδή η αναφορά της επικάλυψης με μονοπάτια ενός γραφήματος δοθέντος ένα υποσύνολο κορυφών που αντιστοιχούν στα άκρα κορυφών των μονοπατιών της επικάλυψης.

Αυτή η εργασία οδήγησε στην δημοσίευση:

- K. Asdre, S.D. Nikolopoulos and C. Papadopoulos, An optimal solution for the path cover problem on P_4-sparse graphs, *Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization (CTW'05)*, Cologne, Germany, 2005.

Extended Abstract in English

This work focuses on the design and analysis of sequential, parallel, and dynamic (or on-line) algorithms for (i) recognition, (ii) optimization (Hammiltonicity, and path cover), and (iii) counting (spanning trees) problems on classes of perfect graphs. In particular, it deals with designing and analyzing graph algorithms, in the following areas, where in most of them we have already published results.

Tree representation
Tree representation for special graphs, among other structures, are often the basis for fast solutions of algorithmic problems which are hard in general. Many classes of graphs have a unique tree representation, based on a general approach known as the modular decomposition of graphs. Using tree representations, many recognition, optimization, and counting problems, can be solved efficiently, for various classes of perfect graphs, such as

- quasi-threshold graphs,
- cographs,
- tree-cographs,
- P_4-sparse graphs,
- P_4-tidy graphs,
- $(q, q-4)$ graphs,
- permutation graphs,
- chordal graphs,
- split-perfect graphs,
- (P_5, gem)-free graphs,
- $(P_5, \text{diamond})$-free graphs,
- and semi-P_4-sparse graphs.

We have proved recognition, optimization, and counting results for some of the above mentioned classes.

Establishing formulas for the number of spanning trees of QT-graphs
We consider the problem of computing the number of spanning trees in the class of quasi-threshold graphs, or QT-graphs for short. We show that such a graph admits important structural and algorithmic properties among which a unique tree representation, up to isomorphism, called cent-tree. Based on the properties of the cent-tree of a QT-graph G we derive a formula which gives the number of spanning trees of the graph G; the proof is based on the Kirchhoff matrix tree theorem. Our result generalizes and extends previous results (on my master thesis) regarding the number of spanning trees of QT-graphs [91].

This work lead to publication:

- S.D. Nikolopoulos and C. Papadopoulos, A formula for the number of spanning trees in quasi-threshold graphs, *Proc. 1st Balkan Conference on Informatics (BCI'03)*, 192–202, Thessaloniki, Greece, 2003.

Linear time algorithm for the number of spanning trees of cographs
In this section we present a linear-time algorithm for determining the number of spanning trees in the class of complement reducible graphs, also known as cographs; for a cograph G on n vertices

and m edges, our algorithm computes the number of spanning trees of G in $O(n+m)$ time and space, where the complexity of arithmetic operations is measured under the uniform cost criterion. The algorithm takes advantage of the cotree of the input graph which it gradually shrinks in a systematic fashion until it becomes a single vertex while at the same time appropriately updating certain parameters whose product gives the desired number of spanning trees. The correctness of the algorithm is established through the Kirchhoff matrix tree theorem, and is also based on structural and algorithmic properties of the cographs. Our results generalize previous results and extend the family of graphs admitting linear-time algorithms for the number of their spanning trees.

This work lead to publication:

- S.D. Nikolopoulos and C. Papadopoulos, Counting spanning trees in cographs, *Electronic Notes in Discrete Mathematics (ENDM)* **13**, 87–95, 2003. Also in: *Proc. of the Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization (CTW'03)*, Enschede, The Netherlands, 2003.

Counting spanning trees in graphs using modular decomposition

In this section we present an algorithm for determining the number of spanning trees of a graph G which takes advantage of the structure of the modular decomposition tree of G. Specifically, our algorithm works by contracting the modular decomposition tree of the input graph G in a bottom-up fashion until it becomes a single node; then, the number of spanning trees of G is computed as the product of a collection of values which are associated with the vertices of G and are updated during the contraction process. In particular, when applied on a $(q, q-4)$-graph for fixed q, a P_4-tidy graph, or a tree-cograph, our algorithm computes the number of its spanning trees in time linear in the size of the graph, where the complexity of arithmetic operations is measured under the uniform-cost criterion. This implies that the problem has linear-time solution for many well-known classes of graphs, such as, cographs, P_4-sparse graphs, P_4-reducible graphs, P_4-lite graphs, and P_4-extendible graphs. The correctness of the algorithm is established through the Kirchhoff matrix tree theorem, and also relies on structural and algorithmic properties of the graphs in consideration. Our results generalize previous results and extend the family of graphs admitting linear-time algorithms for the number of their spanning trees.

This work lead to publications:

- S.D. Nikolopoulos and C. Papadopoulos, The number of spanning trees in P4-reducible graphs, *Proc. 3rd Int'l Colloquium on Mathematics and Computer Science: Algorithms, Trees, Combinatorics and Probabilities (MathInfo III)*, Vienna, 2004. In: Trends in Mathematics, Birkhauser, 141–143, 2004.

- S.D. Nikolopoulos, L. Palios and C. Papadopoulos, Counting spanning trees in graphs using modular decomposition, TR-2004-09, Dept. of Computer Science, University of Ioannina, 2004 (submitted for journal publication).

Maximizing the number of spanning trees of Asteroidal Graphs

Deriving formulas for different types of graphs can prove to be helpful in identifying those graphs that contain the maximum number of spanning trees. It seems apparent that almost the regularity of a graph is a requirement. Thus, both for theoretical and for practical purposes, since the number of spanning trees are close related to the network reliability, it is interesting to derive a formula for the number of spanning trees of a graph.

Following these lines we examine the class of graphs whose complements are asteroidal (star-like) graphs and derive closed formulas for the number of spanning trees of its members. The proposed results cover previous results for some classes of graphs and extend the results for the classes of the multi-star and multi-complete/star graphs to the larger class of the asteroidal graphs. We prove maximization theorems that enable us to characterize the graphs in this class with a maximum number of spanning trees.

This work lead to publication:

- S.D. Nikolopoulos, L. Palios and C. Papadopoulos, Maximizing the number of spanning trees in K_n-complements of asteroidal graphs, (submitted for publication) 2005.

On the number of spanning trees of $K_n^m \pm G$ graphs

By extending the notion of $K_n - G$ and considering multigraphs we derive determinant based formulas for the number of spanning trees of graphs of the form $K_n^m \pm G$, where K_n^m is the complete multigraph on n vertices with exactly m edges joining every pair of vertices and G is a multigraph spanned by a set of edges of K_n^m. We also prove closed formulas for the number of spanning tree of graphs of the form $K_n^m \pm G$, where G is (i) a complete multipartite graph, and (ii) a multi-star graph.

This work lead to publication:

- S.D. Nikolopoulos and C. Papadopoulos, On the number of spanning trees of $K_n^m \pm G$ graphs, TR-2005-10, Dept. of Computer Science, University of Ioannina, 2005 (submitted for journal publication).

Dynamic algorithms for recognizing classes of graphs

In this section we solve the dynamic recognition problem for the class of P_4-sparse graphs: the objective is to handle edge/vertex additions and deletions, to detect whether such a modification yields a P_4-sparse graph, and if yes, to update the representation of the graph. Our approach relies on maintaining the modular decomposition tree of the graph, which we use for solving the recognition problem. We prove structural properties of this tree and obtained a fully dynamic recognition algorithm which handles edge modifications (additions and deletions) in $O(1)$ time and vertex modifications (additions and deletions) in $O(d)$ time for a vertex of degree d.

With respect to optimality, it is interesting to achieve a constant time algorithm for the update of the modular decomposition tree in a vertex deletion of a P_4-sparse graph. Furthermore, dynamic algorithms has been proposed which handle edge modifications and vertex modifications in $O(n)$ time per edge operation and in $O(nm)$ time per vertex modification for chordal graphs. Based on these results, one can work towards the investigation whether there exist a more efficient dynamic algorithm for the class of chordal graphs or interval graphs (an edges-only dynamic algorithm is known for interval graphs which handles each edge modification in $O(n \log n)$ time), and moreover, for other classes of perfect graphs.

This work lead to publication:

- S.D. Nikolopoulos, L. Palios and C. Papadopoulos, A fully dynamic algorithm for the recognition of P_4-sparse graphs, (submitted for publication) 2005.

Parallel algorithms for the path cover problem

Here we focus on developing an optimal parallel algorithm to find and report the smallest number of vertex-disjoint paths that cover the vertices (known as the path cover problem) for the class of

P_4-sparse graphs. We take advantage of the structure of its modular decomposition tree (and in fact its prime graphs) and utilize its path trees (a structure that maintains the paths of the path cover). Specifically, given the modular decomposition tree of a P_4-sparse graph G on n vertices, we use standard tree contraction and bracket matching techniques, and we describe an optimal parallel algorithm which runs in $O(\log n)$ time with $O(n/\log n)$ processors on the EREW-PRAM model. It is interesting to extend this technique to other classes of graphs and, furthermore, to consider some variants of the problem, such as the terminal path cover, i.e., the problem of finding the path cover of a graph given a subset of vertices which correspond to the terminal vertices of the paths of the path cover.

This work lead to publication:

- K. Asdre, S.D. Nikolopoulos and C. Papadopoulos, An optimal solution for the path cover problem on P_4-sparse graphs, *Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization (CTW'05)*, Cologne, Germany, 2005.

Περιεχομενα

Ευρετηριο Σχηματων

Ευρετηριο Πινακων

Ευρετηριο Αλγοριθμων

Κεφαλαιο 1

Εισαγωγη

1.1 Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

Θεωρούμε πεπερασμένα μη-κατευθυνόμενα γραφήματα χωρίς πολλαπλές ακμές. Έστω ένα γράφημα G με σύνολο κορυφών $V(G)$ και σύνολο ακμών $E(G)$. Το υπογράφημα ενός γραφήματος G που επάγεται από ένα υποσύνολο S του συνόλου κορυφών $V(G)$ αναφέρεται ως $G[S]$. Για ένα υποσύνολο κορυφών S του γραφήματος G, ορίζουμε το γράφημα $G-S := G[V(G)-S]$ και γράφουμε με $G-v$ το γράφημα $G[V(G)-\{v\}]$. Μια *κλίκα* (clique) είναι ένα σύνολο από όλα τα ζεύγη γειτονικών κορυφών· ένα *ανεξάρτητο σύνολο* (stable set) είναι ένα σύνολο από όλα τα ζεύγη μη-γειτονικών κορυφών.

Η *γειτονιά* (neighborhood) $N(x)$ μιας κορυφής $x \in V(G)$ είναι το σύνολο όλων των κορυφών του γραφήματος G που είναι γειτονικές με την κορυφή x. Η *κλειστή γειτονιά* (closed neighborhood) της κορυφής x ορίζεται ως $N[x] := \{x\} \cup N(x)$. Ο *βαθμός* (degree) μιας κορυφής x στο γράφημα G, που συμβολίζεται με $d(x)$, είναι το πλήθος των προσκείμενων ακμών στην κορυφή x· δηλαδή $d(x) = |N(x)|$. Εάν δύο κορυφές x και y είναι γειτονικές σε ένα γράφημα G, θα λέμε ότι η κορυφή x *βλέπει* (sees) την κορυφή y· ειδάλλως θα λέμε ότι η κορυφή x *χάνει* (misses) την κορυφή y. Επεκτείνουμε αυτήν την έννοια σε σύνολα κορυφών: το σύνολο κορυφών $V_i \subseteq V(G)$ βλέπει (χάνει) το σύνολο κορυφών $V_j \subseteq V(G)$ εάν και μόνο εάν κάθε κορυφή $x \in V_i$ βλέπει (χάνει) κάθε κορυφή $y \in V_j$.

Ένα *μονοπάτι* (path) σε ένα γράφημα G είναι μια ακολουθία από κορυφές $v_0 v_1 \cdots v_k$ τέτοιες ώστε $v_{i-1}v_i \in E(G)$ για $i = 1, 2, \ldots, k$. Ένα μονοπάτι ονομάζεται *απλό* (simple) εάν καμία από τις κορυφές του δεν βρίσκεται σε αυτό παραπάνω από μια φορά. Ένα μονοπάτι (απλό μονοπάτι)

[1] modular decomposition

$v_0v_1 \cdots v_k$ είναι ένας *κύκλος* (cycle) εάν $v_0v_k \in E(G)$. Ένα απλό μονοπάτι (κύκλος) είναι *άχορδο* (chordless) εάν $v_iv_j \notin E(G)$ για κάθε δύο μη-συνεχόμενες κορυφές v_i, v_j του μονοπατιού (κύκλου). Σε όλη την εργασία, το άχορδο μονοπάτι (κύκλος) με k κορυφές συμβολίζεται με P_k (αντίστοιχα C_k). Συγκεκριμένα, ένα άχορδο μονοπάτι τεσσάρων κορυφών συμβολίζεται με P_4· σε ένα μονοπάτι P_4 $abcd$, οι κορυφές b, c είναι οι *μέσες-κορυφές* (midpoints) και οι κορυφές a, d είναι τα *άκρα* (endpoints) του P_4.

Έστω ένα γράφημα G με n κορυφές. Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες και χαρακτηρίζουν το γράφημα G ως *δέντρο*:

- Το γράφημα G είναι συνεκτικό και άκυκλο.
- Το γράφημα G είναι συνεκτικό και έχει $n-1$ ακμές.
- Το γράφημα G είναι άκυκλο και έχει $n-1$ ακμές.
- Για κάθε ζεύγος κορυφών $u, v \in V(G)$ υπάρχει ένα μοναδικό μονοπάτι στο γράφημα G μεταξύ των κορυφών u και v.

Έστω ένα δέντρο T. Ο πατέρας ενός κόμβου x του δέντρου T συμβολίζεται με $p(x)$, ενώ το σύνολο κόμβων που περιέχει τα παιδιά του κόμβου x στο δέντρο T συμβολίζεται με $ch(x)$. Επίσης Συμβολίζουμε με L_i το σύνολο κόμβων που περιέχονται στο i επίπεδο του δέντρου T, για κάθε τιμή της μεταβλητής i από 0 μέχρι το ύψος του δέντρου T.

1.1.1 Απαρίθμηση Σκελετικών Δέντρων

Ένα *σκελετικό δέντρο* (spanning tree) ενός συνεκτικού μη-κατευθυνόμενου γραφήματος G είναι ένα $(n-1)$-ακμών συνεκτικό υπογράφημά του. Το πλήθος των σκελετικών δέντρων ενός γραφήματος G, που καλείται επίσης *πολυπλοκότητα* (complexity) του γραφήματος G [10], και συμβολίζεται με $\tau(G)$, είναι ένα σημαντικό, ευρέως γνωστό, πρόβλημα στην θεωρία γραφημάτων.

Πριν προχωρήσουμε στο Θεώρημα των Πινάκων-Δέντρων θα διατυπώσουμε έναν αναδρομικό αλγόριθμο για τον υπολογισμό του πλήθους των σκελετικών δέντρων ενός γραφήματος. Ο τρόπος αυτός συνίσταται στην ξεχωριστή μέτρηση των σκελετικών δέντρων που περιέχουν μια συγκεκριμένη ακμή και των σκελετικών δέντρων που δεν περιέχουν μια συγκεκριμένη ακμή του γραφήματος. Χρειαζόμαστε πρώτα τον παρακάτω ορισμό.

Έστω ένα γράφημα G και με ακμή $e = uv \in E(G)$. Τότε η *συστολή* $G \cdot e$ είναι το γράφημα που προκύπτει από το G αν αντικαταστήσουμε τις κορυφές u και v από μια νέα κορυφή με προσπίπτουσες ακμές όλες τις ακμές πλην της e που προσπίπτουν στην κορυφή u ή στην κορυφή v.

Θεώρημα 1.1 ([10]). *Έστω ένα γράφημα G και μια αυθαίρετη ακμή $e \in E(G)$. Τότε:*

$$\tau(G) = \tau(G \setminus e) + \tau(G \cdot e).$$

Το παραπάνω θεώρημα μπορεί να αποτελέσει την βάση ενός αναδρομικού αλγορίθμου για τον υπολογισμό του πλήθους των σκελετικών δέντρων ενός γραφήματος. Επειδή σε κάθε βήμα ο αλγόριθμος θα ξετυλίγει δύο αναδρομικές κλήσεις του εαυτού του μέχρι το σημείο όπου δεν θα υπάρχουν πλέον ακμές στο γράφημα, ο αριθμός των αναδρομικών κλήσεων είναι 2^m, όπου m το πλήθος των ακμών του γραφήματος G. Αντίθετα, όπως θα δούμε παρακάτω, το Θεώρημα του Πίνακα-Δέντρων υπαγορεύει έναν αντίστοιχο αλγόριθμο που βασίζεται στον υπολογισμό της ορίζουσας ενός πίνακα. Είναι γνωστό πως η ορίζουσα ενός $n \times n$ πίνακα μπορεί να υπολογιστεί σε λιγότερο από n^3 βήματα (για μεγάλο n) (δείτε επίσης [27, 28]). Έτσι, όπως θα δούμε στην συνέχεια, ο αλγόριθμος που βασίζεται στον υπολογισμός της ορίζουσας ενός πίνακα είναι σημαντικά ταχύτερος από τον αναδρομικό αλγόριθμο που βασίζεται στο Θεώρημα 1.1.

Για έναν $n \times n$ πίνακα M, ο *ij-ελάσσων* (minor) μ_j^i είναι η ορίζουσα του $(n-1) \times (n-1)$ πίνακα που αποκτάται από τον πίνακα M διαγράφοντας την γραμμή i και την στήλη j. Ο *i-συντελεστής* (cofactor) ισούται με μ_i^i. Για ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G με n κορυφές, έστω A ο πίνακας γειτνίασης και D ο πίνακας βαθμών, δηλαδή, ο διαγώνιος πίνακας με τους βαθμούς των κορυφών του γραφήματος G να βρίσκονται στην κύρια διαγώνιο. Ο *πίνακας του Kirchhoff* K , ενός γραφήματος G είναι ο πίνακας $D - A$. Το Θεώρημα του Πίνακα-Δέντρου (επίσης γνωστό ως Θεώρημα του Kirchhoff) είναι ένα από τα πιο γνωστά αποτελέσματα στην θεωρία γραφημάτων. Παρέχει έναν τύπο για το πλήθος των σκελετικών δέντρων ενός γραφήματος G, σε σχέση με τους συντελεστές (cofactors) του Kirchhoff Πίνακα.

Θεώρημα 1.2 (Θεώρημα του Πίνακα-Δέντρου, Kirchhoff [10, 47]). *Για ένα οποιοδήποτε γράφημα G με τον πίνακα K ορισμένο όπως προηγουμένως, οι συντελεστές του πίνακα K έχουν την ίδια τιμή, και αυτή η τιμή είναι ίση με το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος G.*

Το Θεώρημα του Πίνακα-Δέντρου παρέχει ένα δυνατό εργαλείο για τον υπολογισμό του πλήθους $\tau(G)$ των σκελετικών δέντρων ενός γραφήματος G. Για αυτόν τον υπολογισμό, πρώτα σχηματίζουμε τον πίνακα του Kirchhoff K του γραφήματος G και αποκτάμε τον $(n-1) \times (n-1)$ πίνακα K_i από τον K διαγράφοντας την i-στή γραμμή και στήλη (τυχαία), και τότε υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα K_i. Η πράξη της διαγραφής μιας γραμμής και μιας στήλης από τον πίνακα K μπορεί να φαίνεται κατά κάποιο τρόπο "τυχαία". Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο βιβλίο [10] για περισσότερες λεπτομέρειες και για την απόδειξη του θεωρήματος.

Το πλήθος των σκελετικών δέντρων ενός γραφήματος G μπορεί να υπολογιστεί απ' ευθείας (χωρίς την διαγραφή οποιαδήποτε γραμμής ή στήλης) ως προς έναν πίνακα K' παρόμοιο με τον πίνακα του Kirchhoff K, που σχετίζεται με το γράφημα G [103], ή, εναλλακτικά, μπορεί να υπολογιστεί ορίζοντας ένα χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\det(K - xI)$ πάνω στον πίνακα K· η τελευταία περίπτωση λαμβάνει υπ' όψιν τον υπολογισμό των ιδιοτιμών του πίνακα K (δείτε [12, 20, 42, 99, 109]).

1.1.2 Δυναμικοί Αλγόριθμοι

Σε ένα δυναμικά μεταβαλλόμενο γράφημα πρέπει κανείς να διατηρήσει μια αναπαράσταση του γραφήματος μέσα από μια ακολουθία άμεσων μεταβολών (on-line modifications), δηλαδή εισαγωγές και διαγραφές κορυφών ή ακμών. Η αναπαράσταση πρέπει να επιτρέπει να απαντηθούν ερωτήσεις που απασχολούν συγκεκριμένες ιδιότητες του δυναμικού γραφήματος, για παράδειγμα, 'είναι συνεκτικό το γράφημα· '. Τέτοιου είδους αλγόριθμοι που ασχολούνται με αυτά τα προβλήματα ονομάζονται *δυναμικοί αλγόριθμοι* (dynamic algorithms) και κατηγοριοποιούνται ανάλογα με την διαδικασία μεταβολών που υποστηρίζουν. Ένας *αυξητικός* (αντίστ. *μειωτικός*) (incremental και αντίστ. decremental)) αλγόριθμος υποστηρίζει μόνο προσθήκη (αντίστ. αφαίρεση) κορυφών. Ένας μονο-προσθήκης (αντίστ. μόνο-αφαίρεσης) αλγόριθμος υποστηρίζει μόνο προσθήκη (αντίστ. αφαίρεση) ακμών. Ένας *μόνο-ακμές πλήρης δυναμικός αλγόριθμος* (edges-only fully dynamic algorithm) υποστηρίζει προσθήκες και διαγραφές ακμών. Ένας *πλήρης δυναμικός αλγόριθμος* (fully dynamic algorithm) υποστηρίζει τροποποιήσεις ακμών όπως επίσης και τροποποιήσεις κορυφών.

Αυτή η εργασία ασχολείται και διερευνά δυναμικά προβλήματα αναγνώρισης στα οποία οι ερωτήσεις είναι της μορφής: 'το γράφημα ανήκει σε μια συγκεκριμένη κλάση Π· ', όπου Π είναι μια κλάση γραφημάτων. Ένας αλγόριθμος για το πρόβλημα είναι αναγκασμένος να διατηρεί μια αναπαράσταση του δυναμικού γραφήματος ενόσω το γράφημα ανήκει στην κλάση Π, και να εντοπίζει πότε το γράφημα παύει να ανήκει στην κλάση Π.

Πιο συγκεκριμένα, ένας πλήρης δυναμικός για μια Π-αναγνώριση διατηρεί μια δομή δεδομένων για το συγκεκριμένο γράφημα $G \in \Pi$ και υποστηρίζει τις ακόλουθες λειτουργίες.

- *προσθήκη-ακμής*(edge-insertion): δοθέντος δύο κορυφών $u, v \in V(G)$ που δεν είναι γειτονικές στο γράφημα G, ενημέρωσε την κατάλληλη δομή δεδομένων εάν το γράφημα $G \cup \{uv\} \in \Pi$, ειδάλλως εκτύπωσε *false*·

- *διαγραφή-ακμής*(edge-deletion): δοθέντος μιας ακμής $uv \in E(G)$, ενημέρωσε την κατάλληλη δομή δεδομένων εάν το γράφημα $G - \{uv\} \in \Pi$, ειδάλλως εκτύπωσε *false*·

- *προσθήκη-κορυφής*(vertex-insertion): δοθέντος μιας νέας κορυφής $v \notin V(G)$ που γειτνιάζει με 0, μερικές, ή όλες τις κορυφές του γραφήματος G, ενημέρωσε την κατάλληλη δομή δεδομένων εάν το γράφημα $G \cup v \in \Pi$, ειδάλλως εκτύπωσε *false*·

- *διαγραφή-κορυφής*(vertex-deletion): δοθέντος μιας κορυφής $v \in V(G)$, ενημέρωσε την κατάλληλη δομή δεδομένων εάν το γράφημα $G - v \in \Pi$, ειδάλλως εκτύπωσε *false*.

Μετά την εκτέλεση από οποιαδήποτε τέτοια λειτουργία, ο αλγόριθμος είναι έτοιμος να εκτελέσει την επόμενη λειτουργία. Προφανώς (δείτε επίσης [101]), η προσθήκη (διαγραφή) μιας κορυφής δεν ανάγεται στο πρόβλημα της προσθήκης (διαγραφής) των προσκείμενων, σε αυτής, ακμών. Έτσι, οι τροποποιήσεις κορυφών πρέπει να χειρίζονται ξεχωριστά από τις τροποποιήσεις ακμών από τον δυναμικό αλγόριθμο.

Γενικότερα, το *δυναμικής-συνεκτικότητας* (dynamic-connectivity) πρόβλημα είναι ένα από τα πιο σημαντικά και ευρέως γνωστά δυναμικά προβλήματα γραφημάτων και αποτελεί το επίκεντρο μιας ενδιαφέρουσας περιοχής. Φορμαλιστικά, το πρόβλημα επιθυμεί να διατηρεί ένα γράφημα με προκαθορισμένο πλήθος κορυφών n με την προϋπόθεση να ικανοποιεί τις ακόλουθες λειτουργίες:

- insert(u, v): προσθήκη της ακμής (u, v) στο γράφημα.

- delete(u, v): διαγραφή της ακμής (u, v) από το γράφημα.

- connected(u, v): έλεγξε πότε οι κορυφές u και v βρίσκονται στην ίδια συνεκτική συνιστώσα.

1.1.3 Παράλληλοι Αλγόριθμοι

Σε αυτήν την εργασία υιοθετούμε το Parallel Random Access Machine μοντέλο (PRAM, για συντομία) το οποίο αποτελείται από σύγχρονους επεξεργαστές, που ο κάθε ένας έχει πρόσβαση σε κοινόχρηστη μνήμη. Σε κάθε βήμα, οι επεξεργαστές εκτελούν την ίδια εντολή με το πλήθος των επεξεργαστών να είναι προκαθορισμένο. Στο μοντέλο Concurrent Read Concurrent Write PRAM (CRCW) αρκετοί επεξεργαστές μπορούν ταυτόχρονα να προσπελάσουν την ίδια θέση μνήμης τόσο για διάβασμα όσο και για γράψιμο σε αυτήν. Στο μοντέλο Concurrent Read Exclusive Write PRAM (CREW), μια θέση μνήμης μπορεί να προσπελαστεί ταυτόχρονα από πολλούς επεξεργαστές για διάβασμα, αλλά όχι για γράψιμο στην ίδια θέση μνήμης. Στο μοντέλο Exclusive Read Exclusive Write PRAM (EREW), μια θέση μνήμης δεν μπορεί να προσπελαστεί ταυτόχρονα από παραπάνω από έναν επεξεργαστή είτε για διάβασμα από την θέση είτε για γράψιμο σε αυτήν την θέση. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να αναφερθεί στο βιβλίο [58] για περαιτέρω μελέτη των PRAM οικογενειών.

Θεωρούμε ένα παράλληλο αλγόριθμο που επιλύει ένα χαρακτηριστικό πρόβλημα μεγέθους n σε χρόνο $T_p(n)$, όπου p είναι το πλήθος των επεξεργαστών που χρησιμοποιεί. Συνήθως, η κύρια πολυπλοκότητα που μετράει την εκτίμηση της απόδοσης του παράλληλου αλγορίθμου είναι η *εργασία* (work) $W(n)$, που εκτελείται, και ορίζεται ως το γινόμενο $p \times T_p(n)$. Ο αλγόριθμος αναφέρεται ως *βέλτιστος-εργασίας* (work-optimal) εάν ισχύει $W(n) \in \Theta(T^*(n))$, όπου $T^*(n)$ είναι ο χρόνος επεξεργασίας του γρηγορότερου ακολουθιακού αλγορίθμου για το ίδιο πρόβλημα. Περιστασιακά, χρησιμοποιείται μια ακόμα ισχυρότερη πολυπλοκότητα και ονομάζεται *βελτιστότητα-χρόνου* (time-optimality). Συγκεκριμένα, ένας αλγόριθμος αναφέρεται ως βέλτιστος-χρόνου σε ένα μοντέλο εάν κανένας άλλος παράλληλος αλγόριθμος που επιλύει το ίδιο πρόβλημα και χρησιμοποιεί εναν πολυωνυμικού αριθμό επεξεργαστών δεν μπορεί να τρέξει γρηγορότερα στο ίδιο μοντέλο, ακόμα και αν είχε στη διάθεσή του έναν απεριόριστο αριθμό επεξεργαστών. Όπως θα δούμε στη συνέχεια στο Κεφάλαιο 8, ο παράλληλος αλγόριθμός μας για την επίλυση του προβλήματος της επικάλυψης με μονοπάτια σε ένα P_4-sparse γράφημα είναι ταυτόχρονα βέλτιστος-εργασίας και βέλτιστος-χρόνου.

1.2 Τέλεια Γραφήματα

Ο *χρωματικός αριθμός* (chromatic number) $\chi(G)$ ενός γραφήματος G ορίζεται ως το ελάχιστο πλήθος χρωμάτων που μπορούν να ανατεθούν στις κορυφές του γραφήματος G με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε ζεύγος γειτονικών κορυφών να πάρουν δύο διαφορετικά χρώματα· ο *αριθμός κλίκας* (clique number) $\omega(G)$ του γραφήματος G ορίζεται ως το μέγιστο πλήθος γειτονικών (pairwise) κορυφών στο γράφημα G. Προφανώς, ο χρωματικός αριθμός κάθε γραφήματος είναι τουλάχιστον ίσος με τον αριθμό κλίκας του. Ο *ευσταθής αριθμός* (stability number) $\alpha(G)$ του γραφήματος G είναι το πλήθος των κορυφών σε ένα ανεξάρτητο σύνολο μέγιστης πληθικότητας. Ο *αριθμός επικάλυψης κλίκας* (clique cover number) $\kappa(G)$ του γραφήματος G είναι το μέγεθος της μικρότερης δυνατής κλίκας που καλύπτει της κορυφές του G.

Οι παρακάτω τρεις συνθήκες ορίζουν τις *τέλειες ιδιότητες* (perfection properties) ενός γραφήματος G.

(P1) $\omega(G_A) = \chi(G_A), \quad \forall A \subseteq V(G)$

(P2) $\alpha(G_A) = \kappa(G_A), \quad \forall A \subseteq V(G)$

(P3) $\omega(G_A) \cdot \alpha(G_A) \geq |A|, \quad \forall A \subseteq V(G)$

Ένα γράφημα G ονομάζεται *τέλειο* (perfect) εάν, για κάθε ένα από τα επαγόμενα υπογραφήματά του $G[A]$, ο χρωματικός αριθμός του γραφήματος $G[A]$ ισούται με το μέγιστο πλήθος γειτονικών (pairwise) κορυφών στο γράφημα $G[A]$.

Θεώρημα 1.3 (The Perfect Graph Theorem [9]). *Για ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G, οι τέλειες ιδιότητες P1, P2 και P3 είναι ισοδύναμες.*

Η ακόλουθη συνέπεια έχει επίσης αποδειχθεί στο βιβλίο [9].

Πόρισμα 1.1. *Ένα γράφημα G είναι τέλειο εάν και μόνο εάν το συμπλήρωμά του $\overline{G}$ είναι τέλειο.*

Η *οπή* (hole) είναι ένας άχορδος κύκλος μεγέθους τουλάχιστον τέσσερα· η *αντιοπή* (antihole) είναι το συμπλήρωμα ενός τέτοιου κύκλου· οι οπές και οι αντιοπές είναι άρτιες ή περιττές ανάλογα με την ισοτιμία του πλήθους των κορυφών. Καμία περιττή οπή δεν είναι τέλεια (ο αριθμός κλίκας μιας οπής είναι 2 και ο χρωματικός της αριθμός είναι 3) και καμία περιττή αντιοπή δεν είναι τέλεια (ο αριθμός κλίκας μιας αντιοπής με $2k+1$ κορυφές είναι k και ο χρωματικός της αριθμός είναι $k+1$). Το 1960, ο Berge [9] ανακοίνωσε την εικασία ότι ένα γράφημα είναι τέλειο εάν (και μόνο εάν) δεν περιέχει καμία περιττή οπή και αντιοπή. Αυτή η εικασία έγινε γνωστή ως *Ισχυρή Τέλειων Γραφημάτων Εικασία*(Strong Perfect Graph Conjecture–SPGC). Μπορεί να επαναδιατυπωθεί ως εξής.

- Το γράφημα G είναι τέλειο εάν και μόνο εάν δεν περιέχει κανένα επαγώμενο υπογράφημα ισόμορφο σε μια περιττή οπή ή σε μια περιττή αντιοπή.

- Το γράφημα G είναι τέλειο εάν και μόνο εάν κάθε κύκλος μεγέθους ≥ 5 στο G ή στο $\overline{G}$ περιέχει μια χορδή.

Οι Chvatal και Sbihi στο βιβλίο [23] πρότειναν να ονομάζουν ένα γράφημα ως *Berge γράφημα* εάν δεν περιέχει καμία περιττή οπή ή καμία περιττή αντιοπή. Υπό αυτή την ορολογία, η Ισχυρή Τέλειων Γραφημάτων Εικασία επιβεβαιώνει ότι ένα γράφημα είναι τέλειο εάν (και μόνο εάν) είναι ένα Berge γράφημα. Επομένως ο εντοπισμός των οπών και αντιοπών παρουσιάζει μέγιστο ενδιαφέρον και τυγχάνει αρκετά μεγάλης προσοχής από πολλούς ερευνητές [9, 10, 18]. Σημειώνουμε ότι ο γρηγορότερος αλγόριθμος για το πρόβλημα αυτό έχει προταθεί από τους Νικολόπουλο και Παλιό στην εργασία [90] που τρέχει σε $O(n + m^2)$ χρόνο για ένα γράφημα με n κορυφές και m ακμές.

Το 2002 οι Chudnovsky και Seymour ανακοίνωσαν ότι σε συνεργασία με μια προηγούμενη έρευνα με τους Robertson και Thomas είχαν ολοκληρώσει την απόδειξη την Ισχυρή Τέλειων Γραφημάτων Εικασία. Οι τέσσερις συγγραφείς παρουσιάζουν την εκτενή απόδειξη τους (175 σελίδες) στην εργασία [22] και επομένως το SPGC μετατράπηκε σε *Ισχυρό Τέλειων Γραφημάτων Θεώρημα* (Strong Perfect Graph Theorem-SPGT).

Η κλάση των τέλειων γραφημάτων επιλέχθηκε λόγω των σημαντικών δομικών χαρακτηριστικών και των αλγοριθμικών ιδιοτήτων που διαθέτουν τα γραφήματα αυτά, και οι οποίες οδηγούν σε πολυωνυμικού χρόνου αλγορίθμους επίλυσης πολλών κλασικών προβλημάτων βελτιστοποίησης, τα οποία στην γενική περίπτωση είναι NP-πλήρη. Τέτοια κλασικά προβλήματα βελτιστοποίησης είναι το πρόβλημα χρωματισμού (coloring), επικάλυψης με μονοπάτια (path cover), η εύρεση διαδρομών και κύκλων Hamilton, και πρόβλημα απαρίθμησης σκελετικών δέντρων. Οι εφαρμογές αυτών των προβλημάτων βελτιστοποίησης είναι πολλαπλές, σημαντικές, και καλύπτουν πολλά πεδία διαφορετικών επιστημών (από τα μαθηματικά έως την φιλοσοφία)[9, 47].

1.3 Δενδρική Αναπαράσταση και Αποσύνθεση Γραφημάτων

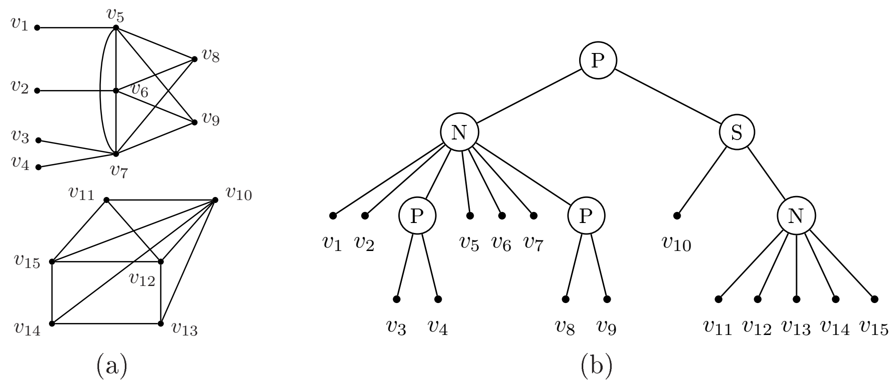
Η δενδρική αναπαράσταση για ειδικά γραφήματα, μεταξύ άλλων δομών, είναι συχνά η βάση για γρήγορες λύσεις σε αλγοριθμικά προβλήματα που είναι γενικά δύσκολα. Πολλές κλάσεις γραφημάτων έχουν μια μοναδική δενδρική αναπαράσταση, που βασίζεται σε μια γενική αντιμετώπιση, γνωστή ως m-αποσύνθεση (modular decomposition) γραφημάτων. Χρησιμοποιώντας δενδρική αναπαράσταση, πολλά προβλήματα αναγνώρισης, βελτιστοποίησης και απαρίθμησης μπορούν να επιλυθούν αποτελεσματικά για ποικίλες κατηγορίες γραφημάτων, όπως

- quasi-threshold γραφήματα,
- cographs,
- tree-cographs,
- P_4-sparse γραφήματα,
- P_4-tidy γραφήματα,
- $(q, q-4)$ γραφήματα,
- permutation γραφήματα,
- chordal γραφήματα,
- split-perfect γραφήματα,
- (P_5, gem)-free γραφήματα,
- $(P_5, \text{diamond})$-free γραφήματα,
- και semi-P_4-sparse γραφήματα.

Έχουμε αποδείξει αποτελέσματα αναγνώρισης, βελτιστοποίησης και απαρίθμησης για μερικές από τις παραπάνω κλάσεις γραφημάτων.

1.3.1 m-Αποσύνθεση

Ένα υποσύνολο M των κορυφών ενός γραφήματος G αναφέρεται ως *αυτοτελή-μονάδα* (module) του γραφήματος G, εάν κάθε κορυφή εκτός του συνόλου M είναι, είτε γειτονική σε όλες τις κορυφές του M, είτε σε καμία από αυτές. Το κενό σύνολο, τα μονοσύνολα και το σύνολο κορυφών V λέγονται *τετριμμένες* αυτοτελείς-μονάδες και όταν το γράφημα G έχει μόνο τετριμμένες αυτοτελείς-μονάδες τότε αναφέρεται ως *πρώτο γράφημα* (prime graph ή indecomposable). Μια μη-τετριμμένη αυτοτελή-μονάδα ονομάζεται επίσης και *ομογενές* σύνολο (homogeneous set). Επιπλέον, μια αυτοτελή-μονάδα M του γραφήματος G ονομάζεται *ισχυρή αυτοτελή-μονάδα* (strong



Σχήμα 1.1: (a) Ένα γράφημα G και (b) το md-δέντρο του $T(G)$.

module) εάν για κάθε μία αυτοτελή-μονάδα $M' \neq M$ του γραφήματος G, είτε ισχύει $M' \cap M = \emptyset$ είτε ισχύει $M' \subset M$.

Η m-αποσύνθεση (modular decomposition) ενός γραφήματος G αναπαρίσταται από ένα δέντρο $T(G)$ το οποίο ονομάζουμε *md-δένδρο* του γραφήματος G (modular decomposition tree)· τα φύλλα του δέντρου $T(G)$ είναι οι κορυφές του γραφήματος G ενώ κάθε εσωτερικός κόμβος t αντιστοιχεί σε μια ισχυρή αυτοτελή-μονάδα που συμβολίζεται $M(t)$ και επάγεται από το σύνολο των κορυφών/φύλλων του υποδέντρου με ρίζα τον t. Έτσι το δέντρο $T(G)$ αναπαριστά όλα τις ισχυρές αυτοτελείς-μονάδες του γραφήματος G. Κάθε εσωτερικός κόμβος επιγράφεται με P για *παράλληλη* αυτοτελή-μονάδα (parallel module), ή με S για *σειριακή* αυτοτελή-μονάδα (series module), ή με N για *γειτονική* αυτοτελή-μονάδα (neighborhood module). Η αυτοτελή-μονάδα που αντιστοιχεί σε έναν P-κόμβο επάγει ένα μη-συνδεδεμένο υπογράφημα του γραφήματος G, αυτή του S-κόμβου επάγει ένα συνδεδεμένο υπογράφημα του γραφήματος G που το συμπλήρωμά του είναι ένα μη-συνδεδεμένο υπογράφημα και αυτή του N-κόμβου επάγει ένα συνδεδεμένο υπογράφημα του γραφήματος G που το συμπλήρωμά του είναι επίσης ένα συνδεδεμένο υπογράφημα. Το Σχήμα 1.1 δείχνει ένα γράφημα και το md-δέντρο του.

Έστω ότι ο κόμβος t είναι ένας εσωτερικός κόμβος του md-δέντρου $T(G)$. Εάν ο κόμβος t έχει παιδιά $t_1, t_2, \ldots, t_p$, τότε ορίζουμε το *αντιπροσωπευτικό γράφημα* $G(t)$ (representative graph) ως ακολούθως:

- $V(G(t)) = \{t_1, t_2, \ldots, t_p\}$, and
- $E(G(t)) = \{t_i t_j \mid v_i v_j \in E(G),\ v_i \in M(t_i) \text{ και } v_j \in M(t_j)\}$.

Σημειώνουμε ότι εξ' ορισμού της αυτοτελούς-μονάδας, εάν μια κορυφή της αυτοτελούς-μονάδας $M(t_i)$ είναι γειτονική με μια άλλη κορυφή της αυτοτελούς-μονάδας $M(t_j)$ τότε κάθε κορυφή της αυτοτελούς-μονάδας $M(t_i)$ είναι γειτονική με κάθε κορυφή της αυτοτελούς-μονάδας $M(t_j)$. Έτσι, το γράφημα $G(t)$ είναι ισόμορφο με το γράφημα που επάγεται από ένα υποσύνολο της αυτοτελούς-μονάδας $M(t)$ συρρικνώνοντας σε μια κορυφή κάθε μέγιστη αυτοτελή-υπομονάδα της $M(t)$ στο δέντρο $T(G)$. Για τους P-, S-, και N-κόμβους, το ακόλουθο λήμμα ισχύει (δείτε επίσης [18, 40]):

Λήμμα 1.1. *Έστω G ένα γράφημα, $T(G)$ το md-δέντρο του, και t ένας εσωτερικός κόμβος του $T(G)$. Τότε,*

(M.i) το γράφημα $G(t)$ είναι ένα χωρίς-ακμές γράφημα εάν t είναι ένας P-κόμβος,

(M.ii) το γράφημα $G(t)$ είναι ένα πλήρες γράφημα εάν t είναι ένας S-κόμβος, και

(M.iii) το γράφημα $G(t)$ είναι ένα πρώτο γράφημα εάν t είναι ένας N-κόμβος.

Το md-δέντρο $T(G)$ ενός γραφήματος G κατασκευάζεται αναδρομικά ως εξής: οι παράλληλες αυτοτελείς-μονάδες αποσυντίθενται στις συνεκτικές συνιστώσες τους (connected components), οι σειριακές αυτοτελείς-μονάδες στις μη-συνεκτικές συνιστώσες τους (co-connected components), και οι γειτονικές αυτοτελείς-μονάδες στις ισχυρές αυτοτελείς-υπομονάδες τους (strong submodules). Η αποτελεσματική κατασκευή του md-δέντρου ενός γραφήματος έχει δεχθεί πολύ μεγάλη προσοχή. Υπάρχει ένα πλήθος από $O(n^4)$, $O(n^3)$, $O(mn)$, και $O(n^2)$ αλγορίθμους για την εύρεση του md-δέντρου, όπως είναι των Buer και Möhring [19], Golumbic [43], Habib και Maurer [45], McConnell [78], Muller και Spinrad [83], μερικοί από τους οποίους είναι για συγκεκριμένες ή γενικότερες περιπτώσεις του προβλήματος. Από το 1994, είναι πλέον γνωστό πως για οποιοδήποτε γράφημα G το md-δέντρο $T(G)$ είναι μοναδικό ως προς τον ισομορφισμό και μπορεί να κατασκευαστεί σε γραμμικό χρόνο [30, 33, 79, 80]. Σημειώνουμε ότι εάν το δέντρο $T(G)$ δεν περιέχει κανένα εσωτερικό N-κόμβο, τότε το γράφημα G είναι ένα cograph (P_4-free γράφημα) και το δέντρο $T(G)$ είναι το αντίστοιχο cotree (οι P-κόμβοι και οι S-κόμβοι του $T(G)$ είναι ακριβώς οι 0-κόμβοι και 1-κόμβοι, αντίστοιχα, του cotree).

Ο Dahlhaus στην εργασία [31] πρότεινε έναν παράλληλο αλγόριθμο για την m-αποσύνθεση ενός γραφήματος που τρέχει σε $O(\log^2 n)$ χρόνο σε ένα CRCW-PRAM μοντέλο με ένα γραμμικό αριθμό επεξεργαστών, ως προς το μέγεθος του γραφήματος. Η προσέγγιση του Dahlhaus (1995) αναπτύσσει αναδρομικά την m-αποσύνθεση δύο επαγόμενων υπογραφημάτων (που φτιάχνονται από τις συνεκτικές συνιστώσες και τις μη-συνεκτικές συνιστώσες ως προς τους γείτονες και τους αντιγείτονες, αντίστοιχα, μιας τυχαίας κορυφής του γραφήματος) οι οποίες στην συνέχεια συγχωνεύονται έτσι ώστε να δημιουργήσουν την m-αποσύνθεση ολόκληρου του γραφήματος. Για πληρότητα, παρουσιάζουμε τα ακόλουθα δύο λήμματα.

Λήμμα 1.2 (Dahlhaus [31]). *Έστω ένα γράφημα G με n κορυφές και m ακμές. Η m-αποσύνθεση του γραφήματος G μπορεί να επιτευχθεί σε $O(\log^2 n)$ χρόνο με $O(n+m)$ επεξεργαστές σε ένα CRCW-PRAM μοντέλο.*

Λήμμα 1.3 (Dahlhaus et al. [33]). *Έστω ένα γράφημα G με n κορυφές και m ακμές. Η m-αποσύνθεση του γραφήματος G μπορεί να επιτευχθεί σε $O(\log^3 n)$ χρόνο με $O(n+m)$ επεξεργαστές σε ένα EREW-PRAM μοντέλο.*

Με έναν πιο φορμαλιστικό τρόπο και ακολουθώντας την σημειογραφία των Jamison και Olariu στην εργασία [64], οι εσωτερικοί κόμβοι του md-δέντρου αντισοιχούν σε τρεις πράξεις. Έστω $G_1 = (V_1, E_1)$ και $G_2 = (V_2, E_2)$ δύο ανεξάρτητα γραφήματα. Τότε:

- $G_1 \textcircled{0} G_2 := (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$
- $G_1 \textcircled{1} G_2 := (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{xy | x \in V_1, y \in V_2\})$.

Σημειώνουμε ότι αυτές οι δύο πράξεις αντανακλούν τις πρώτες δύο συνθήκες του Λήμματος 1.1 και επίσης τις επιγραφές των εσωτερικών κόμβων ενός cotree. Τώρα μπορούμε και να ορίσουμε την ③-πράξη που αντανακλά στην συνθήκη (iii) του Λήμματος 1.1. Αναφέρουμε ότι η επιγραφή της πράξης (③ και όχι ② όπως θα περίμενε κανείς) γίνεται σύμφωνα με την ομογενής αποσύνθεση που θα δούμε στην συνέχεια. Έστω $H := (\{h_1, \ldots, h_t\} \cup V_0, E_0)$, $G_i = (V_i, E_i)$, για $1 \leq i \leq t$, μη-τετριμμένα τυχαία γραφήματα. Το γράφημα $G = (V, E)$ λέγεται ότι προκύπτει από το γράφημα H με την ③-πράξη εάν

- $V = \bigcup_{i=0}^{t} V_i$
- $E = \bigcup_{i=0}^{t} E_i \cup (E_0 \cap V_0) \cup \{ij | i \in V_i, j \in V_j \text{ και } h_i h_j \in E_0\} \cup \{vj | v \in V_0, j \in V_j \text{ και } v h_j \in E_0\}$.

Με άλλα λόγια κάθε κορυφή h_i του γραφήματος H αντικαθίσταται από το γράφημα G_i. Θυμίζουμε ότι το γράφημα G_i δεν μπορεί να αναπαριστά μια μοναδική κορυφή. Επιπλέον, για να επιτρέψουμε μια μοναδική αντιστροφή για την ③-πράξη πρέπει να υποθέσουμε ότι κάθε γράφημα G_i αποθηκεύει την επιγραφή της κορυφής h_i, η οποία πρέπει να αντικατασταθεί.

Υπενθυμίζουμε ότι με αυτούς τους συμβολισμούς κάθε γράφημα μπορεί να αποκτηθεί με μοναδικό τρόπο, από τα μέγιστα πρώτα υπογραφήματα με μια πεπερασμένη ακολουθία πράξεων ⓪, ① και ③ σύμφωνα με την m-αποσύνθεση του γραφήματος G. Έτσι το md-δέντρο $T(G)$ κατασκευάζεται ορίζοντάς το από τον προφανή τρόπο, δηλαδή κάθε εσωτερικός κόμβος του δέντρου $T(G)$ αντιστοιχεί σε μια από τις τρεις πράξεις του Λήμματος 1.1 και τα φύλλα του δέντρου $T(G)$ είναι ακριβώς οι κορυφές του γραφήματος G.

1.3.2 h-Αποσύνθεση

Στην εργασία [64] οι Jamison και Olariu εισήγαγαν και μελέτησαν την έννοια της *p-συνδεσιμότητας* (p-connectedness). Αυτή η ιδέα τους οδήγησε σε μια γενική δομή για τυχαία γραφήματα και σε ένα μοναδικό δέντρο αναπαράστασης επεκτείνοντας την m-αποσύνθεση. Σε αυτή την περίπτωση το γράφημα G^* αποκτάται από το γράφημα G συρρικνώνοντας κάθε μέγιστο ομογενές σύνολο σε μια μοναδική κορυφή και ονομάζεται το *χαρακτηριστικό γράφημα* (characteristic graph) του γραφήματος G. Προφανώς, το γράφημα G^* είναι ένα πρώτο γράφημα.

Ένα γράφημα $G = (V, E)$ είναι P_4-*συνεκτικό*, ή p-*συνεκτικό* (p-connected) για συντομία, εάν για κάθε διαμέριση V_1, V_2 του συνόλου κορυφών V με μη-κενά τα σύνολα V_1, V_2, υπάρχει ένα P_4 του γραφήματος G με κορυφές στο σύνολο V_1 και στο σύνολο V_2, που καλείται *τεμνόμενο* (crossing) P_4. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι κάθε γράφημα έχει μια μοναδική διαμέριση σε μέγιστα επαγώμενα p-συνεκτικά υπογραφήματα, που ονομάζονται *p-συνεκτικές συνιστώσες*, ή *p-συνιστώσες* για συντομία, και στις κορυφές που δεν ανήκουν σε κανένα P_4.

Μια p-συνιστώσα H του G καλείται *διαχωρίσιμη* (separable) εάν έχει μια διαμέριση σε μη-κενά σύνολα H_1, H_2 τέτοια ώστε κάθε P_4 με κορυφές και στα δύο σύνολα έχει τις μέσες κορυφές (midpoints) στο H_1 και τα άκρα του (endpoints) στο H_2. Ένα γράφημα ονομάζεται *διχοτομίσιμο* (split graph) εάν υπάρχει μια διαμέριση των κορυφών του σε ένα ανεξάρτητο σύνολο (stable set) και σε ένα πλήρες σύνολο (complete set). Σημειώνουμε ότι αυτή η διαμέριση δεν είναι μοναδική. Η σχέση μεταξύ ενός p-συνεκτικού γραφήματος και του διχοτομίσιμου γραφήματος φαίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1.4 (Jamison & Olariu [64]). *Μια p-συνεκτική συνιστώσα H είναι διαχωρίσιμη εάν και μόνο εάν το χαρακτηριστικό γράφημα της p-συνεκτικής συνιστώσας H είναι ένα διχοτομίσιμο γράφημα.*

Η εισαγωγή και η μελέτη των διαχωρίσιμων p-συνεκτικών γραφημάτων δικαιώνεται από το παρακάτω γενικό θεώρημα για τυχαία γραφήματα.

Θεώρημα 1.5 (Δομικό Θεώρημα [64]). *Για ένα οποιοδήποτε γράφημα G, ακριβώς μια από τις παρακάτω συνθήκες ικανοποιείται:*

(H.i) *το γράφημα G είναι συνδεδεμένο,*

(H.ii) *το γράφημα $\overline{G}$ είναι συνδεδεμένο,*

(H.iii) *το γράφημα G είναι p-συνεκτικό,*

(H.iv) *υπάρχει μια μοναδική κατάλληλη διαχωρίσιμη p-συνιστώσα H του γραφήματος G με μια διαμέριση (H_1, H_2) τέτοια ώστε κάθε κορυφή εκτός της p-συνιστώσας H είναι γειτονική με όλες τις κορυφές του συνόλου H_1 και μη-γειτονική με όλες τις κορυφές του συνόλου H_2.*

Βασιζόμενοι σε αυτό το θεώρημα, οι Jamison και Olariu όρισαν την *πρωτόγονη αποσύνθεση* (primeval decomposition), που μπορεί να περιγραφεί από ένα πρωτόγονο δέντρο (primeval tree) και να οδηγήσει σε αποτελεσματικούς αλγορίθμους για μια ποικιλία προβλημάτων εάν οι p-συνεκτικές συνιστώσες είναι ικανοποιητικά απλές. Για αυτόν τον σκοπό όρισαν στην εργασία [64] την ακόλουθη πράξη που αντανακλά στην συνθήκη (H.iv) του Θεωρήματος 1.4.

Έστω $G_1 = (V_1, E_1)$ και $G_2 = (V_2, E_2)$ δύο γραφήματα με $V_1 \bigcap V_2 = \emptyset$ τέτοια ώστε το γράφημα G_1 είναι διαχωρίσιμο με διαμέριση V_1^1, V_1^2 και κάθε P_4 έχει τις μέσες κορυφές στο V_1^1. Το γράφημα με σύνολο κορυφών $V_1 \cup V_2$ και σύνολο ακμών $E_1 \cup E_2 \cup \{xy | x \in V_1^1, y \in V_2\}$ ορίζεται ως $G_1 ② G_2$.

Όπως αναφέρεται στην εργασία [64], κάθε γράφημα μπορεί να αποκτηθεί με μοναδικό τρόπο από τις p-συνεκτικές συνιστώσες και τις κορυφές που δεν ανήκουν σε κανένα P_4 από μια πεπερασμένη ακολουθία από πράξεις ⓪, ① και ②. Επιπλέον το Θεώρημα 1.4 αναδεικνύει ένα δέντρο που συσχετίζεται με το σχήμα αποσύνθεσης που ονομάζεται *πρωτόγονο δέντρο* (primeval tree). Οι εσωτερικοί κόμβοι του δέντρου έχουν επιγραφές τις ακέραιες τιμές $i \in \{0, 1, 2\}$ που αντιστοιχούν στις ① πράξεις πάνω σε γραφήματα που σχετίζονται με τα παιδιά του κόμβου. Τα φύλλα του δέντρου είναι ακριβώς οι p-συνεκτικές συνιστώσες του υπό μελέτη γραφήματος.

Το επόμενο βήμα είναι το αποτέλεσμα της πράξης ③ πάνω σε όλες τις p-συνιστώσες της πρωτόγονης αποσύνθεσης. Αυτό το μέσο αποτέλεσμα ονομάζεται *μεσαιωνική αποσύνθεση* (medieval decomposition) και ξανά κάθε γράφημα μπορεί να αποκτηθεί από τις χαρακτηριστικές p-συνιστώσες και τις *ασθενής κορυφές* (weak vertices), δηλαδή τις κορυφές που δεν ανήκουν σε καμία p-συνιστώσα, από μια πεπερασμένη ακολουθία από πράξεις ⓪, ①, ② και ③. Τελικά, η *ομογενής αποσύνθεση ή h-αποσύνθεση* (homogeneous decomposition) πετυχαίνεται από τον ορισμό της ④-πράξης που εφαρμόζεται σε όλες τις χαρακτηριστικές p-συνιστώσες που είναι διχωτομίσιμα γραφήματα κατασκευάζοντας την αναπαράσταση κλικών (clique representation-tree) της συνιστώσας θεωρώντας την ως τριγωνικό γράφημα (chordal graph)[64].

Σημειώστε ότι χωρίζοντας το γράφημα σε p-συνεκτικές συνιστώσες και η κατασκευή της h-αποσύνθεσης μπορεί να επτευχθεί ακολουθιακά σε γραμμικό χρόνο ως προς το μέγεθος του γραφήματος [7]. Για να αποκτήσει τις p-συνιστώσες ενός γραφήματος, αυτός ο αλγόριθμος εκμεταλλεύεται το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 1.4 (Baumman [7]). *Ένα γράφημα G αποσυντίθενται από την πράξη ② εάν και μόνο εάν το γράφημα G^* είναι διχοτομίσιμο γράφημα με παραπάνω από μια διαμερίσεις σε ανεξάρτητο και πλήρες σύνολο.*

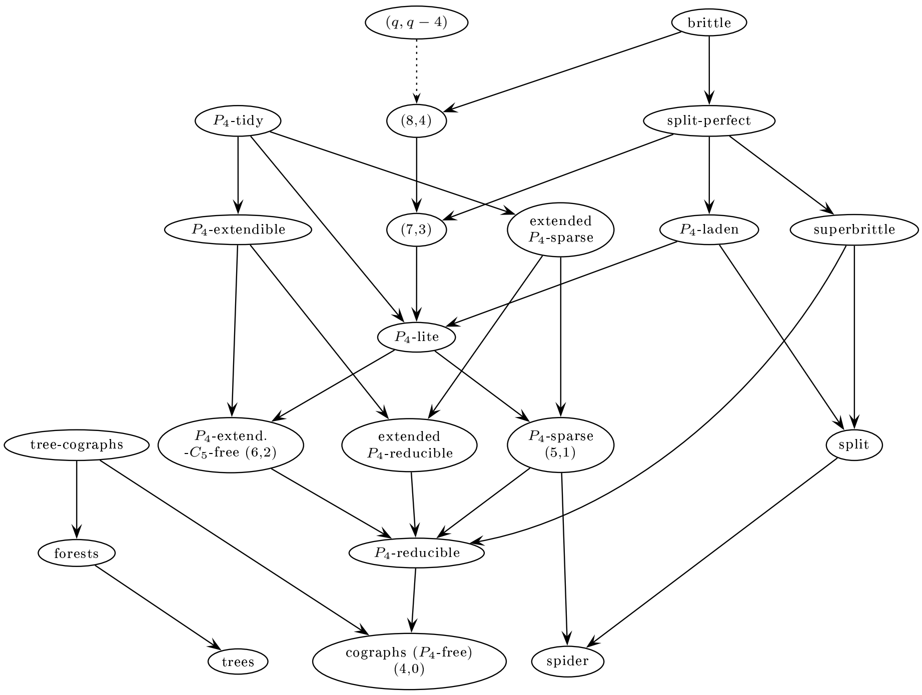
Προσέξτε ότι στη περίπτωση που το γράφημα G^* είναι ένα διχοτομίσιμο γράφημα με μοναδική διαμέριση σε ανεξάρτητο σύνολο και πλήρες σύνολο τότε κατασκευάζεται από την πράξη ④. Επομένως, με αυτή την πράξη το ακόλουθο αποτέλεσμα είναι αληθές.

Παρατήρηση 1.1. *Ένα γράφημα G αποσυντίθενται από την πράξη ④ εάν και μόνο εάν το γράφημα G^* είναι διχοτομίσιμο γράφημα με μοναδική διαμέριση σε ανεξάρτητο και πλήρες σύνολο.*

Εξ' ορισμού το χαρακτηριστικό γράφημα G^* είναι πρώτο γράφημα. Έτσι δοθέντος του md-δέντρου $T(G)$ και βασιζόμενοι σε γνωστές δομικές ιδιότητες των διχοτομίσιμων γραφημάτων, έπεται η αποτελεσματική κατασκευή της h-αποσύνθεσης του, ως προς εισαγωγή, γραφήματος.

1.4 m-Αποσύνθεση σε Κλάσεις Γραφημάτων

Σε γενικές γραμμές, κάνοντας χρήση της m-αποσύνθεσης για την επίλυση ενός αλγοριθμικού προβλήματος μπορεί να αποδειχθεί αρκετά ενδιαφέρον. Ένας τυπικός (διαίρει-και-βασίλευε) αλγόριθμος που ερευνά την m-αποσύνθεση έχει συχνά την ακόλουθη δομή: πρώτα, ο αλγόριθμος κατασκευάζει το md-δέντρο $T(G)$ του δοθέντος γραφήματος G χρησιμοποιώντας έναν από τους γνωστούς γραμμικούς αλγόριθμους [30, 33, 79]· στη συνέχεια, με έναν από κάτω προς τα πάνω τρόπο



Σχήμα 1.2: Συσχέτιση μεταξύ κλάσεων γραφημάτων (Hasse diagram).

ο αλγόριθμος υπολογίζει για κάθε κόμβο t του δέντρου $T(G)$ την βέλτιστη τιμή για το υπογράφημα $G[M(t)]$ του γραφήματος G που επάγεται από το σύνολο όλων των φύλλων του υποδέντρου του δέντρου $T(G)$ με ριζωμένο τον κόμβο t. Έτσι ο υπολογισμός ξεκινάει από την ανάθεση των βέλτιστων τιμών στα φύλλα. Μετά, ο αλγόριθμος υπολογίζει την βέλτιστη τιμή για κάθε εσωτερικό κόμβο t χησιμοποιώντας τις βέλτιστες τιμές από όλα τα παιδιά του κόμβου t και με βάση την επιγραφή (ή τον τύπο) του κόμβου. Τελικά, η βέλτιστη τιμή της ρίζας του δέντρου $T(G)$ είναι και η βέλτιστη τιμή για το πρόβλημα του δοθέντος γραφήματος G.

Με αυτόν τον τρόπο, για να καθορίσουμε έναν τέτοιου είδους αλγόριθμο, βασισμένου στην m-αποσύνθεση (modular decomposition based algorithm), πρέπει μόνο να περιγράψουμε τον τρόπο που καθορίζουμε τις τιμές στα φύλλα και ποιον τύπο εφαρμόζουμε ή ποιο υποπρόβλημα επιλύουμε στους P-κόμβους, S-κόμβους, και N-κόμβους χρησιμοποιώντας ως είσοδο τις τιμές όλων των παιδιών τους (για περισσότερες λεπτομέρειες δείτε [18]). Στη συγκεκριμένη εργασία, κάνουμε χρήση ενός βασισμένου στην m-αποσύνθεση αλγόριθμο για να επιλύσουμε προβλήματα απαρίθμησης, βελτιστοποίησης και αναγνώρισης σε συγκεκριμένες κλάσεις γραφημάτων.

1.4.1 Συμπληρωματικά-παραγόμενα Γραφήματα

Ένα γράφημα G ονομάζεται *συμπληρωματικά-παραγόμενο* γράφημα (ή cograph ή P_4-free γράφημα) εάν κανένα σύνολο κορυφών του γραφήματος G επάγει ένα P_4. Τα γραφήματα cographs επιδέχονται μια δενδρική αναπαράσταση μοναδική ως προς τον ισομορφισμό, που ονομάζεται *cotree* και συμβολίζεται με $T_{co}(G)$.

Όπως είναι γνωστό, ο Lerchs απέδειξε ότι τα cographs αποτελούν την οικογένεια των γραφημάτων που κατασκευάζονται από μια μοναδική κορυφή υπό την κλειστότητα των πράξεων της ένωσης και του συμπληρώματος. Αυτές οι πράξεις ορίζουν μοναδικά μια δενδρική αναπαράσταση που αναφέρεται ως cotree. Το δέντρο cotree του cograph γραφήματος G, με συμβολισμό $T_{co}(G)$, είναι ένα ριζωμένο δέντρο, τέτοιο ώστε:

(i) κάθε εσωτερικός κόμβος, εκτός πιθανά της ρίζας, έχει τουλάχιστον δύο παιδιά·

(ii) οι εσωτερικοί κόμβοι έχουν επιγραφές είτε 0 (0-κόμβοι) ή 1 (1-κόμβοι)· τα παιδιά, που είναι εσωτερικοί κόμβοι, ενός 1-κόμβου (0-κόμβου αντίστ.) είναι 0-κόμβοι (1-κόμβοι αντιστ.), δηλαδή οι 1-κόμβοι και 0-κόμοι εναλλάσσονται μεταξύ τους σε κάθε μονοπάτι από την ρίζα μέχρι οποιονδήποτε κόμβο του cotree·

(iii) τα φύλλα του cotree έχουν μια-προς-μια αντιστοιχία με τις κορυφές του γραφήματος G, και δύο κορυφές v_i, v_j είναι γειτονικές στο γράφημα G εάν και μόνο εάν ο ελάχιστος κοινός προκάτοχος των φύλλων που αντισοιχούν στις κορυφές v_i και v_j είναι ένας 1-κόμβος.

Ο ορισμός του Lerchs απαιτεί ότι η ρίζα ενός cotree πρέπει να είναι ένας 1-κόμβος· παρ' όλα αυτά, εάν παραλείψουμε αυτόν τον περιορισμό και επιτρέψουμε η ρίζα να είναι επίσης και ένας 0-κόμβος, τότε παίρνουμε cotrees στα οποία όλοι οι εσωτερικοί κόμβοι έχουν τουλάχιστον δύο παιδιά, και στα οποία η ρίζα είναι ένας 1-κόμβος εάν και μόνο εάν το αντίστοιχο cograph είναι συνδεδεμένο.

1.4.2 P_4-sparse Γραφήματα

Η κλάση των P_4-sparse γραφημάτων είχε εισαχθεί στην διδακτορική διατριβή του Hoáng [52] ως η κλάση των γραφημάτων για την οποία κάθε σύνολο πέντε κορυφών επάγει το πολύ ένα P_4 (δηλαδή ένα άχορδο μονοπάτι μήκους τέσσερα).

Εάν δύο κορυφές x και y είναι γειτονικές σε ένα γράφημα G, θα λέμε ότι η κορυφή x *βλέπει* (sees) την κορυφή y· ειδάλλως θα λέμε ότι η κορυφή x *χάνει* (misses) την κορυφή y. Επεκτείνουμε αυτήν την έννοια σε σύνολα κορυφών: το σύνολο κορυφών $V_i \subseteq V(G)$ βλέπει (χάνει) το σύνολο κορυφών $V_j \subseteq V(G)$ εάν και μόνο εάν κάθε κορυφή $x \in V_i$ βλέπει (χάνει) κάθε κορυφή $y \in V_j$.

Ένα γράφημα ονομάζεται *αραχνοειδές* (spider) εάν το σύνολο κορυφών του επιτρέπει μια διαμέριση στα σύνολα S, K, και R τέτοια ώστε:

(S1) $|S| = |K| \geq 2$, το σύνολο S είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο (independent set), και το σύνολο K είναι μια κλίκα (clique)·

(S2) το σύνολο κορυφών R βλέπει το σύνολο K και χάνει το σύνολο S·

(S3) υπάρχει μια αντιστοίχιση $f : S \longrightarrow K$ τέτοια ώστε ακριβώς μια από τις ακόλουθες δηλώσεις ισχύει:
  (i) για κάθε κορυφή $v \in S$, $N(v) \cap K = \{f(v)\}$·
  (ii) για κάθε κορυφή $v \in S$, $N(v) \cap K = K - \{f(v)\}$.

Το τριμερής σύνολο (S, K, R) ονομάζεται *διαμέριση του αραχνοειδούς γραφήματος* (spider partition). Ένα γράφημα G είναι ένα *πρώτο αραχνοειδές γράφημα* (prime spider) εάν το γράφημα G είναι ένα αραχνοειδές γράφημα με διαμέριση κορυφών (S, K, R) και το σύνολο $|R| \leq 1$. Για τα πρώτα αραχνοειδή γραφήματα, με σκοπό την διαχώριση των περιπτώσεων (i) και (ii) στην συνθήκη S3, αναφερόμαστε σε αυτά ως *αραιό αραχνοειδές γράφημα* (thin spider) και ως *πυκνό αραχνοειδές γράφημα* (thick spider), αντίστοιχα. Σημειώστε ότι, το συμπλήρωμα ενός αραιού αραχνοειδούς γραφήματος είναι ένα πυκνό αραχνοειδές γράφημα και αντίστροφα.

Ερευνώντας τις δομικές ιδιότητες των P_4-sparse γραφημάτων και των αραχνοειδών γραφημάτων, οι Giakoumakis και Vanherpe [40] έδειξαν ότι:

Λήμμα 1.5. *Έστω G ένα γράφημα και έστω $T(G)$ το md-δέντρο του. Το γράφημα G είναι P_4-sparse εάν και μόνο εάν για κάθε N-κόμβο t του δέντρου $T(G)$, το γράφημα $G(t)$ είναι ένα αραχνοειδές γράφημα με διαμέριση (S, K, R) και καμία κορυφή του συνόλου $S \cup K$ δεν είναι εσωτερικός κόμβος στο δέντρο $T(G)$.*

Βασιζόμενοι στο προηγούμενο αποτέλεσμα, προτάθηκε ένας γραμμικού χρόνου αλγόριθμος αναγνώρισης και πολλά προβλήματα βελτιστοποίησης επιλύθηκαν σε γραμμικό χρόνο, όπως είναι το μέγιστο μέγεθος κλίκας (maximum size clique), το μέγιστο μέγεθος ανεξάρτητου συνόλου (maximum size stable set), ο χρωματισμός (minimum coloring), η ελάχιστη κλίκα επικάλυψης (minimum clique cover), και η ελάχιστη τριγωνοποίηση (ελάχιστο πλήθος ακμών που πρέπει να προστεθεί στο γράφημα G έτσι ώστε το γράφημα G να γίνει τριγωνικό – minimum fill-in), για την κλάση των P_4-sparse γραφημάτων (δείτε [40, 61, 63]).

1.4.3 P_4-tidy Γραφήματα

Η Rusu εισήγαγε την κλάση αυτή, όπως φαίνεται στην εργασία [39], με σκοπό να ερμηνεύσει (διευκρινίσει) την έννοια του P_4-domination σε τέλεια γραφήματα. Ένα γράφημα G ονομάζεται P_4-*tidy* εάν για κάθε επαγώμενο P_4, έστω A, το πολύ μια κορυφή από το σύνολο $V \setminus A$ επάγει ένα P_4 μαζί με τρεις κορυφές από το A. Τα C_5-free P_4-tidy γραφήματα, επίσης γνωστά ως P_4-lite γραφήματα, είναι τέλεια, αφού είναι ασθενώς τριγωνικά γραφήματα (weakly triangulated graphs) [39]. Η βασική δομική ιδιότητα των P_4-tidy γραφημάτων φαίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1.6 (Giakoumakis et al. [39]). *Έστω G ένα γράφημα και έστω $T(G)$ το md-δέντρο του. Το γράφημα G είναι P_4-tidy εάν και μόνο εάν για κάθε N-κόμβο t του δέντρου $T(G)$, είτε*

(i) το γράφημα $G(t)$ είναι ένα πρώτο αραχνοειδές γράφημα με διαμέριση (S, K, R) και το πολύ μια κορυφή από το σύνολο $S \cup K$ είναι ένας εσωτερικός κόμβος στ δέντρο $T(G)$, είτε

(ii) το γράφημα $G(t)$ είναι ένα P_5 και καμία κορυφή του γραφήματος P_5 δεν είναι εσωτερική κορυφή στο δέντρο $T(G)$, είτε

(iii) το γράφημα $G(t)$ είναι ένα $\overline{P_5}$ και καμία κορυφή του γραφήματος $\overline{P_5}$ δεν είναι εσωτερική κορυφή στο δέντρο $T(G)$, είτε

(iv) το γράφημα $G(t)$ είναι ένα C_5 και καμία κορυφή του γραφήματος C_5 δεν είναι εσωτερική κορυφή στο δέντρο $T(G)$.

Ένας γραμμικός αλγόριθμος αναγνώρισης για αυτή την κλάση έχει παρουσιαστεί στην εργασία [39]. Επίσης τα προβλήματα του αριθμού κλίκας (clique number), του ευσταθή αριθμού (stability number), του χρωματικού αριθμού (chromatic number), του αριθμού επικάλυψης με μονοπάτια (path cover number) και του Hamiltonian μονοπατιού έχουν επιλυθεί σε γραμμικό χρόνο. Πιο συγκεκριμένα, για ένα P_4-tidy γράφημα G με n κορυφές και m ακμές τα παραπάνω προβλήματα επιλύονται σε $O(n + m)$ χρόνο, ενώ δοθέντος του md-δέντρου $T(G)$ οι συγκεκριμένοι αλγόριθμοι τρέχουν σε $O(n)$ χρόνο [39]. Επίσης, το πρόβλημα του μέγιστου ταιριάσματος[2] (maximum matching), δοθέντος του md-δέντρου $T(G)$ επιλύεται σε $O(n)$ χρόνο [36], ενώ σε παράλληλο περιβάλλον το ίδιο πρόβλημα επιλύεται σε $O(\log n)$ χρόνο χρησιμοποιώντας $O(n/\log n)$ EREW επεξεργαστές [97].

[2] Ταίριασμα M ενός γραφήματος G είναι ένα υποσύνολο των ακμών του γραφήματος G τέτοιο ώστε να μην υπάρχουν δύο ακμές στο σύνολο M με κοινή κορυφή. Το μέγιστο ταίριασμα είναι η εύρεση ενός ταιριάσματος M στο γράφημα G με μέγιστη πληθικότητα.

1.4.4 $(q, q-4)$ Γραφήματα

Οι Babel και Olariu στην εργασία [5] πρότειναν την γενική αντίληψη των (q, t) γραφημάτων. Σε ένα τέτοιο γράφημα κανένα σύνολο με το πολύ q κορυφές περιέχει παραπάνω από t διαφορετικά P_4. Η ειδική περίπτωση τέτοιων γραφημάτων, που συμβολίζονται ως $(q, q-4)$ γραφήματα επιδέχονται σημαντικές δομικές ιδιότητες όπως φαίνεται στην εργασία [4]. Σημειώνουμε ότι, τα $(q, q-4)$ γραφήματα είναι *brittle γραφήματα* για $q \leq 8$ [5] (ο Chvátal όρισε ένα γράφημα G να λέγεται brittle εάν κάθε επαγώμενο υπογράφημα H του γραφήματος G περιέχει μια κορυφή που δεν είναι μέση-κορυφή σε κανένα P_4 αλλά ούτε και άκρο σε κανένα P_4). Όπως προκύπτει εξ' ορισμού τα cographs είναι ακριβώς τα $(4, 0)$ γραφήματα και τα P_4-sparse γραφήματα εμπίπτουν με τα $(5, 1)$ γραφήματα. Επίσης, τα λεγόμενα C_5-free P_4-extendible γραφήματα είναι ακριβώς τα $(6, 2)$ γραφήματα.

Το βασικό χαρακτηριστικό στοιχείο των $(q, q-4)$ γραφημάτων είναι ότι επιδέχονται μια μοναδική δενδρική αναπαράσταση [5]. Στη δική μας σημειολογία η δομή των $(q, q-4)$ γραφημάτων μπορεί να περιγραφεί ως ακολούθως.

Θεώρημα 1.7 (Babel και Olariu [5]). *Έστω ένα γράφημα G που είναι $(q, q-4)$ γράφημα. Τότε, κάθε πρώτο γράφημα στην m-αποσύνθεση του γραφήματος G είναι είτε ένα πρώτο αραχνοειδές γράφημα, ή ένα γράφημα με λιγότερες από q κορυφές.*

Βασιζόμενοι στο προηγούμενο αποτέλεσμα, πολλά προβλήματα βελτιστοποίησης και κυριαρχίας (domination problems) (όπως είναι η τάξη των κορυφών (vertex ranking)[3], η επικάλυψη με μονοπάτια (path cover), η λίστα χρωμάτων (list coloring)[4] κτλ.) μπορούν να επιλυθούν σε γραμμικό χρόνο για την κλάση των $(q, q-4)$ γραφημάτων για προκαθορισμένη τιμή q [4].

1.4.5 Split-perfect Γραφήματα

Η κλάση των split-perfect γραφημάτων έχει εισαχθεί από τους Brandstädt και Le στην εργασία [16]. Δύο γραφήματα G και H με το ίδιο σύνολο κορυφών ονομάζονται P_4-*ισόμορφα*(P_4-isomorphic) εάν κάθε τέσσερις κορυφές $\{a, b, c, d\} \subseteq V$ επάγουν ένα P_4 στο γράφημα G εάν και μόνο εάν επάγουν ένα P_4 στο H. Ένα γράφημα ονομάζεται split-perfect γράφημα εάν είναι P_4-ισόμορφο με ένα διχοτομίσιμο γράφημα (split graph). Σημειώνουμε ότι ένα διχοτομίσιμο γράφημα το συμβολίζουμε με $G = (Q, S, E)$, όπου το σύνολο Q περιέχει της κορυφές της κλίκας, το σύνολο S περιέχει της κορυφές του ανεξάρτητου συνόλου και το σύνολο E περιέχει όλες τις ακμές του G.

Ακολουθώντας την σημειολογία των Brandstädt και Le, ένα γράφημα ονομάζεται *double-split* γράφημα εάν μπορεί να αποκτηθεί από δύο μη-κοινά (πιθανά κενά) διχοτομίσιμα γραφήματα $G_L = (Q_L, S_L, E_L)$, $G_R = (Q_R, S_R, E_R)$ και ένα επαγώμενο μονοπάτι $P = P[x_L, x_R]$, πιθανά κενό, προσθέτοντας όλες τις ακμές μεταξύ της κορυφής x_L και των κορυφών του συνόλου Q_L και όλες τις ακμές μεταξύ της κορυφής x_R και των κορυφών του συνόλου Q_R. Η κλάση των double-split γραφημάτων γενικεύουν τα διχοτομίσιμα γραφήματα και έχουν πρωταρχικό ρόλο στον χαρακτηρισμό των split-perfect γραφημάτων.

Σημειώνουμε ότι κάθε διχοτομίσιμο γράφημα είναι ένα double-split γράφημα αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει. Στην εργασία [16] έχει δοθεί ένας γραμμικός αλγόριθμος αναγνώρισης για

[3] Έστω G ένα γράφημα και t ένας ακέραιος. Η t-τάξη των κορυφών είναι μια αρίθμηση των κορυφών $c : V \rightarrow \{1, \ldots, t\}$ τέτοια ώστε κάθε ζεύγος κορυφών x και y με $c(x) = c(y)$ και για κάθε μονοπάτι μεταξύ των κορυφών x και y, υπάρχει μια κορυφή z στο μονοπάτι με $c(z) > c(x)$. Το πρόβλημα της τάξης των κορυφών είναι η εύρεση της μικρότερης τιμής t για την οποία το γράφημα G επιδέχεται t-τάξη των κορυφών. Σημειώνουμε ότι η τάξη των κορυφών είναι ένας κατάλληλος χρωματισμός του γραφήματος.

[4] Δοθέντος ενός γραφήματος G και για κάθε κορυφή του v, μια λίστα $L(v)$ από επιθυμητά χρώματα για την συγκεκριμένη κορυφή, τότε το γράφημα G καλείται χρωματίσιμο από λίστα εάν στις κορυφές του γραφήματος G μπορούμε να αναθέσουμε χρώματα από τη λίστα τους έτσι ώστε οι γειτονικές κορυφές να πάρουν διαφορετικά χρώματα.

τα double-split γραφήματα και για τα συμπληρώματά τους. Αυτό οδήγησε στην αναγνώριση των split-perfect γραφημάτων καθώς βασίζεται στο επόμενο (δομικό) θεώρημα που χαρακτηρίζει την κλάση αυτή.

Θεώρημα 1.8 (Θεώρημα 5.2 [16]). *Ένα γράφημα G είναι split-perfect εάν και μόνο εάν κάθε μια από της p-συνεκτικές συνιστώσες H του γραφήματος G έχει τις ακόλουθες ιδιότητες: (i) κάθε ομογενές σύνολο (homogeneous set) στην συνιστώσα H επάγει ένα P_4-free γράφημα, και (ii) το χαρακτηριστικό γράφημα H^* είναι ένα double-split γράφημα ή το συμπλήρωμα ενός double-split γραφήματος.*

Δεν είναι δύσκολο να δει κανείς ότι το προηγούμενο θεώρημα επάγει ένα γραμμικό αλγόριθμο αναγνώρισης της κλάσης των split-perfect γραφημάτων όπως φαίνεται στην εργασία [16]. Εξαρτάται κυρίως από (i) τον γραμμικό αλγόριθμο κατασκευής της m-αποσύνθεσης [30, 79, 80, 33], (ii) τον γραμμικό αλγόριθμο εύρεσης των p-συνεκτικών συνιστωσών ενός γραφήματος [7], (iii) τον γραμμικό αλγόριθμο αναγνώρισης των cographs [29] και (iv) τον γραμμικό αλγόριθμο αναγνώρισης των double-split γραφημάτων και των συμπληρωμάτων τους [16].

1.4.6 Superbrittle Γραφήματα

Μια φυσική υποκλάση των split-perfect γραφημάτων, γνωστά ως *superbrittle* , είναι ακριβώς εκείνα τα γραφήματα για τα οποία καμία κορυφή δεν είναι άκρο ενός P_4 στο γράφημα και ταυτόχρονα δεν είναι μέση-κορυφή ενός P_4 στο γράφημα. Τα διχοτομίσιμα γραφήματα είναι superbrittle γραφήματα καθώς σε ένα διχοτομίσιμο γράφημα κάθε μέση-κορυφή ενός P_4 βρίσκεται στην κλίκα και κάθε άκρο ενός P_4 βρίσκεται στο ανεξάρτητο σύνολο. Στην εργασία [16] δόθηκε ένας δομικός χαρακτηρισμός των superbrittle γραφημάτων που οδήγησε σε έναν γραμμικό αλγόριθμο αναγνώρισης. Δείχνουμε το ακόλουθο θεώρημα για την κλάση των superbrittle γραφημάτων.

Θεώρημα 1.9 (Θεώρημα 5.5 [16]). *Ένα γράφημα G είναι superbrittle εάν και μόνο εάν κάθε μια από της p-συνεκτικές συνιστώσες H του γραφήματος G έχει τις ακόλουθες ιδιότητες: (i) κάθε ομογενές σύνολο (homogeneous set) στην συνιστώσα H επάγει ένα P_4-free γράφημα, και (ii) το χαρακτηριστικό γράφημα H^* είναι ένα διχοτομίσιμο γράφημα.*

1.5 Κίνητρο Μελέτης των Ερευνητικών Θεμάτων

Όπως αναφέραμε προηγουμένως, οι κλάσεις των γραφημάτων που μελετάμε ανήκουν στην οικογένεια των τέλειων γραφημάτων. Η κλάση των τέλειων γραφημάτων επιλέχθηκε λόγω των σημαντικών δομικών χαρακτηριστικών και των αλγοριθμικών ιδιοτήτων που διαθέτουν τα γραφήματα αυτά, και οι οποίες οδηγούν σε πολυωνυμικού χρόνου αλγορίθμους επίλυσης πολλών κλασικών προβλημάτων βελτιστοποίησης, τα οποία στην γενική περίπτωση είναι NP-πλήρη. Τέτοια κλασικά προβλήματα βελτιστοποίησης είναι το πρόβλημα χρωματισμού (coloring), επικάλυψης με μονοπάτια (path cover), η εύρεση διαδρομών και κύκλων Hamilton, και πρόβλημα απαρίθμησης σκελετικών δέντρων. Οι εφαρμογές αυτών των προβλημάτων βελτιστοποίησης είναι πολλαπλές, σημαντικές, και καλύπτουν πολλά πεδία διαφορετικών επιστημών (από τα μαθηματικά έως την φιλοσοφία)[9, 47].

Επίσης, η δενδρική αναπαράσταση για ειδικά γραφήματα, μεταξύ άλλων δομών, αποτελεί συχνά την βάση για γρήγορες λύσεις σε αλγοριθμικά προβλήματα που είναι, στην γενική τους μορφή, δύσκολα. Πολλές κλάσεις γραφημάτων έχουν μια μοναδική δενδρική αναπαράσταση, που βασίζεται σε μια γενική αντιμετώπιση, γνωστή ως m-αποσύνθεση (modular decomposition) γραφημάτων. Χρησιμοποιώντας δενδρική αναπαράσταση, πολλά προβλήματα αναγνώρισης, βελτιστοποίησης και απαρίθμησης μπορούν να επιλυθούν αποτελεσματικά για πολλές κατηγορίες γραφημάτων.

Πιο συγκεκριμένα, για τις κλάσεις των γραφημάτων που μελετάμε έχουν επιλυθεί πολλά προβλήματα όπως: το μέγιστο μέγεθος κλίκας (maximum size clique), το μέγιστο μέγεθος ανεξάρτητου συνόλου (maximum size stable set), ο χρωματισμός (minimum coloring), η ελάχιστη κλίκα επικάλυψης (minimum clique cover), η ελάχιστη τριγωνοποίηση (ελάχιστο πλήθος ακμών που πρέπει να προστεθεί στο γράφημα G έτσι ώστε το γράφημα G να γίνει τριγωνικό – minimum fill-in) (δείτε [40, 61, 63]), ο αριθμός επικάλυψης με μονοπάτια (path cover number) [39], η τάξη των κορυφών (vertex ranking) και η λίστα χρωμάτων (list coloring) [4].

Επιπλέον, όπως δείχνουμε στην συνέχεια, στα Κεφάλαια 2–6, ενδιαφερόμαστε για την εύρεση τύπων για το πλήθος των σκελετικών δέντρων σε ένα γράφημα G. Το πλήθος των σκελετικών δέντρων ενός γραφήματος G, που συμβολίζεται με $\tau(G)$, είναι μια σημαντική και με ιδαίτερη μελέτη, ποσότητα στην θεωρία γραφημάτων και εμφανίζεται σε ποικίλες εφαρμογές. Οι πιο αξιοσημείωτες περιοχές των εφαρμογών της είναι η αξιοπιστία δικτύων (network reliability)[25, 84, 99], η απαρίθμηση συγκεκριμένων χημικών στοιχείων (enumerating certain chemical isomers) [20], και η απαρίθμηση των Eulerian κύκλων (circuits) σε ένα γράφημα [47]. Επίσης, μπορεί κανείς να μελετήσει τον τρόπο που συνδέεται η ποσότητα $\tau(G)$ και, πιο συγκεκριμένα, η μεθοδολογία που υπολογίζουμε την ποσότητα $\tau(G)$ με την τριγωνοποίηση (minimal triangulation) ενός γραφήματος [37, 98, 49] και με προβλήματα που εμφανίζονται στην περιοχή της σχεδίασης γραφημάτων (graph drawing) [44, 48, 81].

Επιπρόσθετα, στο Κεφάλαιο 7 παρουσιάζουμε έναν πλήρη δυναμικό αλγόριθμο αναγνώρισης των P_4-sparse γραφημάτων. Το κίνητρο μελέτης των δυναμικών αλγορίθμων προέρχεται από την φυσική αναπαράσταση του DNA (physical mapping of DNA) [21, 50] και από την μελέτη προβλημάτων σε ένα ασύρματο (δυναμικά μεταβαλλόμενο) δίκτυο υπολογιστών [34, 51, 56, 101]. Τέλος στο Κεφάλαιο 8 επιλύουμε με έναν βέλτιστο τρόπο το πρόβλημα της επικάλυψης με μονοπάτια για την κλάση των γραφημάτων σε ένα παράλληλο περιβάλλον. Η αναφορά της επικάλυψης με μονοπάτια έχει μελετηθεί από πολλούς ερευνητές (δείτε [58, 72, 73, 85, 88]), καθώς αποτελεί γενίκευση του προβλήματος της εύρεσης ενός Hamilton μονοπατιού ενός γραφήματος.

Κεφάλαιο 2

Απαρίθμηση Σκελετικών Δέντρων Quasi-Threshold Γραφημάτων

2.1 Εισαγωγή

Θεωρούμε πεπερασμένα μη-κατευθυνόμενα γραφήματα χωρίς πολλαπλές ακμές. Έστω ένα τέτοιο γράφημα G με n κορυφές. Ένα *σκελετικό δέντρο* (spanning tree) του γραφήματος G είναι ένα άκυκλο $(n-1)$-ακμών συνεκτικό υπογράφημά του. Το πρόβλημα υπολογισμού του πλήθους των σκελετικών δέντρων είναι ένα σημαντικό ευρέως γνωστό πρόβλημα στην θεωρία γραφημάτων. Η εξαγωγή μαθηματικών τύπων για διαφορετικούς τύπους γραφημάτων μπορεί να αποδειχθεί χρήσιμη για τον προσδιορισμό εκείνων των γραφημάτων που περιέχουν το μέγιστο πλήθος σκελετικών δέντρων. Τέτοιου είδους μελέτη έχει πρακτικές εφαρμογές στην αξιοπιστία δικτύων υπολογιστών (network reliability) [84, 99].

Επομένως, τόσο για θεωρητικούς όσο και για πρακτικούς λόγους, ενδιαφερόμαστε για την εξαγωγή τύπων για το πλήθος σκελετικών δέντρων σε κλάσεις γραφημάτων. Πολλές περιπτώσεις έχουν εξεταστεί ανάλογα με την περίπτωση του γραφήματος G. Έχει μελετηθεί όταν το γράφημα G είναι ένα επιγραφόμενο μοριακό γράφημα (labelled molecular graph) [20], όταν το γράφημα G είναι ένα πλήρες πολυμερή γράφημα (complete multipartite graph) [107], όταν το γράφημα G είναι ένα κυκλικό γράφημα (circulant graph) [109], όταν το γράφημα G είναι ένας κυβικός και τετραδικός κύκλος (cubic-quadruple cycle graph) [108], όταν το γράφημα G είναι ένα threshold γράφημα [46] και άλλες πολλές περιπτώσεις (δείτε το βιβλίο του Berge [9] για μια έκθεση των βασικών αποτελεσμάτων· δείτε επίσης [24, 67, 93, 91, 94, 100, 106, 107]).

Ο σκοπός της συγκεκριμένης ενότητας είναι να μελετήσει το πρόβλημα εύρεσης του πλήθους των σκελετικών δέντρων στην κλάση των ***quasi-threshold*** γραφημάτων. Σημειώνουμε εδώ ότι ένα γράφημα G ονομάζεται quasi-threshold γράφημα εάν δεν περιέχει κανένα επαγώμενο υπογράφημα ισομορφικό με ένα P_4 ή C_4 [43, 86, 91]. Ένα quasi-threshold γράφημα G έχει μια μοναδική δενδρική αναπαράσταση $T_c(G)$ που ονομάζεται cent-δέντρο (cent-tree). Οι αποδείξεις μας βασίζονται σε ένα κλασικό αποτέλεσμα, γνωστό ως το *Θεώρημα του Πίνακα-Δέντρου, Kirchhoff*, (Kirchhoff Matrix Tree Theorem) [10, 47], που εκφράζει το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος G ως μια συνάρτηση της ορίζουσας ενός πίνακα (Kirchhoff Πίνακα) ο οποίος μπορεί να κατασκευαστεί εύκολα από την σχέση γειτνίασης (πίνακας γειτνίασης, λίστα γειτνίασης, κτλ.) του γραφήματος G. Ο υπολογισμός της ορίζουσας του Kirchhoff Πίνακα φαίνεται ότι είναι μια πολλά-υποσχόμενη κατεύθυνση για τον υπολογισμό των σκελετικών δέντρων σε οικογένειες γραφημάτων (δείτε [9, 24, 41, 93, 107]). Στην περίπτωσή μας υπολογίζουμε το πλήθος των σκελετικών δέντρων ενός quasi-threshold γραφήματος G, χρησιμοποιώντας κλασικές τεχνικές από την γραμμική άλγεβρα και την θεωρία πινάκων. Οι ιδέες μας και οι τεχνικές μας θα διατυπωθούν και θα διευκρινιστούν στην συνέχεια.

Το κεφάλαιο είναι οργανωμένο ως εξής. Στην δεύτερη ενότητα εδραιώνουμε την σημειογραφία και την ορολογία μας και παρουσιάζουμε προηγούμενα αποτελέσματα. Συγκεκριμένα, δείχνουμε δομικές ιδιότητες των quasi-threshold γραφημάτων και ορίζουμε μια μοναδική δενδρική αναπαράσταση σε τέτοιου είδους γραφήματα. Στην τρίτη ενότητα παρουσιάζουμε τον τύπο που υπολογίζει το πλήθος των σκελετικών δέντρων ενός quasi-threshold γραφήματος. Τέλος, στην τέταρτη ενότητα συνοψίζουμε το κεφάλαιο και παραθέτουμε πιθανές μελλοντικές επεκτάσεις.

2.2 Quasi-threshold Γραφήματα

Ένα γράφημα G ονομάζεται *quasi-threshold* γράφημα , ή *QT-γράφημα* για συντομία, εάν το γράφημα G δεν έχει κανένα επαγώμενο υπογράφημα ισομορφικό με ένα P_4 ή με ένα C_4 [43, 86, 91]. Στη συνέχεια παραθέτουμε χαρακτηρισμούς και δομικές ιδιότητες των QT-γραφημάτων και δείχνουμε ότι ένα τέτοιο γράφημα έχει μια μοναδική δενδρική αναπαράσταση. Το ακόλουθο λήμμα έπεται απ' ευθείας από το γεγονός ότι για κάθε υποσύνολο $S \subset V(G)$ και για κάθε κορυφή $u \in S$, έχουμε ότι $N_{G[S]}[u] = N[u] \cap S$ και το γράφημα $G[V(G) - S]$ είναι ένα επαγώμενο υπογράφημα.

Λήμμα 2.1 ([66]). *Εάν το γράφημα G είναι ένα QT-γράφημα, τότε για κάθε υποσύνολο $S \subset V(G)$, και τα δύο γραφήματα $G[S]$ και $G[V(G) - S]$ είναι επίσης QT-γραφήματα.*

Το ακόλουθο θεώρημα παρέχει σημαντικές ιδιότητες για την κλάση των QT-γραφημάτων. Για ευκολία, ορίζουμε το ακόλουθο σύνολο ως,

$$cent(G) = \{x \in V(G) \mid N[x] = V(G)\}.$$

Θεώρημα 2.1 ([66, 86]). *Οι ακόλουθες τρεις δηλώσεις ισχύουν.*

(i) Ένα γράφημα G είναι ένα QT-γράφημα εάν και μόνο εάν για κάθε συνεκτικό υπογράφημα $G[S], S \subseteq V(G)$, ικανοποιείται $cent(G[S]) \neq \emptyset$.

(ii) Ένα γράφημα G είναι ένα QT-γράφημα εάν και μόνο εάν το γράφημα $G[V(G) - cent(G)]$ είναι ένα QT-γράφημα.

(iii) Έστω G ένα συνεκτικό QT-γράφημα. Εάν ισχύει $V(G) - cent(G) \neq \emptyset$, τότε το γράφημα $G[V(G) - cent(G)]$ περιέχει τουλάχιστον δύο συνεκτικές συνιστώσες.

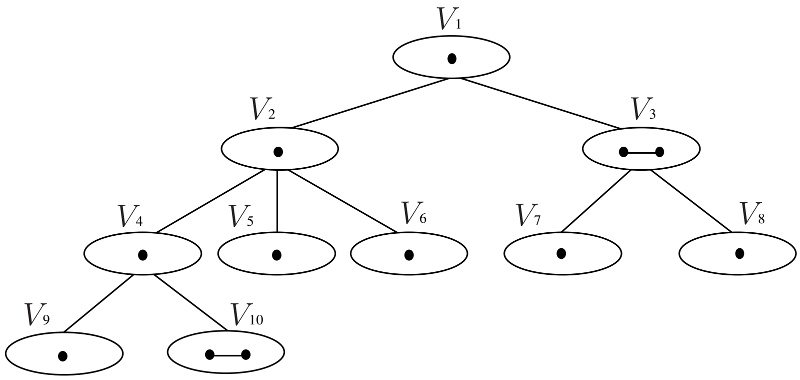
Έστω ένα γράφημα G να είναι ένα συνεκτικό QT-γράφημα. Τότε το σύνολο $V_1 := cent(G)$ δεν είναι κενό από το Θεώρημα 2.1. Θέσε $G_1 := G$, και $G[V(G)-V_1] = G_2 \cup G_3 \cup \ldots \cup G_r$, όπου το G_i είναι μια συνεκτική συνιστώσα του γραφήματος $G[V(G)-V_1]$ και $r \geq 3$. Τότε, εφόσον κάθε ένα G_i είναι ένα επαγώμενο υπογράφημα του γραφήματος G, το γράφημα G_i είναι επίσης ένα QT-γράφημα, και επομένως έστω $V_i := cent(G_i) \neq \emptyset$ για $2 \leq i \leq r$. Εφόσον κάθε μια συνεκτική συνιστώσα του γραφήματος $G_i[V(G_i) - cent(G_i)]$ είναι επίσης ένα QT-γράφημα, μπορούμε να συνεχίσουμε την συγκεκριμένη διαδικασία έως ότου να πάρουμε ένα κενό γράφημα. Τότε μπορούμε τελικά να αποκτήσουμε την ακόλουθη διαμέριση του συνόλου κορυφών $V(G)$.

$$V(G) = V_1 + V_2 + \ldots + V_k, \quad \text{όπου } V_i = cent(G_i).$$

Επιπλέον μπορούμε να ορίσουμε μια μερική διάταξη $\preceq$ στο σύνολο $\{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ ως εξής:

$$V_i \preceq V_j \ \text{ εάν } \ V_i = cent(G_i) \ \text{ και } \ V_j \subseteq V(G_i).$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι η προηγούμενη διαμέριση του συνόλου κορυφών $V(G)$ κατέχει τις ακόλουθες ιδιότητες.



Σχήμα 2.1: Το cent-δέντρο $T_c(Q)$ ενός QT-γραφήματος με 12 κορυφές.

Θεώρημα 2.2 ([66, 86]). *Έστω G ένα συνεκτικό QT-γράφημα, και έστω $V(G) = V_1+V_2+\ldots+V_k$ να είναι μια διαμέριση ορισμένη όπως προηγουμένως· συγκεκριμένα, $V_1 := cent(G)$. Τότε, αυτή η διαμέριση και η μερικής διάταξη συνόλου $(\{V_i\}, \preceq)$ έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(P1) Εάν ισχύει $V_i \preceq V_j$, τότε κάθε κορυφή του συνόλου V_i και κάθε κορυφή του συνόλου V_j ενώνονται μεταξύ τους με μια ακμή του γραφήματος G.

(P2) Για κάθε σύνολο V_j, ισχύει $cent(G[\{\cup V_i \mid V_i \preceq V_j\}]) = V_j$.

(P3) Για κάθε δύο σύνολα V_s και V_t τέτοια ώστε $V_s \preceq V_t$, $G[\{\cup V_i \mid V_s \preceq V_i \preceq V_t\}]$ είναι ένα πλήρες γράφημα. Επιπλέον, για κάθε μέγιστο σοιχείο V_t του συνόλου $(\{V_i\}, \preceq)$, $G[\{\cup V_i \mid V_1 \preceq V_i \preceq V_t\}]$ είναι ένα μέγιστο πλήρες υπογράφημα του γραφήματος G.

Τα αποτελέσματα του Θεωρήματος 2.2 παρέχουν δομικές ιδιότητες για την κλάση των QT-γραφημάτων. Θα αναφερόμαστε στην δομή που ικανοποιεί τις ιδιότητες του Θεωρήματος 2.2 ως *cent-δέντρο* του γραφήματος G και θα το συμβολίζουμε ως $T_c(G)$. Το cent-δέντρο είναι ένα ριζωμένο δέντρο με ρίζα το V_1· κάθε κόμβος V_i του δέντρου $T_c(G)$ είναι είτε φύλλο ή έχει τουλάχιστον δύο παιδιά. Επιπλέον, $V_s \preceq V_t$ εάν και μόνο εάν V_s είναι ένας πρόγονος του V_t στο δέντρο $T_c(G)$. Εδώ, ορίζουμε το $\mathrm{ch}(V_i)$ να είναι το σύνολο που περιέχει τα παιδιά του κόμβου $V_i \in T_c(G)$· θα χρησιμοποιήσουμε το σύνολο $\mathrm{ch}(i)$ για να αναφερόμαστε στο σύνολο $\mathrm{ch}(V_i)$, $1 \leq i \leq k$.

Στο Σχήμα 2.1 παρουσιάζουμε ένα cent-δέντρο ενός QT-γραφήματος με 12 κορυφές. Οι κόμβοι V_3 και V_{10} περιέχουν δύο κορυφές, ενώ όλοι οι υπόλοιποι περιέχουν μια κορυφή· $\mathrm{ch}(V_3) = \{V_7, V_8\}$ και $\mathrm{ch}(V_{10}) = \emptyset$. Σημειώστε ότι ο βαθμός μιας κορυφής στον κόμβο V_3 είναι 4.

2.3 Το Πλήθος των Σκελετικών Δέντρων των Quasi-Threshold Γραφημάτων

Σε αυτήν την ενότητα εξάγουμε ένα τύπο για το πλήθος των σκελετικών δέντρων ενός QT-γραφήματος G· από εδώ και στο εξής, $\tau(G)$ δηλώνει το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος G.

Έστω ένα QT-γράφημα G με n κορυφές και έστω $V_1, V_2, \ldots, V_k$ οι κόμβοι του cent-δέντρου $T_c(G)$ που περιέχουν $n_1, n_2, \ldots, n_k$ κορυφές, αντίστοιχα· δηλαδή, $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$. Έστω d_i να δηλώνει τον βαθμό μιας τυχαίας κορυφής του κόμβου V_i. Υπενθυμίζουμε ότι όλες οι κορυφές $u \in V(G)$ ενός κόμβου V_i έχουν τον ίδιο βαθμό.

Έστω $V_1, V_2, \ldots, V_k$ οι κόμβοι του cent-δέντρου $T_c(G)$ ενός QT-γραφήματος με n κορυφές. Συμβολίζουμε με L_i το σύνολο που περιέχει τους κόμβους του i επιπέδου του δέντρου $T_c(G)$, $1 \le i \le h$ · δηλαδή,

$$\begin{aligned} L_0 &= \{V_1\}, \\ L_1 &= \{V_2, V_3, \ldots, V_r\}, \\ &\vdots \\ L_{h-1} &= \{V_s, V_{s+1}, \ldots, V_{\ell-1}\}, \\ L_h &= \{V_\ell, V_{\ell+1}, \ldots, V_k\}. \end{aligned}$$

2.3.1 Ο Τύπος

Στη συνέχεια σχηματίζουμε τον Kirhhoff πίνακα K για το QT-γράφημα G βασιζόμενοι στην δομή του cent-δέντρου $T_c(G)$.

Έστω G ένα QT-γράφημα με n κορυφές και έστω $V_1, \ldots, V_s, \ldots, V_{\ell-1}, V_\ell, \ldots, V_k$ να είναι οι κόμβοι του cent-δέντρου $T_c(G)$. Τότε, επιγράφουμε τις κορυφές του γραφήματος G από 1 μέχρι n ως εξής: πρώτα, επιγράφουμε τις κορυφές του κόμβου V_k από 1 μέχρι n_k· στη συνέχεια, επιγράφουμε τις κορυφές του V_{k-1} από $n_k + 1$ μέχρι $n_k + n_{k-1}$· τέλος, επιγράφουμε τις κορυφές του κόμβου V_1.

Τότε, κατασκευάζουμε τον πίνακα K του QT-γραφήματος G, χρησιμοποιώντας την προαναφερθείσα επιγραφή των κορυφών του γραφήματος G, και επικεντρωνόμαστε στην ορίζουσα του πίνακα K_{nn} που αποκτάται από τον πίνακα K διαγράφοντας την τελευταία γραμμή και την τελευταία στήλη. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι ο πίνακας K_{nn} είναι ένας $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας και έχει την ακόλουθη μορφή:

$$K_{nn} = \begin{bmatrix} M_k & & & & & & & \\ & \ddots & & & & [-1]_{ji} & & \\ & & M_\ell & & & & & \\ & & & M_{\ell-1} & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & M_s & & \\ & [-1]_{ij} & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & M_1 \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

όπου M_i είναι ένας $n_i \times n_i$ υποπίνακας της μορφής

$$M_i = \begin{bmatrix} d_i & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & d_i & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & d_i \end{bmatrix},$$

για $2 \le i \le k$ και M_1 είναι ένας $(n_1 - 1) \times (n_1 - 1)$ υποπίνακας της ίδιας μορφής. Όλες οι διαγώνιες θέσεις του πίνακα M_i έχουν την ίδια τιμή d_i που ισούται με τον βαθμό μιας τυχαίας κορυφής του κόμβου $V_i \in T_c(G)$· τα στοιχεία $[-1]_{ij}$ και $[-1]_{ji}$ των μη-διαγώνιων θέσεων (i,j) και (j,i) αντιστοιχούν σε $n_i \times n_j$ και $n_j \times n_i$ υποπίνακες με όλα τα στοιχεία τους -1 εάν ο κόμβος V_j είναι ένας απόγονος του κόμβου V_i στο δέντρο $T_c(G)$ και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία τους 0, $2 \le i,\ j \le k$· τα στοιχεία $[-1]_{1,j}$ και $[-1]_{j,1}$ στις μη-διαγώνιες θέσεις $(1,j)$ και $(j,1)$ αντιστοιχούν σε $(n_1-1) \times n_j$ και $n_j \times (n_1-1)$ υποπίνακες με όλα τα στοιχεία τους -1 εφόσον κάθε κόμβος V_j είναι απόγονος της ρίζας V_1 του cent-δέντρου $T_c(G)$.

Με σκοπό να υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα K_{nn}, πρώτα απλοποιούμε τις ορίζουσες των πινάκων M_i, $2 \le i \le k$, και θα έχουμε:

$$\det(M_i) = \begin{vmatrix} d_i+1 & & & \\ & d_i+1 & & \\ & & \ddots & \\ -1 & -1 & & d_i+1-n_i \end{vmatrix} = (d_i+1)^{n_i-1}(d_i-(n_i-1)),$$

και

$$det(M_1) = (d_1+1)^{n_1-2}(d_1-(n_1-2)).$$

Τώρα επαρκεί να αντικαταστήσουμε τις παραπάνω τιμές στην ορίζουσα του πίνακα K_{nn}. Σημειώνουμε ότι μετά την απλοποίηση των οριζουσών των πινάκων M_i μόνο οι διαγώνιες θέσεις και η τελευταία γραμμή από κάθε πίνακα M_i έχουν μη-μηδενικές τιμές. Έτσι, θα έχουμε:

$$\det(K_{nn}) = (n_1-1)(d_1+1)^{n_1-2} \cdot \prod_{i=2}^{k} n_i(d_i+1)^{n_i-1} \cdot \det(B_{nn}), \tag{2.2}$$

όπου

$$B_{nn} = \begin{bmatrix} \sigma_k & & & & & & & \\ & \ddots & & & & (-1)_{ji} & & \\ & & \sigma_\ell & & & & & \\ & & & \sigma_{\ell-1} & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \sigma_s & & \\ & (-1)_{ij} & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \sigma_1 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

είναι ένας $k \times k$ πίνακας με διαγώνια στοιχεία $\sigma_i = \frac{d_i-(n_i-1)}{n_i}$ για $2 \le i \le k$, και $\sigma_1 = \frac{d_1-(n_1-2)}{n_1-1}$· τα στοιχεία $(-1)_{ij}$ των μη-διαγώνιων θέσεων (i,j) είναι -1 εάν ο κόμβος V_j είναι ένας απόγονος του κόμβου V_i στο δέντρο $T_c(G)$ και 0 σε κάθε άλλη περίπτωση.

Η ιδέα τώρα είναι να υπολογίσουμε την ορίζουσα του $k \times k$ πίνακα B_{nn}. Σε αυτό το σημείο, πρώτα εφαρμόζουμε τις ακόλουθες πράξεις σε κάθε γραμμή $i = 1, 2, \ldots, k$ του πίνακα B_{nn}:

- βρίσκουμε τον ελάχιστο δείκτη j για τον οποίο ισχύουν $i < j \leq k$ και $B_{nn}[i, j] \neq 0$, και τότε
- πολλαπλασιάζουμε την στήλη j με -1 και την προσθέτουμε στην στήλη ℓ εάν $B_{nn}[i, \ell] = B_{nn}[i, j]$ και $j + 1 \leq \ell \leq k$.

Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε παρόμοιες πράξεις σε κάθε στήλη $j = 1, 2, \ldots, k$ του πίνακα B_{nn}:

- βρίσκουμε τον ελάχιστο δείκτη i για τον οποίο ισχύουν $1 \leq j < i$ και $B_{nn}[i, j] \neq 0$, και τότε
- πολλαπλασιάζουμε την γραμμή i με -1 και την προσθέτουμε στην γραμμή ℓ εάν $B_{nn}[\ell, j] = B_{nn}[i, j]$ και $i + 1 \leq \ell \leq k$.

Έτσι, θα έχουμε:

$$\det(B_{nn}) = \det(A_{nn}), \tag{2.4}$$

όπου

$$A_{nn} = \begin{bmatrix} a_k & & & & & & & \\ & \ddots & & & & (\gamma)_{ji} & & \\ & & a_\ell & & & & & \\ & & & a_{\ell-1} & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & a_s & & \\ & (\gamma)_{ij} & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & a_1 \end{bmatrix}, \tag{2.5}$$

είναι ένας $k \times k$ πίνακας και

$$a_i = \begin{cases} \sigma_i & \text{εάν } V_i \text{ είναι φύλλο του δέντρου } \ T_c(G), \\ \sigma_i + \displaystyle\sum_{\substack{j \in ch(i) \\ j \text{δεν είναι φύλλο}}} (\sigma_j + 2) & \text{αλλιώς,} \end{cases} \tag{2.6}$$

και

$$(\gamma)_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{εάν } V_j \in ch(V_i) \text{ και } V_j \text{ είναι φύλλο του δέντρου } T_c(G), \\ -(\sigma_i + 1) & \text{if } V_j \in ch(V_i) \text{ and } V_j \text{ δεν είναι φύλλο του δέντρου } T_c(G), \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases} \tag{2.7}$$

Υπενθυμίζουμε ότι

$$\sigma_i = \begin{cases} \dfrac{d_i - (n_i - 2)}{n_i - 1} & \text{εάν } i = 1 \\ \\ \dfrac{d_i - (n_i - 1)}{n_i} & \text{αλλιώς.} \end{cases} \tag{2.8}$$

Στην περίπτωση που κάθε κόμβος του cent-δέντρου $T_c(G)$ περιέχει μια μοναδική κορυφή, τότε θα έχουμε ότι $\sigma_i = d_i$ για κάθε $i = 2, 3, \ldots, k$· σημειώνουμε ότι $i \geq 2$, εφόσον διαγράφουμε την τελευταία γραμμή και στήλη του πίνακα K.

Στη συνέχεια ορίζουμε την ακόλουθη συνάρτηση ϕ πάνω στους κόμβου του cent-δέντρου ενός QT-γραφήματος G:

$$\phi(i) = \begin{cases} a_i & \text{εάν } V_i \text{ είναι φύλλο του δέντρου } T_c(G), \\ \\ a_i - \displaystyle\sum_{j \in ch(i)} \frac{((\gamma)_{ij})^2}{\phi(j)} & \text{αλλιώς,} \end{cases} \tag{2.9}$$

όπου a_i και $(\gamma)_{ij}$ έχουν οριστεί στις Εξισώσεις (2.6) και (2.7), αντίστοιχα. Ονομάζουμε την συνάρτηση $\phi(i)$ *cent-συνάρτηση* του κόμβου V_i· από εδώ και στο εξής, χρησιμοποιούμε την ορολογία ϕ_i για να δηλώσουμε $\phi(i)$, $1 \leq i \leq k$.

Λήμμα 2.2. *Έστω $V_1, V_2, \ldots, V_k$ οι κόμβοι του cent-δέντρου $T_c(G)$ ενός QT-γραφήματος G και έστω $\phi(i)$ η cent-συνάρτηση του κόμβου V_i, $1 \leq i \leq k$. Τότε,*

$$\prod_{i=1}^{k} \phi(i) = det(A_{nn}),$$

όπου A_{nn} είναι ο $k \times k$ πίνακας ορισμένος στην Εξ. (2.5).

Απόδειξη. Με σκοπό τον υπολογισμό της ορίζουσας $\det(A_{nn})$, ξεκινάμε πολλαπλασιάζοντας κάθε στήλη i, $1 \leq i \leq \ell$, του πίνακα A_{nn} με $-(\gamma)_{ij}/a_i$ και την προσθέτουμε στην στήλη j εάν $(\gamma)_{ij} \neq 0$ $(i < j \leq k)$. Με αυτόν τον τρόπο, κάνουμε όλες τις αυστηρά άνω διαγώνιες θέσεις $(\gamma)_{ij}$, με $i < j$, να έχουν μηδενικές τιμές. Τώρα αναπτύσσουμε ως προς τις γραμμές $1, 2, \ldots, \ell$, πετυχαίνοντας

$$\det(A_{nn}) \;=\; \prod_{i=1}^{\ell} \phi_i \;\cdot\; \begin{vmatrix} f_{\ell-1} & & & & \\ & \ddots & & & (\gamma)_{ji} \\ & & f_s & & \\ & (\gamma)_{ij} & & \ddots & \\ & & & & f_1 \end{vmatrix} \;=\; \prod_{i=1}^{\ell} \phi_i \;\cdot\; det(D_{nn}),$$

όπου

$\phi_i = a_i$, για $1 \leq i \leq \ell$, αφού οι κόμβοι $1, 2, \ldots, \ell$ είναι φύλλα στο δέντρο $T_c(G)$, και

$$f_t = a_t - \sum_{\substack{i \in ch(t) \\ 1 \leq i \leq \ell}} \frac{((\gamma)_{it})^2}{\phi_i}, \quad \text{για } \ell + 1 \leq t \leq k.$$

Παρατηρούμε ότι ο $(k-\ell) \times (k-\ell)$ πίνακας D_{nn} έχει δομή παρόμοια με τον αρχικό πίνακα A_{nn}· δείτε Εξ. 2.5. Έτσι, για τον υπολογισμό της ορίζουσάς του $\det(D_{nn})$, ακολουθούμε μια παρόμοια απλοποίηση· δηλαδή, ξεκινάμε πολλαπλασιάζοντας κάθε στήλη i, $1 \leq i \leq s$, του πίνακα D_{nn} με $-(\gamma)_{ij}/f_j$ και την προσθέτουμε στην στήλη j εάν $(\gamma)_{ij} \neq 0$, για $s < j \leq k$. Έτσι, συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο μπορούμε τελικά να δείξουμε ότι

$$\det(D_{nn}) = \prod_{i=1}^{k} \phi_i,$$

όπου ϕ_i είναι η cent-συνάρτηση του κόμβου $V_i \in T_c(G)$ και k είναι το πλήθος των κόμβων του cent-δέντρου $T_c(G)$. ∎

Βασιζόμενοι στις Εξ. (2.2), (2.4) και στο Λήμμα 2.2 μπορούμε να αποκτήσουμε έναν τύπο για το πλήθος των σκελετικών δέντρων $\tau(G)$ ενός quasi-threshold γραφήματος G. Επομένως, καταλήγουμε στο ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 2.3. *Έστω G ένα quasi-threshold γράφημα με n κορυφές και έστω $V_1, V_2, \ldots, V_k$ οι κόμβοι του cent-δέντρου $T_c(G)$ με ριζα τον κόμβο V_1. Τότε,*

$$\tau(G) = \frac{n_1 - 1}{n_1(d_1+1)} \cdot \prod_{i=1}^{k} n_i(d_i+1)^{n_i-1} \cdot \phi_i,$$

όπου n_i είναι το πλήθος των κορυφών του κόμβου V_i, d_i είναι ο βαθμός μιας τυχαίας κορυφής από τον κόμβο V_i και ϕ_i είναι η cent-συνάρτηση του κόμβου V_i, $1 \leq i \leq k$.

Σημείωση 2.1. Βασιζόμενοι στο προηγούμενο αποτέλεσμα, προτείνουμε έναν γραμμικό αλγόριθμο υπολογισμού του πλήθους των σκελετικών δέντρων ενός QT-γραφήματος· δουλεύει ως εξής: πρώτα κατασκευάζει το cent-δέντρο $T_c(G)$ του quasi-threshold γραφήματος· έστω $V_1, V_2, \ldots, V_k$ οι κόμβοι του cent-δέντρου $T_c(G)$. Τότε υπολογίζει την cent-συνάρτηση ϕ_i για κάθε κόμβο $V_i \in T_c(G)$, $1 \leq i \leq k$, και, τελικά, υπολογίζει το πλήθος των σκελετικών δέντρων ενός quasi-threshold γραφήματος σύμφωνα με τον τύπο του Θεωρήματος 2.3.

Σημειώνουμε ότι το πλήθος των σκελετικών δέντρων ενός QT-γραφήματος G με n κορυφές και m ακμές μπορεί να υπολογιστεί σε $O(n+m)$ χρόνο. Η κατασκευή ενός cent-δέντρου $T_c(G)$ χρειάζεται $O(n+m)$ χρόνο χρησιμοποιώντας μια DFS διάσχιση στο συγκεκριμένο QT-γράφημα. Επιπλέον, ο υπολογισμός όλων των cent-συναρτήσεων ϕ_i, $1 \leq i \leq k$, μπορεί να εκτελεστεί σε $O(n)$ χρόνο, αφού το πλήθος των κόμβων του cent-δέντρου $T_c(G)$ είναι $k \leq n$. Έτσι, ο προτεινόμενος αλγόριθμος τρέχει σε $O(n+m)$ χρόνο.

Η πολυπλοκότητα χρόνου κρίνεται σύμφωνα με το ομοιόμορφο κριτήριο κόστους (uniform cost criterion). Κάτω από αυτό το κριτήριο κάθε εντολή χρειάζεται μια μονάδα χρόνου και κάθε καταχωρητής χρειάζεται μία μονάδα χώρου. Παρά το γεγονός ότι οι αριθμητικές πράξεις μπορεί να εμπλέκουν μεγάλου μήκους τυχαίους ακέραιους αριθμούς, μετράμε κάθε πράξη ως ένα και μόνο βήμα (το πλήθος των σκελετικών δέντρων ενός γραφήματος G με n κορυφές μπορεί να είναι το πολύ n^{n-2}· το πλήρες γράφημα K_n έχει n^{n-2} σκελετικά δέντρα). □

2.4 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο έχουμε εξάγει έναν τύπο για το πλήθος των σκελετικών δέντρων ενός quasi-threshold γραφήματος χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Πίνακα-Δέντρου, Kirchhoff και επωφελούμενοι από τις δομικές ιδιότητες του cent-δέντρου ενός quasi-threshold γραφήματος.

Μια άλλη κλάση τέλειων γραφημάτων, γνωστή ως συμπληρωματικά-παραγώμενα γραφήματα (cographs) , είναι ακριβώς εκείνα τα γραφήματα που δεν περιέχουν κανένα άχορδο μονοπάτι τεσσάρων κορυφών (συμβολίζεται ως P_4). Στην εργασία [92] και στο επόμενο κεφάλαιο, θα δείξουμε έναν γραμμικό αλγόριθμο που υπολογίζει το πλήθος των σκελετικών δέντρων που βασίζεται σε ένα μοναδικό ριζωμένο δέντρο, που ονομάζεται cotree.

Πιο γενικές κλάσεις τέλειων γραφημάτων όπως είναι οι κλάσεις των P_4-reducible και των P_4-sparse γραφημάτων, επιδέχονται επίσης μια μοναδική δενδρική αναπαράσταση. Έτσι, είναι λογικό και επόμενο να αναρωτηθεί κανείς εάν οι δομικές ιδιότητες αυτών των δενδρικών αναπαραστάσεων μπορούν να βοηθήσουν στην εξαγωγή τύπων που σχετίζονται με το πλήθος των σκελετικών δέντρων τους. Προς αυτή την κατεύθυνση σχεδιάστηκε ο αλγόριθμος που δείχνουμε στο Κεφάλαιο 4.

Έχει αποδειχτεί ότι ένα μεταθετό (permutation) γράφημα $G[\pi]$, μια ευρέως γνωστή κλάση τέλειων γραφημάτων, μπορεί να μετασχηματιστεί σε ένα κατευθυνόμενο άκυκλο γράφημα και, έπειτα, σε ένα ριζωμένο δέντρο εξετάζοντας την αντίστροφη σχέση των στοιχείων της μετάθεσης π [87]. Βασιζόμενος κανείς σε αυτά τα αποτελέσματα, μπορεί να ερευνηθεί εάν η κλάση των μεταθετών γραφημάτων $G[\pi]$ ανήκει στην οικογένεια των γραφημάτων που επιδέχονται τύπους για το πλήθος των σκελετικών δέντρων τους.

Κεφαλαιο 3

Υπολογισμος του Πληθους των Σκελετικων Δεντρων των Συμπληρωματικα-Παραγομενων Γραφηματων

3.1 Εισαγωγή

Θεωρούμε πεπερασμένα μη-κατευθυνόμενα γραφήματα χωρίς πολλαπλές ακμές. Έστω ένα τέτοιο γράφημα G με n κορυφές. Ένα *σκελετικό δέντρο* (spanning tree) του γραφήματος G είναι ένα άκυκλο $(n-1)$-ακμών συνεκτικό υπογράφημά του. Το πλήθος των σκελετικών δέντρων ενός γραφήματος (δικτύου) G, καλείται επίσης *πολυπλοκότητα* (complexity) του γραφήματος G [10], είναι ένα σημαντικό, ευρέως γνωστό, πρόβλημα στην θεωρία γραφημάτων και εμφανίζεται σε ένα πλήθος εφαρμογών. Οι πιο αξιοσημείωτες περιοχές εφαρμογών είναι η αξιοπιστία δικτύων (σε ένα δίκτυο που μοντελοποιείται από ένα γράφημα, η ενδοεπικοινωνία μεταξύ όλων των κόμβων του δικτύου επάγει ότι το γράφημα πρέπει να περιέχει ένα σκελετικό δέντρο· έτσι, η μεγιστοποίηση του πλήθους των σκελετικών δέντρων είναι το κλειδί για την μεγιστοποίηση της αξιοπιστίας) [84, 99], ο υπολογισμός της συνολικής αντίστασης μεταξύ μιας ακμής σε ένα ηλεκτρικό δίκτυο (electrical network) [13], απαρίθμηση συγκεκριμένων χημικών στοιχείων [20], και απαρίθμηση των Eulerian κύκλων (circuits) σε ένα γράφημα [47].

Επομένως, τόσο για θεωρητικούς όσο και για πρακτικούς σκοπούς, ενδιαφερόμαστε για την εξαγωγή μαθηματικών τύπων για τον υπολογισμό του πλήθους των σκελετικών δέντρων ενός γραφήματος G, όπως επίσης και για το K_n-συμπλήρωμα (K_n-complement) του γραφήματος G· εάν το γράφημα G είναι ένα υπογράφημα του πλήρες γραφήματος K_n, τότε το K_n-συμπλήρωμα του γραφήματος G, που συμβολίζεται με $K_n - G$, ορίζεται ως το γράφημα που αποκτάται από το γράφημα K_n διαγράφοντας τις ακμές του γραφήματος G (σημειώστε ότι, εάν το γράφημα G έχει n κορυφές, τότε το γράφημα $K_n - G$ συμπίπτει με το γράφημα $\overline{G}$, δηλ. το συμπλήρωμα του γραφήματος G). Πολλές περιπτώσεις έχουν μελετηθεί που εξαρτώνται από την επιλογή του γραφήματος G. Έχει μελετηθεί όταν το γράφημα G είναι ένα επιγραφόμενο μοριακό γράφημα (labelled molecular graph) [20], όταν το γράφημα G είναι ένα πλήρες πολυμερή γράφημα (complete multipartite graph) [107], όταν το γράφημα G είναι ένα κυκλικό γράφημα (circulant graph) [42, 109], όταν το γράφημα G είναι ένας κυβικός και τετραδικός κύκλος (cubic-quadruple cycle graph) [108], όταν το γράφημα G είναι ένα threshold γράφημα [46], όταν το γράφημα G είναι ένα quasi-threshold γράφημα [91] και άλλες πολλές περιπτώσεις (δείτε το βιβλίο του Berge [9] για μια έκθεση των βασικών αποτελεσμάτων· δείτε επίσης [24, 67, 93, 91, 94, 100, 106, 107]).

Ο σκοπός της συγκεκριμένης ενότητας είναι να μελετήσει το πρόβλημα της εύρεσης του πλήθους των σκελετικών δέντρων στην κλάση των *συμπληρωματικά-παραγώμενων* γραφημάτων (complement reducible), γνωστά ως *cographs*. Τα γραφήματα cographs είναι ορισμένα ως η κλάση των γραφημάτων που κατασκευάζονται από μια μοναδική κορυφή υπό την κλειστότητα των πράξεων της ένωσης και του συμπληρώματος. Πιο συγκεκριμένα, η κλάση των γραφημάτων cographs ορίζεται αναδρομικά ως εξής: (i) μια μοναδική κορυφή είναι ένα cograph· (ii) η μη-κοινή ένωση των cographs είναι ένα cograph· (iii) το συμπλήρωμα ενός cograph είναι ένα cograph.

Η κλάση των γραφημάτων cographs είχε εισαχθεί τις αρχές του 1970 από τον Lerchs [70] που μελέτησε τις δομικές και τις αλγοριθμικές τους ιδιότητες. Μεταξύ άλλων ιδιοτήτων, ο Lerchs έδειξε ότι η κλάση των cographs συμπίπτει με την κλάση των P_4 απαγορευτικών γραφημάτων, και ότι τα cographs επιδέχονται μια μοναδική, ως προς τον ισομορφισμό, δενδρική αναπαράσταση που ονομάζεται *cotree*. Τα cographs είναι τέλεια γραφήματα και την πραγματικότητα σχηματίζουν μια κατάλληλη υποκλάση των ευρέως γνωστών μεταθετών γραφημάτων και των distance hereditary γραφημάτων· περιέχουν την κλάση των quasi-threshold γραφημάτων και, επομένως, την κλάση των threshold γραφημάτων [18, 43]. Ακόμα περισσότερο, τα cographs είναι ακριβώς εκείνα τα γραφήματα τα οποία δεν περιέχουν κανένα επαγώμενο υπογράφημα ισόμορφο με ένα P_4 (άχορδο μονοπάτι τεσσάρων κορυφών), και σχετίζονται με την κλάση των series-parallel κατευθυνόμενων γραφημάτων [105].

Σε αυτό το κεφάλαιο επιδιώκουμε να εδραιώσουμε ιδιότητες και χαρακτηρισμούς για την κλάση των cographs που θα μας οδηγήσουν σε μια αποτελεσματική επίλυση του προβλήματος της εύρεσης του πλήθους των σκελετικών τους δέντρων. Προτείνουμε πράξεις σμίκρυνσης (μαζέματος) επάνω στα δέντρα και δείχνουμε ότι προαναφερθέν πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί αποτελεσματικά εφαρμόζοντας κατάλληλα αυτές τις πράξεις επάνω στο cotree του συγκεκριμένου cograph.

Συγκεκριμένα, παρουσιάζουμε έναν γραμμικό αλγόριθμο που καθορίζει το πλήθος των σκελετικών δέντρων ενός γραφήματος cograph· για το δοθέν cograph G με n κορυφές και m ακμές ο αλγόριθμός μας κατασκευάζει πρώτα το cotree $T_{co}(G)$ του γραφήματος G, και στη συνέχεια υπολογίζει το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος G σε $O(n+m)$ χρόνο και χώρο. Ο αλγόριθμος βασίζεται σε πράξεις σμίκρυνσης που εφαρμόζονται με συστηματικό τρόπο έτσι ώστε να μετατρέψουν το δέντρο $T_{co}(G)$ σε ένα μοναδικό κόμβο, ενώ την ίδια στιγμή, συγκεκριμένοι παράμετροι ενημερώνονται κατάλληλα· εφόσον το cotree του γραφήματος μπορεί να κατασκευαστεί σε χρόνο και χώρο γραμμικό ως προς το μέγεθος του γραφήματος [29], και εφόσον κάθε πράξη σμίκρυνσης χρειάζεται χρόνο γραμμικό ως προς το μέγεθος του επεξεργασμένου κομματιού του δέντρου, η άνω υπολογισμός χρειάζεται χρόνο και χώρο γραμμικό ως προς το μέγεθος του γραφήματος G. Στο τέλος, το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος G αποκτάται ως το γινόμενο κάποιων $n-1$ αριθμών, όπου n είναι το πλήθος των κορυφών του γραφήματος G· αυτή η επεξεργασία χρειάζεται $O(n)$ χρόνο υπό το ομοιόμορφο κόστους κριτήριο (uniform cost criterion) [3, 96].

Η ορθότητα του αλγορίθμου μας βασίζεται σε ένα ευρέως γνωστό αποτέλεσμα, το *Θεώρημα του Πίνακα-Δέντρου, Kirchhoff* (Kirchhoff Matrix Tree Theorem) [10, 47], που εκφράζει το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος G ως μια συνάρτηση της ορίζουσας ενός πίνακα (Kirchhoff Πίνακα) ο οποίος μπορεί να κατασκευαστεί εύκολα από την σχέση γειτνίασης (πίνακας γειτνίασης, λίστα γειτνίασης, κτλ.) του γραφήματος G. Αξίζει νασημειώσουμε ότι ο υπολογισμός της ορίζουσας του Kirchhoff Πίνακα φαίνεται ότι είναι μια πολλά-υποσχόμενη κατεύθυνση για τον υπολογισμό των σκελετικών δέντρων σε οικογένειες γραφημάτων (δείτε [9, 24, 41, 93, 107]), αλλά απαιτεί $\Theta(n^3)$ χρόνο και $\Theta(n^2)$ χώρο. Στην περίπτωσή μας χρησιμοποιούμε τον Kirchhoff Πίνακα μαζί με κλασικές τεχνικές από την γραμμική άλγεβρα και την θεωρία πινάκων ως ένα κατασκευαστικό εργαλείο για να αποδείξουμε την ορθότητα των αποτελεσμάτων μας.

Το κεφάλαιο είναι οργανωμένο ως εξής. Στην δεύτερη ενότητα εδραιώνουμε την σημειογραφία και την ορολογία μας και παρουσιάζουμε προηγούμενα αποτελέσματα. Στην τρίτη ενότητα προτείνουμε έναν γραμμικό αλγόριθμο που καθορίζει το πλήθος των σκελετικών δέντρων ενός cograph, ενώ στην τέταρτη ενότητα συνοψίζουμε το κεφάλαιο και παραθέτουμε πιθανές μελλοντικές επεκτάσεις.

3.2 Συμπληρωματικά-Παραγώμενα Γραφήματα – Cographs

Όπως αναφερθήκαμε προηγουμένως, ο Lerchs απέδειξε ότι τα cographs είναι η οικογένεια των γραφημάτων που κατασκευάζονται από μια μοναδική κορυφή υπό την κλειστότητα των πράξεων της ένωσης και του συμπληρώματος. Αυτές οι πράξεις ορίζουν μοναδικά μια δενδρική αναπαράσταση που αναφερόμαστε σε αυτήν ως ένα cotree. Το cotree ενός cograph G, που συμβολίζεται με $T_{co}(G)$, είναι ένα ριζωμένο δέντρο τέτοιο ώστε:

(i) κάθε εσωτερικός κόμβος, με πιθανή εξαίρεση την ρίζα, έχει τουλάχιστον δύο παιδιά·

(ii) οι εσωτερικοί κόμβοι έχουν επιγραφές είτε 0 (0-κόμβοι) ή 1 (1-κόμβοι)· τα παιδιά, που είναι εσωτερικοί κόμβοι, ενός 1-κόμβου (0-κόμβου αντίστ.) είναι 0-κόμβοι (1-κόμβοι αντιστ.), δηλαδή οι 1-κόμβοι και 0-κόμοι εναλλάσσονται μεταξύ τους σε κάθε μονοπάτι από την ρίζα μέχρι οποιονδήποτε κόμβο του cotree·

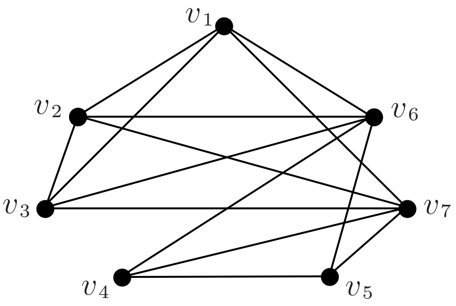
(iii) τα φύλλα του cotree έχουν μια-προς-μια αντιστοιχία με τις κορυφές του γραφήματος G, και δύο κορυφές v_i, v_j είναι γειτονικές στο γράφημα G εάν και μόνο εάν ο ελάχιστος κοινός προκάτοχος των φύλλων που αντισοιχούν στις κορυφές v_i και v_j είναι ένας 1-κόμβος.

Ο ορισμός του Lerchs απαιτεί ότι η ρίζα ενός cotree πρέπει να είναι ένας 1-κόμβος· παρ' όλα αυτά, εάν παραλείψουμε αυτόν τον περιορισμό και επιτρέψουμε η ρίζα να είναι επίσης και ένας 0-κόμβος, τότε παίρνουμε cotrees στα οποία όλοι οι εσωτερικοί κόμβοι έχουν τουλάχιστον δύο παιδιά, και στα οποία η ρίζα είναι ένας 1-κόμβος εάν και μόνο εάν το αντίστοιχο cograph είναι συνδεδεμένο (δείτε Σχήμα 3.1).

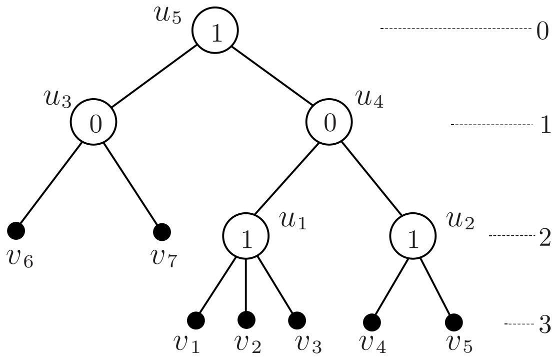
Έστω G ένα συνεκτικό cograph, και έστω $T_{co}(G)$ το αντίστοιχο cotree. Ορίζουμε τα ακόλουθα κόμβων/κορυφών σύνολα πάνω στο cotree $T_{co}(G)$:

- L_i, που είναι το σύνολο των κόμβων/κορυφών που βρίσκονται στο i επίπεδο του δέντρου $T_{co}(G)$, και
- $ch(u_i)$, που είναι το σύνολο των παιδιών του κόμβου $u_i \in T_{co}(G)$.

Ο πατέρας ενός κόμβου/κορυφής w στο δέντρο $T_{co}(G)$ συμβολίζεται με $p(w)$. Το Σχήμα 3.1 αναπαριστά ένα cotree $T_{co}(G)$ με τα αντίσοιχα σύνολα επιπέδων. Ένα σύνολο S των φύλλων του δέντρου $T_{co}(G)$, ή, ισοδύναμα, ένα υποσύνολο των κορυφών $S \subseteq V(G)$, καλείται



(a)



(b)

Σχήμα 3.1: (a) Ένα cograph με 7 κορυφές και (b) το αντίστοιχο cotree.

- *ισχυρό block* (strong block) εάν όλες οι κορυφές στο σύνολο S έχουν τον ίδιο πατέρα u στο δέντρο $T_{co}(G)$, και ισχύει $\text{ch}(u) = S$.

Από εδώ και στο εξής, χρησιμοποιούμε το $p(S)$ για να δηλώνουμε τον πατέρα των κορυφών του ισχυρού block S, που τον ονομάζουμε *ισχυρό κόμβο*(strong node)· σημειώστε ότι, ο κόμβος $p(S)$ είναι ένας κόμβος του δέντρου $T_{co}(G)$. Στο Σχήμα 3.1, τα μοναδικά ισχυρά blocks του δέντρου $T_{co}(G)$ έχουν σχηματιστεί από τους κόμβους u_1, u_2 και u_3· οι κόμβοι u_1 και u_2 είναι ισχυροί 1-κόμβοι, ενώ ο κόμβος u_3 είναι ένας ισχυρός 0-κόμβος.

Βασιζόμενοι στις δομικές ιδιότητες ενός cograph G και του αντίστοιχου cotree $T_{co}(G)$, είναι εύκολο να δει κανείς ότι το ακόλουθο λήμμα ισχύει.

Λήμμα 3.1. *Ένα cograph G περιέχει τουλάχιστον ένα ισχυρό block.*

3.3 Ο Αλγόριθμος Υπολογισμού του Πλήθους των Σκελετικών Δέντρων

Έστω ένα cograph G με n κορυφές και m ακμές και έστω το cotree $T_{co}(G)$ του. Με σκοπό τον υπολογισμό του πλήθους των σκελετικών δέντρων του γραφήματος G χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 1.2· δηλαδή, διαγράφουμε μια τυχαία κορυφή x του συνόλου $V(G)$ και όλες τις, προσκείμενες στην κορυφή x, ακμές. Τώρα το σύνολο κορυφών του cograph $G - x$, που έχει προκύψει, έχει μέγεθος $n - 1$.

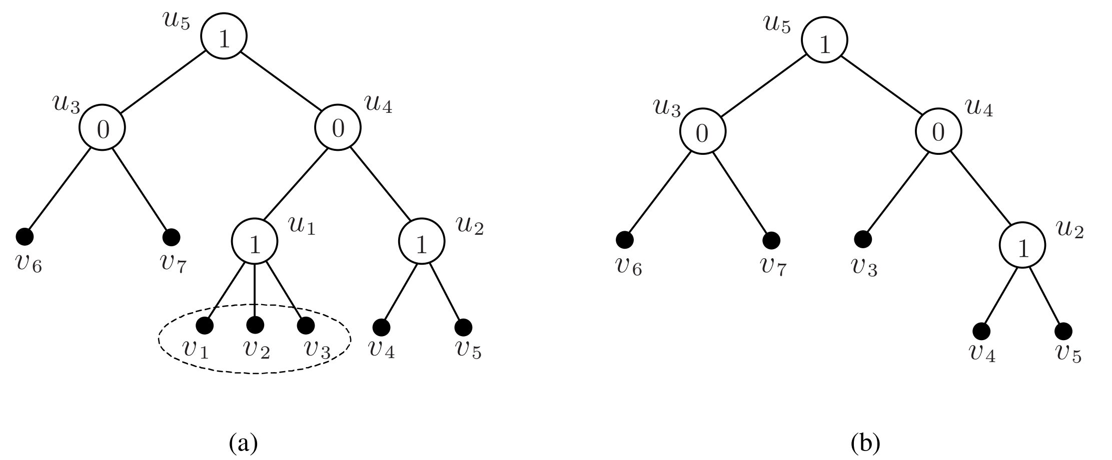
3.3.1 Ο Αλγόριθμος

Θέτουμε επιγραφές $s(v) := d_v$ για κάθε κορυφή $v \in V(G) - \{x\}$, όπου d_v είναι ο βαθμός της κορυφής v στο συγκεκριμένο γράφημα G· ονομάζουμε αυτές τις επιγραφές των κορυφών *s-επιγραφές* (s-labels).

Ο αλγόριθμος δουλεύει συρρικνώνοντας με έναν συστηματικό τρόπο τους ισχυρούς κόμβους του cotree του γραφήματος $G - x$ και αναθέτοντας στα φύλλα του δέντρου που έχουν παραχθεί με τον υψηλότερο δείκτη κορυφής του γραφήματος G που είναι παιδί ενός ισχυρού κόμβου (δείτε Σχήμα 3.2). Οι συρρικνώσεις πετυχαίνονται υπό την έννοια μιας συνάρτησης, που ονομάζεται, *Update_Replace*( ), η οποία παράλληλα ενημερώνει τις s-επιγραφές των παιδιών/κορυφών του ισχυρού κόμβου. Σημειώνουμε ότι οι s-επιγραφές θεωρούνται ως καθολικές μεταβλητές του αλγορίθμου μας.

Έστω u ένας ισχυρός κόμβος του δέντρου $T_{co}(G)$, και έστω $\mathrm{ch}(u) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$. Η συνάρτηση Update_Replace εφαρμόζεται στον κόμβο u, και δουλεύει ως εξής:

- αύξησε τις s-επιγραφές $s(v_1), s(v_2), \ldots, s(v_p)$ κατά 1, στην περίπτωση που ο κόμβος u είναι ένας 1-κόμβος·
- υπολόγισε την παράμετρο $e(u) := \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{s(v_i)}$.
- ενημέρωσε τις s-επιγραφές $s(v_{p-1})$ και $s(v_p)$ των κορυφών v_{p-1} και v_p, χρησιμοποιώντας την παράμετρο $e(u)$·
- διέγραψε τις κορυφές $v_1, v_2, \ldots, v_{p-1}$ από το δέντρο $T_{co}(G)$, και αντικατέστησε τον κόμβο u με την κορυφή v_p.



Σχήμα 3.2: Εφαρμογή της συνάρτησης $Update\_Replace(u_1, T_{co}(G))$.

Το Σχήμα 3.2 παρουσιάζει την εφαρμογή της συνάρτησης Update_Replace πάνω στον κόμβο $u_1 \in T_{co}(G)$. Πρώτα, υπολογίζει τις s-επιγραφές $s(v_1), s(v_2), s(v_3)$ και την παράμετρο $e(u_1)$, στη συνέχεια επαναυπολογίζει τις τιμές $s(v_2), s(v_3)$, και τελικά διαγράφει τις κορυφές v_1 και v_2, και αντικαθιστά τον ισχυρό κόμβο u_1 με την κορυφή v_3. Η τυπική περιγραφή της συνάρτησης Update_Replace δίνεται στον Αλγόριθμο 1.

Στη συνέχεια περιγράφουμε τον αλγόριθμο Number_Spanning_Trees που υπολογίζει το πλήθος των σκελετικών δέντρων ενός cograph G· δουλεύει ως εξής: πρώτα υπολογίζει τους βαθμούς d_i για κάθε μια κορυφή $v_i \in V(G)$ και αναθέτει επιγραφές $s(v_i) := d_i$, $1 \leq i \leq n$. Μετά, υπολογίζει το γράφημα $G := G - v_n$, όπου $v_n \in V(G)$, και κατασκευάζει το αντίστοιχο cotree $T_{co}(G)$· σημειώστε ότι, η κορυφή v_i είναι φύλλο στο δέντρο $T_{co}(G)$, $1 \leq i \leq n-1$. Στη συνέχεια, εφαρμόζει επαναληπτικά την συνάρτηση Update_Replace( ) σε κάθε ισχυρό κόμβο u, και υπολογίζει τις s-επιγραφές $s(v_1), s(v_2), \ldots, s(v_{n-1})$ των κορυφών του δέντρου $T_{co}(G)$. Τελικά, υπολογίζει το πλήθος των σκελετικών δέντρων $\tau(G) := \prod_{i=1}^{n-1} s(v_i)$. Η τυπική περιγραφή του παραπάνω αλγορίθμου δίνεται στον Αλγόριθμο 2.

Update_Replace(u, T)

---

1. Υπολόγισε το σύνολο κορυφών $\mathrm{ch}(u) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$;

2. **εάν** u είναι 1-κόμβος **τότε**
  για κάθε κορυφή $v_i \in \mathrm{ch}(u)$ **εκτέλεσε** $s(v_i) := s(v_i) + 1$;

3. Υπολόγισε την παράμετρο $e(u) := \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{s(v_i)}$;

4. Ενημέρωσε την s-επιγραφή $s(v_{p-1})$ ως εξής:
  $s(v_{p-1}) := s(v_{p-1}) \cdot (1 + s(v_p) \cdot e(u))$;

5. Ενημέρωσε την s-επιγραφή $s(v_p)$ ως εξής:
  εάν u είναι 0-κόμβος **τότε** $s(v_p) := \dfrac{s(v_p)}{1 + s(v_p) \cdot e(u)}$
  αλλιώς $s(v_p) := \dfrac{s(v_p)}{1 + s(v_p) \cdot e(u)} - 1$;

6. Διέγραψε τις κορυφές $v_1, v_2, \ldots, v_{p-1}$ από το δέντρο T, και αντικατέστησε τον κόμβο u με την κορυφή v_p;

7. Επέστρεψε το δέντρο που έχει προκύψει;

Αλγόριθμος 1: Update_Replace

3.3.2 Ορθότητα του Αλγορίθμου

Η ορθότητα του αλγορίθμου Number_Spanning_Trees εδραιώνεται μέσα από το Θεώρημα του πίνακα-δέντρου, Kirchhoff (Θεώρημα 1.2), που επάγει ότι το πλήθος των σκελετικών δέντρων ενός γραφήματος G ισούται με οποιονδήποτε από τους συντελεστές του Kirchhoff πίνακα.

Έστ G ένα cograph με n κορυφές και m ακμές και έστω $T_{co}(G)$ να είναι το cotree του γραφήματος G που περιέχει n κορυφές (φύλλα) και k κόμβους (εσωτερικούς κόμβους). Έστω $L_0, L_1, \ldots, L_h$ τα σύνολα επιπέδων του δέντρου $T_{co}(G)$ και έστω $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ να είναι ένα ισχυρό block· σημειώστε ότι $v_1, v_2, \ldots, v_p \in L_h$. Σχηματίζουμε τον Kirhhoff πίνακα K του cograph G, που είναι ένας $n \times n$ πίνακας, και στη συνέχεια υπολογίζουμε τον n συντελεστή του πίνακα K. Σημειώστε πως ο n συντελεστής του πίνακα K ισούται με τον $(n-1)$ τάξης ελάσσων μ_n^n, δηλαδή, με την ορίζουσα του $(n-1) \times (n-1)$ πίνακα K_{nn} που αποκτάται από τον πίνακα K μετά την διαγραφή της γραμμής n και της στήλης n. Αντικαθιστώντας τις τιμές $s(v_i) = d_i$, $1 \le i \le n-1$, ο πίνακας K_{nn} μετατρέπεται

$$K_{nn} = \begin{bmatrix} s(v_1) & & & & & & \\ & \ddots & & & & (-1)_{ji} & \\ & & s(v_p) & & & & \\ & & & s(v_{p+1}) & & & \\ & & & & s(v_{p+2}) & & \\ & (-1)_{ij} & & & & \ddots & \\ & & & & & & s(v_{n-1}) \end{bmatrix},$$

Number_Spanning_Trees

Είσοδος: Ένα cograph G με n κορυφές $v_1, v_2, \ldots, v_n$ και m ακμές;

Έξοδος: Το πλήθος των σκελετικών δέντρων $\tau(G)$ του cograph G;

---

1. Υπολόγισε τους βαθμούς d_i για κάθε κορυφή $v_i \in V(G)$;

2. Θέσε $s(v_i) := d_i$, για $1 \leq i \leq n$·

3. Υπολόγισε $G := G - v_n$, όπου $v_n \in V(G)$;

4. Κατασκεύασε το cotree $T := T_{co}(G)$ του cograph G;

5. Υπολόγισε τα σύνολα $L_0, L_1, \ldots, L_{h-1}$;

6. **για** $i = h-1$ μέχρι το 0 **εκτέλεσε**
    για κάθε κόμβο $u \in L_i$ **εκτέλεσε** $T := Update\_Replace(u, T)$;

7. Υπολόγισε $\tau(G) := \prod_{i=1}^{n-1} s(v_i)$;

Αλγόριθμος 2: Number_Spanning_Trees

όπου, σύμφωνα με τον ορισμό του Kirchhoff πίνακα, η επιγραφή $s(v_i)$ ισούται με τον βαθμό της κορυφής v_i στο γράφημα G και τα στοιχεία $(-1)_{ij}$ και $(-1)_{ji}$ των μη-διαγωνίων θέσεων (i,j) και (j,i) είναι και τα δύο -1 εάν οι κορυφές v_i και v_j είναι γειτονικές στο γράφημα G και ισούνται με 0 αλλιώς, $1 \leq i,\ j \leq n-1$.

Ο πίνακας K_{nn} αντιστοιχεί σε ένα cograph G με $n-1$ κορυφές $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$, όπου η κάθε κορυφή v_i έχει μια s-επιγραφή $s(v_i) = d_i$, $1 \leq i \leq n-1$. Οι πρώτες p γραμμές του πίνακα K_{nn} αντιστοιχούν στις p κορυφές $v_1, v_2, \ldots, v_p$ του ισχυρού block S· οι επόμενες $(n-1)-p$ γραμμές αντιστοιχούν στις κορυφές $v_{p+1}, v_{p+2}, \ldots, v_{n-1}$. Ανακαλούμε ότι, όλες οι κορυφές του ισχυρού block S έχουν κοινό πατέρα $p(S)$ και, επίσης, τον ίδιο βαθμό στο γράφημα G. Δηλαδή, ισχύει $d_i = d_j$, για κάθε $v_i, v_j \in S$.

Στη συνέχεια επικεντρώνουμε το ενδιαφέρον μας στον υπολογισμό της ορίζουσας του πίνακα K_{nn}, αφού όπως φαίνεται από το Θεώρημα του πίνακα-δέντρου, Kirchhoff (δείτε Θεώρημα 1.2) ότι

$$\tau(G) = \det(K_{nn}). \tag{3.1}$$

Με σκοπό να υπολογίσουμε την ορίζουσα $\det(K_{nn})$, ξεκινάμε εστιάζοντας την προσοχή μας στις πρώτες p γραμμές και p στήλες του πίνακα K_{nn} και δουλεύουμε ως εξής: πρώτα, πολλαπλασιάζουμε την γραμμή p του πίνακα K_{nn} με -1 και την προσθέτουμε στις γραμμές $1, 2, \ldots, p-1$. Παρατηρούμε ότι στις πρώτες $p-1$ γραμμές του πίνακα K_{nn}, μη-μηδενικές τιμές βρίσκονται μόνο στις θέσεις (i,i) και (i,p), $1 \leq i \leq p-1$, και έχουν τιμές $s(v_i)$ και $-s(v_p)$, αντίστοιχα. Μετά, συγκεντρώνουμε την προσοχή μας στην μη-μηδενικές θέσεις (i,p) του πίνκακα K_{nn}, $1 \leq i \leq p-1$, και εκτελούμε τα ακόλουθα: εάν ο πατέρας $p(S)$ του ισχυρού block $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ είναι ένας 1-κόμβος, τότε πολλαπλασιάζουμε την στήλη j με $\frac{s(v_p)+1}{s(v_j)+1}$ και την προσθέτουμε στην στήλη p· αλλιώς, πολλαπλασιάζουμε την στήλη j με $\frac{s(v_p)}{s(v_j)}$ και την προσθέτουμε στην στήλη p, $1 \leq j \leq p-1$. Τώρα στις πρώτες $p-1$ γραμμές του πίνακα K_{nn}, μόνο οι διαγώνιες θέσεις (i,i) έχουν μη-μηδενικές τιμές. Επιπρόσθετα, η p γραμμή παραμένει αμετάβλητη, και όλα τα μη-μηδενικά στοιχεία των θέσεων (i,p) της στήλης p, για $i = p+1, p+2, \ldots, n-1$, τα οποία είχαν τιμή ίση με -1 στον αρχικό πίνακα K_{nn}, τώρα έχουν την ίδια τιμή $k = -(1 + (s(v_p)+a) \cdot \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{s(v_i)+a})$, όπου $a = 1$ εάν ο πατέρας $p(S)$ είναι ένας 1-κόμβος, και $a = 0$ αλλιώς. Τελικά, πολλαπλασιάζουμε την στήλη p με $-\frac{1}{k}$ και την στήλη $p-1$ με $-k$.

Είναι σημαντικό να επισημάνουμε ότι οι παραπάνω πράξεις δεν αλλάζουν την τιμή της ορίζουσας του πίνακα K_{nn}. Επιπλέον, για τον πίνακα που προκύπτει μετά από αυτές τις πράξεις, έχουμε ότι:

(i) όλα τα μη-διαγώνια στοιχεία των θέσεων (i,j), $1 \le i \le p$ και $1 \le j \le n-1$, είναι ίσα με 0,

(ii) τα μη-διαγώνια στοιχεία των θέσεων (i,j), $p \le i,\ j \le n-1$, έχουν τις αρχικές τους τιμές, δηλαδή, τις τιμές που είχαν στον αρχικό πίνακα K_{nn}, και

(iii) τα διαγώνια στοιχεία των θέσεων (i,i), $1 \le i \le p$, έχουν τιμές $s'(v_i)$ οι οποίες είναι ίσες με:

$$\begin{aligned} s'(v_i) &= s(v_i)+1, \quad 1 \le i \le p-2 \\ s'(v_{p-1}) &= (s(v_{p-1})+1)\cdot(1+(s(v_p)+1)\cdot e(u)) \\ s'(v_p) &= \frac{s(v_p)+1}{1+(s(v_p)+1)\cdot e(u)} - 1 \end{aligned}$$

εάν ο κόμβος u είναι ένας 1-κόμβος, όπου $e(u) = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{s(v_i)+1}$, και

$$\begin{aligned} s'(v_i) &= s(v_i), \quad 1 \le i \le p-2 \\ s'(v_{p-1}) &= s(v_{p-1})\cdot(1+s(v_p)\cdot e(u)) \\ s'(v_p) &= \frac{s(v_p)}{1+s(v_p)\cdot e(u)} \end{aligned}$$

εάν ο κόμβος u είναι ένας 0-κόμβος, όπου $e(u) = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{s(v_i)}$.

Έτσι, αναπτύσσοντας ως προς τις πρώτες $p-1$ γραμμές, βρίσκουμε ότι η ορίζουσα του πίνακα K_{nn} μετατρέπεται σε

$$\begin{aligned} \det(K_{nn}) &= \left(\prod_{i=1}^{p-1} s'(v_i)\right)\cdot \begin{vmatrix} s'(v_p) & & & & \\ & s(v_{p+1}) & & (-1)_{ji} & \\ & & s(v_{p+2}) & & \\ & (-1)_{ij} & & \ddots & \\ & & & & s(v_{n-1}) \end{vmatrix} \\ &= \left(\prod_{i=1}^{p-1} s'(v_i)\right)\cdot \quad \det(K'), \end{aligned}$$

όπου ο πίνακας K' είναι ένας $(n-p)\times(n-p)$ πίνακας παρόμοιας δομής με τον αρχικό πίνακα K_{nn}· στη πραγματικότητα, είναι πανομοιότυπος με τον υποπίνακα του αρχικού πίνακα K_{nn} που ορίζεται από τις γραμμές rows $p, p+1, \ldots, n-1$ και από τις στήλες $p, p+1, \ldots, n-1$, με την μοναδική διαφορά να υπάρχει στην τιμή $s'(v_p)$ που διαφέρει από την τιμή $s(v_p)$. Σημειώνουμε ότι, ο πίνακας K' αντιστοιχεί σε ένα cograph G' με $n-p$ κορυφές, και, επομένως, περιέχει τουλάχιστον ένα ισχυρό block (δείτε Lemma 3.1).

Έτσι, εάν υποθέσουμε (με έναν επαγωγικό τρόπο) ότι η ορίζουσα του πίνακα K' μπορεί να εκφραστεί ως το γινόμενο κατάλληλων τιμών $s''(v_p), s''(v_{p+1}), \ldots, s''(v_{n-1})$, τότε η ορίζουσα του αρχικού πίνακα K_{nn} ισούται με το γινόμενο αυτών των τιμών πολλαπλασιαζόμενο με το γινόμενο των τιμών $s'(v_1), s'(v_2), \ldots, s'(v_{p-1})$, όπως ακριβώς υπολογίζει ο αλγόριθμος Spanning_Trees_Number χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Update_Replace( ). Αυτό αποδεικνύει την ορθότητα του αλγόριθμού μας και με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να διατυπώσουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Λήμμα 3.2. *Ο αλγόριθμος Number_Spanning_Trees ορθά υπολογίζει το πλήθος των σκελετικών δέντρων ενός cograph G.*

3.3.3 Πολυπλοκότητα Χρόνου και Χώρου

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την πολυπλοκότητα χρόνου και χώρου του αλγορίθμου Number_Spanning_Trees. Αποδεικνύουμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 3.3. *Ο αλγόριθμος Number_Spanning_Trees εκτελείται σε $O(n+m)$ χρόνο, όπου n είναι το πλήθος των κορυφών και m είναι το πλήθος των ακμών του δοθέντος cograph.*

Απόδειξη. Η κατασκευή του cotree $T_{co}(G)$ ενός cograph G με n κορυφές και m ακμές μπορεί να πραγματοποιηθεί με πολυπλοκότητα χρόνου $O(n+m)$ [29]. Ο υπολογισμός των συνόλων επιπέδου $L_1, L_2, \ldots, L_h$ του cotree $T_{co}(G)$ στο Βήμα 5 του αλγορίθμου Number_Spanning_Trees μπορεί να εκτελεστεί σε $O(n)$ χρόνο, εφόσον το cotree $T_{co}(G)$ περιέχει $O(n)$ κόμβους. Επιπρόσθετα, η συνάρτηση *Update_Replace* εφαρμόζεται σε καθένα από τους κόμβους του cotree $T := T_{co}(G)$, και όταν εφαρμόζεται σε έναν κόμβο u, μπορεί να εκτελεστεί σε $O(|\mathrm{ch}(u)|)$ χρόνο, όπου $|\mathrm{ch}(u)|$ είναι η πληθικότητα του συνόλου των παιδιώντου κόμβου u στο δέντρο T. Δοθέντος ότι το πλήθος των κόμβων του δέντρου T είναι $O(n)$, το Βήμα 6 του αλγορίθμου Number_Spanning_Trees απαιτεί $\sum_{u \in T} |\mathrm{ch}(u)|$ χρόνο. Τελικά, το Βήμα 7 παίρνει $O(n)$ χρόνο υπό το ομοιόμορφο κριτήριο κόστους (uniform cost criterion), σύμφωνα με το οποίο κάθε πράξη απαιτεί μια μονάδα χρόνου και κάθε καταχωρητής απαιτεί μια μονάδα χώρου, που επάγει ότι, ανεξάρτητα από το πόσο μεγάλοι είναι οι αριθμοί, μια αριθμητικοί πράξη που εμπλέκονται k αριθμοί χρειάζεται $O(k)$ χρόνο και χώρο. Επομένως, ο αλγόριθμος Number_Spanning_Trees παίρνει $O(n+m)$ χρόνο. ∎

Σημείωση 3.1. Η πολυπλοκότητα χρόνου και χώρου του αλγόριθμού μας μετριέται σύμφωνα μα το ομοιόμορφο κριτήριο κόστους. Υπό το κριτήριο αυτό κάθε επεξεργασία στο μοντέλο μας απαιτεί μια μονάδα χρόνου και κάθε καταχωρητής μια μονάδα χώρου. Παρά το γεγονός ότι οι αριθμητικές πράξεις εμπεριέχουν μεγάλου μεγέθους τυχαίους αριθμούς, μετράμε κάθε πράξη ως ένα βήμα. Στην δικιά μας περίπτωση το ομοιόμορφο κόστος είναι πραγματικό (realistic) εάν μια λέξη του υπολογιστή μπορεί να αποθηκεύσει έναν ακέραιο μεγέθους το πολύ n^{n-2}, όπου n το πλήθος των κορυφών ενός γραφήματος (το πλήθος των σκελετικών δέντρων ενός γραφήματος G με n κορυφές είναι το πολύ n^{n-2}· το πλήρες γράφημα K_n έχει n^{n-2} σκελετικά δέντρα). Σημειώστε παρ' όλα αυτά ότι εάν η ποσότητα n^{n-2} είναι μεγαλύτερη από αυτήν που μπορεί να αποθηκευτεί σε μια λέξη του υπολογιστή, τότε ακόμα και το λογαριθμικό κριτήριο κόστους (το μοντέλο αυτό λαμβάνει υπ' όψιν το το περιορισμένο μέγεθος μιας πραγματικής θέσης (λέξης) μνήμης, που είναι λογαριθμική σε σχέση με τον αριθμό που αποθηκεύει) είναι κατά κάποιο τρόπο μη-ρεαλιστικό, αφού θεωρεί ότι δύο ακέραιοι αριθμοί i και j μπορούν να πολλαπλασιαστούν σε χρόνο $O(\log(i)+\log(j))$, ο οποίος δεν είναι γνωστός ότι είναι πραγματοποιήσιμος (δείτε [3, 96]). □

Δεν είανι δύσκολο να δει κανείς ότι ο χώρος που χρειάζεται ο αλγόριθμος Number_Spanning_Trees είναι $O(n+m)$. Σημειώστε ότι, το cotree ενός cograph με n κορυφές και m ακμές μπορεί επίσης να κατασκευαστεί σε γραμμικό χρόνο και χώρο [29]. Έτσι, τα αποτελέσματα της ενότητας αυτής συνοψίζονται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.1. *Το πλήθος των σκελετικών δέντρων ενός cograph G με n κορυφές και m ακμές μπορεί να υπολογιστεί σε $O(n+m)$ χρόνο και χώρο.*

3.4 Συμπεράσματα

Πιο γενικές κλάσεις τέλειων γραφημάτων όπως είναι οι κλάσεις των P_4-reducible και των P_4-sparse γραφημάτων, επιδέχονται επίσης μια μοναδική δενδρική αναπαράσταση. Έτσι, είναι λογικό και επόμενο να αναρωτηθεί κανείς εάν οι δομικές ιδιότητες αυτών των δενδρικών αναπαραστάσεων μπορούν να βοηθήσουν στην εξαγωγή τύπων που σχετίζονται με το πλήθος των σκελετικών δέντρων τους. Προς αυτή την κατεύθυνση σχεδιάστηκε ο αλγόριθμος που δείχνουμε στο Κεφάλαιο 4.

Έχει αποδειχτεί ότι ένα μεταθετό (permutation) γράφημα $G[\pi]$, μια ευρέως γνωστή κλάση τέλειων γραφημάτων, μπορεί να μετασχηματιστεί σε ένα κατευθυνόμενο άκυκλο γράφημα και, έπειτα, σε ένα ριζωμένο δέντρο εξετάζοντας την αντίστροφη σχέση των στοιχείων της μετάθεσης π [87]. Βασιζόμενος κανείς σε αυτά τα αποτελέσματα, μπορεί να ερευνηθεί εάν η κλάση των μεταθετών γραφημάτων $G[\pi]$ ανήκει στην οικογένεια των γραφημάτων που επιδέχονται τύπους για το πλήθος των σκελετικών δέντρων τους. Το παραθέτουμε ως ένα ανοιχτό πρόβλημα.

Κεφαλαιο 4

Υπολογισμος του Πληθους των Σκελετικων Δεντρων Χρησιμοποιωντας m-Αποσυνθεση

4.1 Εισαγωγή

Ένα *σκελετικό δέντρο* (spanning tree) ενός συνεκτικού μη-κατευθυνόμενου γραφήματος G είναι ένα $(n-1)$-ακμών συνεκτικό υπογράφημά του. Το πλήθος των σκελετικών δέντρων ενός γραφήματος (δικτύου) G, καλείται επίσης *πολυπλοκότητα* (complexity) του γραφήματος G [10], είναι ένα σημαντικό, ευρέως γνωστό, πρόβλημα στην θεωρία γραφημάτων και εμφανίζεται σε ένα πλήθος εφαρμογών. Οι πιο αξιοσημείωτες περιοχές εφαρμογών είναι η αξιοπιστία δικτύων [84, 99], ο υπολογισμός της συνολικής αντίστασης μεταξύ μιας ακμής σε ένα ηλεκτρικό δίκτυο (electrical network) [13], απαρίθμηση συγκεκριμένων χημικών στοιχείων [20], και απαρίθμηση των Eulerian κύκλων (circuits) σε ένα γράφημα [47]. Συγκεκριμένα, η απαρίθμηση σκελετικών δέντρων είναι ένα ουσιαστικό βήμα σε πολλές τεχνικές για τον υπολογισμό, την οριοθέτηση και την προσεγγιστική αξιοπιστία δικτύων [25]· σε ένα δίκτυο που μοντελοποιείται από ένα γράφημα, η ενδοεπικοινωνία μεταξύ όλων των κόμβων του δικτύου επάγει ότι το γράφημα πρέπει να περιέχει ένα σκελετικό δέντρο και, επομένως, η μεγιστοποίηση του πλήθους των σκελετικών δέντρων είναι ένας τρόπος για την μεγιστοποίηση της αξιοπιστίας.

Επομένως, τόσο για θεωρητικούς όσο και για πρακτικούς σκοπούς, ενδιαφερόμαστε για την εξαγωγή μαθηματικών τύπων για τον υπολογισμό του πλήθους των σκελετικών δέντρων ενός γραφήματος G, όπως επίσης και για το K_n-συμπλήρωμα (K_n-complement) του γραφήματος G· εάν το γράφημα G είναι ένα υπογράφημα του πλήρες γραφήματος K_n, τότε το K_n-συμπλήρωμα του γραφήματος G, που συμβολίζεται με $K_n - G$, ορίζεται ως το γράφημα που αποκτάται από το γράφημα K_n διαγράφοντας τις ακμές του γραφήματος G (σημειώστε ότι, εάν το γράφημα G έχει n κορυφές, τότε το γράφημα $K_n - G$ συμπίπτει με το γράφημα $\overline{G}$, δηλ. το συμπλήρωμα του γραφήματος G). Πολλές περιπτώσεις έχουν μελετηθεί που εξαρτώνται από την επιλογή του γραφήματος G. Έχει μελετηθεί όταν το γράφημα G είναι ένα επιγραφόμενο μοριακό γράφημα (labelled molecular graph) [20], όταν το γράφημα G είναι ένα πλήρες πολυμερή γράφημα (complete multipartite graph) [107], όταν το γράφημα G είναι ένα κυκλικό γράφημα (circulant graph) [42, 109], όταν το γράφημα G είναι ένας κυβικός και τετραδικός κύκλος (cubic-quadruple cycle graph) [108], όταν το γράφημα G είναι ένα threshold γράφημα [46], όταν το γράφημα G είναι ένα quasi-threshold γράφημα [91] και άλλες πολλές περιπτώσεις (δείτε το βιβλίο του Berge [9] για μια έκθεση των βασικών αποτελεσμάτων· δείτε επίσης [24, 67, 93, 91, 94, 100, 106, 107]).

Ο σκοπός της συγκεκριμένου κεφαλαίου είναι να μελετήσει το γενικό πρόβλημα της εύρεσης του πλήθους των σκελετικών δέντρων ενός συγκεκριμένου γραφήματος. Παραδοσιακά, το πλήθος των σκελετικών δέντρων ενός γραφήματος υπολογίζεται υπό την έννοια του κλασικού *Θεωρήματος του πίνακα-δέντρου, Kirchhoff* (Kirchhoff matrix tree theorem) [10, 47], που εκφράζει το πλήθος των σκελετικών δέντρων ενός γραφήματος G σε σχέση με την ορίζουσα ενός cofactor του Kirchhoff πίνακα (επίσης γνωστό ως Laplacian πίνακα) που μπορεί να κατασκευαστεί εύκολα από τη σχέση γειτνίασης (πίνακας γειτνίασης, λίστα γειτνίασης, κ.τ.λ.) από το γράφημα G. Έτσι η απαρίθμηση των σκελετικών δέντρων απλοποιείται στον υπολογισμό της ορίζουσας ενός $((n-1) \times (n-1))$-μεγέθους πίνακα, όπου n είναι το πλήθος των κορυφών του συγκεκριμένου γραφήματος. Αυτή η προσέγγιση έχει χρησιμοποιηθεί για την απαρίθμηση των δέντρων σε οικογένειες γραφημάτων (δείτε [9, 41, 93, 107]), αλλά απαιτεί $\Theta(n^{2.376})$ αριθμητικές πράξεις στις τιμές του πίνακα και $\Theta(n^2)$ χώρο [27]· στην πραγματικότητα, αυτός ο αλγόριθμος που επιτυγχάνει την συγκεκριμένη πολυπλοκότητα χρόνου και χώρου εμφανίζει έναν μεγάλου μεγέθους σταθερό παράγοντα έτσι ώστε για πρακτικούς συνδυαστικούς υπολογισμούς ο απλός $O(n^3)$-χρόνου αλγόριθμος αποδεικνύεται η προφανής λύση. Αξίζει να σημειωθεί επίσης, ότι σε μερικές ειδικές περιπτώσεις η ορίζουσα μπορεί να υπολογιστεί σε $O(n^{1.5})$ χρόνο, χρησιμοποιώντας το επίπεδο διαχωριστικό θεώρημα [74]. Σε λίγες περιπτώσεις, το πλήθος των σκελετικών δέντρων ενός γραφήματος έχει υπολογιστεί χωρίς την αποτίμηση μιας ορίζουσας. Οι Colbourn et al. στην εργασία [26] έχουν προτείνει έναν αλγόριθμο που τρέχει σε $O(n^2)$ χρόνο για ένα n-κορυφών επίπεδο γράφημα. Ο αλγόριθμός τους βασίζεται σε κάποιους συγκεκριμένους μετασχηματισμούς (γνωστοί ως delta wye τεχνική) που μπορούν να εφαρμοστούν σε επίπεδα γραφήματα· δυστυχώς, είναι δύσκολο να μελετήσει κανείς τέτοιους ή άλλου είδους μετασχηματισμούς σε γενικά γραφήματα (πέρα των επίπεδων γραφημάτων).

Με σκοπό την απόκτηση μιας αποτελεσματικής επίλυσης για το πρόβλημα, εκμεταλευόμαστε την m-αποσύνθεση (ένας τρόπος αποσύνθεσης του γραφήματος που συσχετίζει το γράφημα με τα μέγιστα ομμογενή σύνολα–maximal homogeneous sets) του συγκεκριμένου γραφήματος G και συγκεκριμένα τις ιδιότητες του md-δέντρου του. Ο αλγόριθμός μας στηρίζεται σε πράξεις συστολών πάνω σε δέντρα (tree contraction operations) που εφαρμόζονται με έναν συστηματικό τρόπο από κάτω προς τα πάνω έτσι ώστε να συρρικνώσει το md-δέντρο του γραφήματος G σε ένα μοναδικό κόμβο, ενώ ταυτόχρονα συγκεκριμένοι παράμετροι ενημερώνονται κατάλληλα· η ενημέρωση ουσιαστικά πραγματοποιεί μετασχηματισμούς πάνω στους συντελεστές του Kirchhoff Πίνακα προς την αποτίμηση της ορίζουσας. Ακόμα, το γεγονός ότι ασχολούμαστε με αυτοτελείς-μονάδες–modules (δηλαδή, κάθε κορυφή εκτός της αυτοτελούς-μονάδος είναι γειτονική είτε σε όλες είτε σε καμία από τις κορυφές που βρίσκονται μέσα στην αυτοτελή-μονάδα) μας επιτρέπει να κερδίσουμε την πολυπλοκότητα χρόνου $O(n^{2.376})$ για πολλές περιπτώσεις γραφημάτων. Στο τέλος, το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος G αποκτάται ως το γινόμενο n αριθμών, όπου n είναι το πλήθος των κορυφών του γραφήματος G· αυτός ο πολλαπλασιασμός απαιτεί $O(n)$ χρόνο υπό το ομοιόμορφο κόστους κριτήριο (uniform cost criterion) [3, 96]. Ο αλγόριθμός μας είναι εύκολα πραγματοποιήσιμος· η ορθότητά του εδραιώνεται με τον τρόπο του Θεωρήματος του πίνακα-δέντρου, Kirchhoff, μαζί με κλασικές τεχνικές από την γραμμική άλγεβρα και την θεωρία πινάκων.

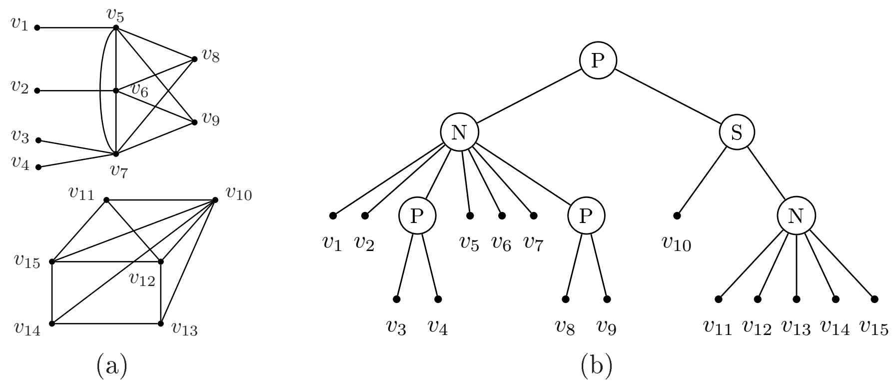
Πιο συγκεκριμένα, για ορισμένες κλάσεις γραφημάτων, η δομή των md-δέντρων τους (και στην πραγματικότητα των πρώτων γραφημάτων τους) μας επιβεβαιώνει ότι κάθε κόμβος του δέντρου μπορεί να επεξεργαστεί σε γραμμικό χρόνο ως προς το μέγεθος του συρρικνωμένου μέρους του δέντρου· έτσι, εφόσον το md-δέντρο ενός γραφήματος μπορεί να κατασκευαστεί σε χρόνο και χώρο γραμμικό ως προς το μέγεθος του γραφήματος [30, 80], η επεξεργασία ολόκληρου του md-δέντρου και συνεπώς το πλήθος των σκελετικών δέντρων παίρνει χρόνο γραμμικό και χώρο γραμμικό ως προς το μέγεθος του συγκεκριμένου γραφήματος. Τέτοιες κλάσεις είναι οι κλάσεις των tree-cographs, $(q, q-4)$-γραφημάτων για σταθερό q, και P_4-tidy γραφημάτων, μαζί με τις ποικίλλες υποκλάσεις τους, όπως είναι, τα cographs, τα P_4-reducible, τα extended P_4-reducible, τα P_4-sparse, τα P_4-lite, τα P_4-extendible, και τα extended P_4-sparse γραφήματα. Αυτές οι κλάσεις γραφημάτων έχουν μελετηθεί από πολλούς συγγραφείς στο παρελθόν (δείτε [5, 35, 39, 59, 62]), που έβγαλαν στην επιφάνεια τις δομικές και αλγοριθμικές τους ιδιότητες. Το κίνητρό έρχεται από το γεγονός ότι αυτές οι κλάσεις των γραφημάτων έχουν λίγα άχορδα μονοπάτια τεσσάρων κορυφών(γνωστά ως P_4), που τις κάνει να εμφανίζονται σε πολλές πραγματικές εγαρμογές, π.χ., σε χρονοδιαγράμματα (δείτε [6]).

Το κεφάλαιο είναι οργανωμένο ως εξής. Στην δεύτερη ενότητα εδραιώνουμε την σημειογραφία και την ορολογία μας και παρουσιάζουμε προηγούμενα αποτελέσματα. Στην τρίτη ενότητα περιγράφουμε τον αλγόριθμο που καθορίζει το πλήθος των σκελετικών δέντρων ενός τυχαίου γραφήματος. Στην τέταρτη ενότητα αποδεικνύουμε την ορθότητά του, ενώ στην πέμπτη ενότητα υπολογίζουμε την πολυπλοκότητα χρόνου και χώρου. Στην έκτη ενότητα δείχνουμε ότι το πλήθος των σκελετικών δέντρων για μερικές κλάσεις τέλειων γραφημάτων μπορεί να υπολογιστεί σε γραμμικό χρόνο. Τέλος στην έβδομη ενότητα, συνοψίζουμε το κεφάλαιο και παραθέτουμε πιθανές επεκτάσεις.

4.2 m-Αποσύνθεση και Συρρικνώσιμα Υποδέντρα

Ένα υποσύνολο M των κορυφών ενός γραφήματος G αναφέρεται ως *αυτοτελή-μονάδα* (module) του γραφήματος G, εάν κάθε κορυφή εκτός του συνόλου M είναι, είτε γειτονική σε όλες τις κορυφές του M, είτε σε καμία από αυτές. Το κενό σύνολο, τα μονοσύνολα και το σύνολο κορυφών V λέγονται *τετριμμένες* αυτοτελείς-μονάδες και όταν το γράφημα G έχει μόνο τετριμμένες αυτοτελείς-μονάδες τότε αναφέρεται ως *πρώτο γράφημα* (prime graph ή indecomposable). Μια μη-τετριμμένη αυτοτελή-μονάδα ονομάζεται επίσης και *ομογενές* σύνολο (homogeneous set). Ένα πρώτο αραχνοειδές γράφημα είναι ένα πρώτο γράφημα, αφού δεν περιέχει καμία τετριμμένη αυτοτελή-μονάδα. Επισημάνουμε ότι ένα άχορδο μονοπάτι με $n \geq 4$ κορυφές και ένας άχορδος κύκλος με $n \geq 5$ κορυφές είναι πρώτα γραφήματα. Επιπλέον, μια αυτοτελή-μονάδα M του γραφήματος G ονομάζεται *ισχυρή αυτοτελή-μονάδα* (strong module) εάν για κάθε μία αυτοτελή-μονάδα $M' \neq M$ του γραφήματος G, είτε ισχύει $M' \cap M = \emptyset$ είτε ισχύει $M' \subset M$.

Η m-αποσύνθεση (modular decomposition) ενός γραφήματος G αναπαρίσταται από ένα δέντρο $T(G)$ το οποίο ονομάζουμε *md-δένδρο* του γραφήματος G (modular decomposition tree)· τα φύλλα του δέντρου $T(G)$ είναι οι κορυφές του γραφήματος G ενώ κάθε εσωτερικός κόμβος t αντιστοιχεί σε μια ισχυρή αυτοτελή-μονάδα που συμβολίζεται $M(t)$ και επάγεται από το σύνολο των κορυφών/φύλλων του υποδέντρου με ρίζα τον t. Έτσι το δέντρο $T(G)$ αναπαριστά όλα τις ισχυρές αυτοτελείς-μονάδες του γραφήματος G. Κάθε εσωτερικός κόμβος επιγράφεται με P για *παράλληλη* αυτοτελή-μονάδα (parallel module), ή με S για *σειριακή* αυτοτελή-μονάδα (series module),



Σχήμα 4.1: (a) ένα γράφημα και (b) το md-δέντρο του.

ή με N για *γειτονική* αυτοτελή-μονάδα (neighborhood module). Η αυτοτελή-μονάδα που αντιστοιχεί σε έναν P-κόμβο επάγει ένα μη-συνδεδεμένο υπογράφημα του γραφήματος G, αυτή του S-κόμβου επάγει ένα συνδεδεμένο υπογράφημα του γραφήματος G που το συμπλήρωμά του είναι ένα μη-συνδεδεμένο υπογράφημα και αυτή του N-κόμβου επάγει ένα συνδεδεμένο υπογράφημα του γραφήματος G που το συμπλήρωμά του είναι επίσης ένα συνδεδεμένο υπογράφημα. Το Σχήμα 4.1 δείχνει ένα γράφημα και το md-δέντρο του.

Πιο συγκεκριμένα, έστω t ένας εσωτερικός κόμβος του md-δέντρου $T(G)$. Εάν ο κόμβος t έχει παιδιά $t_1, t_2, \ldots, t_p$, τότε ορίζουμε το *αντιπροσωπευτικό γράφημα* $G(t)$ (representative graph) ως ακολούθως:

- $V(G(t)) = \{t_1, t_2, \ldots, t_p\}$, and
- $E(G(t)) = \{t_i t_j \mid v_i v_j \in E(G),\ v_i \in M(t_i)$ και $v_j \in M(t_j)\}$.

Σημειώνουμε ότι εξ' ορισμού της αυτοτελούς-μονάδας, εάν μια κορυφή της αυτοτελούς-μονάδας $M(t_i)$ είναι γειτονική με μια άλλη κορυφή της αυτοτελούς-μονάδας $M(t_j)$ τότε κάθε κορυφή της αυτοτελούς-μονάδας $M(t_i)$ είναι γειτονική με κάθε κορυφή της αυτοτελούς-μονάδας $M(t_j)$. Έτσι, το γράφημα $G(t)$ είναι ισόμορφο με το γράφημα που επάγεται από ένα υποσύνολο της αυτοτελούς-μονάδας $M(t)$ συρρικνώνοντας σε μια κορυφή κάθε μέγιστη αυτοτελής-υπομονάδα της $M(t)$ στο δέντρο $T(G)$. Τότε: (i) εάν ο κόμβος t είναι ένας P-κόμβος, το γράφημα $G(t)$ είναι ένα χωρίς-ακμές γράφημα, (ii) εάν ο κόμβος t είναι ένας S-κόμβος, το γράφημα $G(t)$ είναι ένα πλήρες γράφημα, και (iii) εάν ο κόμβος t είναι N-κόμβος, το γράφημα $G(t)$ είναι ένα πρώτο γράφημα.

Το md-δέντρο $T(G)$ ενός γραφήματος G κατασκευάζεται αναδρομικά ως εξής: οι παράλληλες αυτοτελείς-μονάδες αποσυντίθενται στις συνεκτικές συνιστώσες τους (connected components), οι σειριακές αυτοτελείς-μονάδες στις μη-συνεκτικές συνιστώσες τους (co-connected components), και οι γειτονικές αυτοτελείς-μονάδες στις ισχυρές αυτοτελείς-υπομονάδες τους (strong submodules). Η αποτελεσματική κατασκευή του md-δέντρου ενός γραφήματος έχει δεχθεί πολύ μεγάλη προσοχή. Υπάρχει ένα πλήθος από $O(n^4)$, $O(n^3)$, $O(mn)$, και $O(n^2)$ αλγορίθμους για την εύρεση του md-δέντρου, όπως είναι των Buer και Möhring [19], Golumbic [43], Habib και Maurer [45], McConnell [78], Muller και Spinrad [83], μερικοί από τους οποίους είναι για συγκεκριμένες ή γενικότερες περιπτώσεις του προβλήματος. Από το 1994, είναι πλέον γνωστό πως για οποιοδήποτε γράφημα G το md-δέντρο $T(G)$ είναι μοναδικό ως προς τον ισομορφισμό και μπορεί να κατασκευαστεί σε γραμμικό χρόνο [30, 33, 79, 80]. Σημειώνουμε ότι εάν το δέντρο $T(G)$ δεν περιέχει κανένα εσωτερικό N-κόμβο, τότε το γράφημα G είναι ένα cograph (P_4-free γράφημα) και το δέντρο $T(G)$ είναι το αντίστοιχο cotree (οι P-κόμβοι και οι S-κόμβοι του $T(G)$ είναι ακριβώς οι 0-κόμβοι και 1-κόμβοι, αντίστοιχα, του cotree).

Έστω ο κόμβος t να είναι ένας N-κόμβος. Μπορούμε να δείξουμε ότι εάν το πρώτο γράφημα $G(t)$ ανήκει σε μια οικογένεια $\mathcal{F}$ από γραφήματα τότε η επεξεργασία του παίρνει χρόνο γραμμικό ως προς το μέγεθος του γραφήματος $G(t)$· αυτό συμπεραίνει ότι εάν όλα τα πρώτα γραφήματα ενός γραφήματος G ανήκουν στην οικογένεια $\mathcal{F}$ τότε το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος G μπορεί να υπολογιστεί σε χρόνο γραμμικό ως προς το μέγεθος του γραφήματος G. Η οικογένεια $\mathcal{F}$ περιέχει αραιά αραχνοειδές γραφήματα, πρώτα δέντρα, άχορδους κύκλους, και τα συμπληρώματά τους· ονομάζουμε αυτά τα γραφήματα *βασικά γραφήματα* (basic graphs). Ένα πρώτο γράφημα που δεν βρίσκεται στην οικογένεια $\mathcal{F}$ ονομάζεται *μη-βασικό γράφημα* (non-basic graph).

Στη συνέχεια, εισάγουμε τους ορισμούς των μη-βασικού κόστους ενός γραφήματος και την έννοια των συρρικνώσιμων υποδέντρων του md-δέντρου τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε στον αλγόριθμό μας.

Ορισμός 4.1. Έστω $\mathcal{F}$ να είναι η οικογένεια των βασικών γραφημάτων, G ένα γράφημα, $T(G)$ το md-δέντρο του, και έστω $\alpha(G) = \{t_1, t_2, \ldots, t_{s'}\}$ να είναι το σύνολο των N-κόμβων του δέντρου $T(G)$ τέτοια ώστε τα αντιπροσωπευτικά γραφήματα $G(t_1), G(t_2), \ldots, G(t_{s'})$ να μην είναι στην οικογένεια $\mathcal{F}$. Ορίζουμε το *μη-βασικό κόστος* (non-basic cost) του γραφήματος G ως την τιμή $\phi(G) = \sum_{t \in \alpha(G)} |V(G_t)|^{2.376} = \sum_{t \in \alpha(G)} |\mathrm{ch}(t)|^{2.376}$, όπου $\mathrm{ch}(t)$ δηλώνει το σύνολο των παιδιών του κόμβου t στο δέντρο $T(G)$.

Δεν είναι δύσκολο να δει κανείς ότι για ένα n-κορυφών γράφημα G, έχουμε ότι $\phi(G) = O(n^{2.376})$ · για ένα n-κορυφών cograph G έχουμε $\phi(G) = 0$.

Σε γενικές γραμμές, κάνοντας χρήση της m-αποσύνθεσης για την επίλυση ενός αλγοριθμικού προβλήματος μπορεί να αποδειχθεί αρκετά ενδιαφέρον. Ένας τυπικός (διαίρει-και-βασίλευε) αλγόριθμος που ερευνά την m-αποσύνθεση έχει συχνά την ακόλουθη δομή: πρώτα, ο αλγόριθμος κατασκευάζει το md-δέντρο $T(G)$ του δοθέντος γραφήματος G χρησιμοποιώντας έναν από τους γνωστούς γραμμικούς αλγόριθμους [30, 33, 79]· στη συνέχεια, με έναν από κάτω προς τα πάνω τρόπο ο αλγόριθμος υπολογίζει για κάθε κόμβο t του δέντρου $T(G)$ την βέλτιστη τιμή για το υπογράφημα $G[M(t)]$ του γραφήματος G που επάγεται από το σύνολο όλων των φύλλων του υποδέντρου του δέντρου $T(G)$ με ρίζα τον κόμβο t. Έτσι ο υπολογισμός ξεκινάει από την ανάθεση των βέλτιστων τιμών στα φύλλα. Μετά, ο αλγόριθμος υπολογίζει την βέλτιστη τιμή για κάθε εσωτερικό κόμβο t χησιμοποιώντας τις βέλτιστες τιμές από όλα τα παιδιά του κόμβου t και με βάση την επιγραφή (ή τον τύπο) του κόμβου. Τελικά, η βέλτιστη τιμή της ρίζας του δέντρου $T(G)$ είναι και η βέλτιστη τιμή για το πρόβλημα του δοθέντος γραφήματος G.

Με αυτόν τον τρόπο, για να καθορίσουμε έναν τέτοιου είδους αλγόριθμο, βασισμένου στην m-αποσύνθεση (modular decomposition based algorithm), πρέπει μόνο να περιγράψουμε τον τρόπο που καθορίζουμε τις τιμές στα φύλλα και ποιον τύπο εφαρμόζουμε ή ποιο υποπρόβλημα επιλύουμε στους P-κόμβους, S-κόμβους, και N-κόμβους χρησιμοποιώντας ως είσοδο τις τιμές όλων των παιδιών τους (για περισσότερες λεπτομέρειες δείτε [18]).

Ορισμός 4.2. Έστω ένα δέντρο T. Ένα υποδέντρο με ρίζα έναν κόμβο t του δέντρου T είναι *συρρικνώσιμο υποδέντρο* (contractible subtree) εάν και μόνο εάν όλα τα παιδιά του κόμβου t είναι φύλλα του δέντρου T.

Βασιζόμενοι στις δομικές ιδιότητες του md-δέντρου $T(G)$ ενός γραφήματος G, είναι εύκολο να δούμε ότι το γράφημα G έχει τουλάχιστον ένα συρρικνώσιμο υποδέντρο.

4.3 Ο Αλγόριθμος

Με σκοπό τον υπολογισμό του πλήθους των σκελετικών δέντρων ενός γραφήματος G με κορυφές $v_1, v_2, \ldots, v_n$, χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 1.2: διαγράφουμε μια τυχαία κορυφή $v_n \in V(G)$ και όλες τις προσκείμενες σε αυτήν ακμές, συσχετίζουμε κάθε μια από τις υπόλοιπες κορυφές με μια *s-τιμή* η οποία αρχικοποιείται στους βαθμούς των κορυφών στο γράφημα G, και κατασκευάζουμε το md-δέντρο του γραφήματος $G - v_n$· στη συνέχεια, με έναν από κάτω προς τον πάνω τρόπο, επεξεργαζόμαστε κάθε ένα από τα συρρικνώσιμα υποδέντρα του δέντρου και τα συρρικνώνουμε σε ένα φύλλο-κόμβο που αντιστοιχεί στον υψηλότερη δείκτη κορυφής/φύλλου, ενώ ταυτόχρονα ενημερώνουμε τις s-τιμές των κορυφών/φύλλων· εντέλει, ολόκληρο το δέντρο μετατρέπεται σε μια μοναδική κορυφή/φύλλο, και το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος G ισούται με το γινόμενο των τελικών τιμών των s-τιμών από όλες τις κορυφές του συνόλου $V(G) - \{v_n\}$.

Κάθε συνάρτηση, που συρρικνώνει το υποδέντρο με ρίζα τον κόμβο t, αποτελείται από τις ακόλουθες τρεις βασικές φάσεις:

- ▷ Φάση υπολογισμού : υπολογίζει τις s-τιμές των παιδιών του κόμβου t, με έναν κατάλληλο τρόπο που εξαρτάται από τον τύπο του κόμβου t και το γράφημα $G(t)$ (δείτε Βήμα 2 της συνάρτησης Contract-Parallel_Series).
- ▷ Φάση ενημέρωσης: στη συνέχεια, σε ένα δεύτερο βήμα, εφαρμόζεται μια ενημέρωση των s-τιμών των δύο υψηλότερων δεικτών των κορυφών, χρησιμοποιώντας ένα κατάλληλο άθροισμα των s-τιμών της φάσης υπολογισμού (δείτε Βήμα 3 της συνάρτησης Contract-Parallel_Series).
- ▷ Φάση συστολής: τελικά, συρρικνώνει σε μια μοναδική κορυφή v_p το υποδέντρο με ρίζα τον κόμβο t (δείτε Βήμα 4 της συνάρτησης Contract-Parallel_Series).

Καλούμε αυτού του είδους τις συναρτήσεις *συναρτήσεις συστολής* (contraction functions). Ο αλγόριθμος που υπολογίζει το πλήθος των σκελετικών δέντρων ενός γραφήματος G δίνεται με λεπτομέρεια στον Αλγόριθμο 3· το συγκεκριμένο γράφημα G θεωρείται ότι είναι συνεκτικό (αλλιώς δεν έχει κανένα σκελετικό δέντρο). Επιπλέον, σημειώνουμε ότι οι s-τιμές είναι καθολικές μεταβλητές.

Οι συρρικνώσεις γίνονται με την βοήθεια δύο συναρτήσεων: της συνάρτησης *Contract-Parallel_Series*, που εφαρμόζεται σε έναν συρρικνώσιμο P-κόμβο ή S-κόμβο, και της συνάρτησης *Handle-N_node*, που εφαρμόζεται σε ένα συρρικνώσιμο N-κόμβο. Αρχικά η συνάρτηση αυξάνει τις s-τιμές των κορυφών $v_1, v_2, \ldots, v_p$ κατά 1, στην περίπτωση που ο εσωτερικός κόμβος t είναι ένας S-κόμβος. Τότε υπολογίζει ένα συγκεκριμένο άθροισμα των s-τιμών των κορυφών που σχετίζονται με τα παιδιά/φύλλα του κόμβου, που χρησιμοποιείται για την ενημέρωση των s-τιμών των δύο υψηλότερων δεικτών κορυφών, v_{p-1} και v_p. Τελικώς, συρρικνώνει το υποδέντρο που ριζώνεται στον P-κόμβο ή S-κόμβο t στην κορυφή v_p. Η τυπική περιγραφή της συνάρτησης Contract-Parallel_Series δίνεται παρακάτω:

Έστω t ένας N-κόμβος που είναι η ρίζα ενός συρρικνώσιμου υποδέντρου. Όπως προαναφέρθηκε, εάν το αντιπροσωπευτικό γράφημα $G(t)$ είναι ένα βασικό γράφημα (δηλαδή, ανήκει στην οικογένεια $\mathcal{F}$) τότε μπορούμε να χειρισοτύμε την περίπτωση αυτή σε χρόνο γραμμικό ως προς το μέγεθος του γραφήματος $G(t)$. Εάν το γράφημα $G(t)$ είναι ένα μη-βασικό γράφημα, εξακολουθούμε να συρρικνώνουμε το υποδέντρο (σε υπέρ-γραμμικό αλλά πολυωνυμικό χρόνο). Η ακόλουθη συνάρτηση χερίζεται αυτή την περίπτωση.

4.3.1 Επεξεργασία των Βασικών N-κόμβων

Έστω t ένας N-κόμβος του δέντρου $T(G)$ και ισχύει $G_t \in \mathcal{F}$. Πρώτα, χρειαζόμαστε να αναγνωρίσουμε σε ποια κλάση της οικογένειας $\mathcal{F}$ το γράφημα $G(t)$ ανήκει. Πιο τυπικά,

Spanning_Trees-Number

Είσοδος: Ένα συνεκτικό γράφημα G με n κορυφές $v_1, v_2, \ldots, v_n$ και m ακμές.

Έξοδος: Το πλήθος των σκελετικών δέντρων $\tau(G)$ του γραφήματος G.

1. **για** κάθε κορυφή v_i, $1 \leq i \leq n-1$, **εκτέλεσε**
   υπολόγισε τον βαθμό $d(v_i)$ στο γράφημα G;
   $s(v_i) \leftarrow d(v_i)$;
2. $T \longleftarrow$ το md-δέντρο T του γραφήματος $G - v_n$·
3. Υπολόγισε τα σύνολα κόμβων $L_0, L_1, \ldots, L_h$ των επιπέδων $0, 1, \ldots, h$ του δέντρου T;
4. **για** $i = h-1$ μέχρι το 0 **εκτέλεσε** {*το υποδέντρο με ρίζα τον κόμβο t είναι συστολικό*}
   για κάθε εσωτερικό κόμβο $t \in L_i$ **εκτέλεσε**
   4.1 **εάν** ο κόμβος t είναι ένας P-κόμβος **ή** ένας S-κόμβος
   4.2 **τότε** $T \leftarrow$ *Contract-Parallel_Series*(t, T);
   4.3 **αλλιώς** $T \leftarrow$ *Handle-N_node*(t, T);
5. $\tau(G) \leftarrow \prod_{i=1}^{n-1} s(v_i)$;

Αλγόριθμος 3: Spanning_Trees-Number

Συνάρτηση **Contract-Parallel_Series**(t, T)

1. $r \leftarrow 0$;
   εάν ο κόμβος t είναι ένας S-κόμβος
   τότε {*έστω $v_1, v_2, \ldots, v_p$ οι κορυφές που σχετίζονται με τα παιδιά του κόμβου t*}
   για κάθε κορυφή v_i, $1 \leq i \leq p$ **εκτέλεσε**
   $s(v_i) \leftarrow s(v_i) + 1$;
   $r \leftarrow 1$;
2. $\alpha \leftarrow \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{s(v_i)}$·
3. Ενημέρωσε τις s-τιμές των κορυφών v_{p-1} και v_p ως εξής:
   $s(v_{p-1}) \leftarrow s(v_{p-1}) \cdot s(v_p) \cdot \alpha$; $s(v_p) \leftarrow \frac{1}{\alpha} - r$;
4. Αντικατέστησε το υποδέντρο με ρίζα τον κόμβο t με το φύλλο/κόμβο που σχετίζεται με την κορυφή v_p;
   επέστρεψε το προκύπτον δέντρο;

Αλγόριθμος 4: Contract-Parallel_Series

- εάν το γράφημα $G(t)$ είναι ένα αραιό αραχνοειδές γράφημα τότε καλούμε $T \leftarrow$ *Contract-Spider*$(t, T, -1)$
  ·
- εάν το γράφημα $G(t)$ είναι ένα πρώτο δέντρο τότε καλούμε $T \leftarrow$ *Contract-Tree*$(t, T, -1)$·
- εάν το γράφημα $G(t)$ είναι ένας άχορδος κύκλος τότε καλούμε $T \leftarrow$ *Contract-Cycle*$(t, T, -1)$
  ·

Συνάρτηση **Handle-N_node**(t, T)

εάν το αντιπροσωπευτικό γράφημα $G(t)$ ανήκει στην οικογένεια $\mathcal{F}$
τότε $T \leftarrow$ *Handle-Basic-N_node*(t, T);
αλλιώς $T \leftarrow$ *Contract-NonBasic-N_node*(t, T);

Αλγόριθμος 5: Handle-N_node

- εάν το γράφημα $G(t)$ είναι το συμπλήρωμα ενός αραιού αραχνοειδούς γραφήματος, ενός πρώτου δέντρου, ή ένας άχορδος κύκλος τότε καλούμε
  $T \leftarrow$ *Handle-Complement-N_node*(t, T).

Αξίζει να σημειωθεί ότι η παράμετρος -1 των συναρτήσεων για την συρρίκνωση ενός αραιού αραχνοειδούς γραφήματος, ενός πρώτου δέντρου, ή ενός άχορδου κύκλου είναι για να σηματοδοτήσει ότι το συγκεκριμένο γράφημα είναι ένα αραιό αραχνοειδές γράφημα, ένα πρώτο δέντρο ή ένας άχορδος κύκλος και όχι το συμπλήρωμά τους. Εάν αυτές οι συναρτήσεις εφαρμοστούν στα συμπληρώματα ενός αραιού αράχνοειδούς γραφήματος, ενός πρώτου δέντρου, ή ενός άχορδου κύκλου, τότε αυτή η παράμετρος είναι 1 (δείτε την συνάρτηση Handle-Complement).

Επεξεργασία των N-κόμβων Αραχνοειδούς Γραφήματος

Σε αυτήν την περίπτωση, το γράφημα $G(t)$ είναι ένα πρώτο αραχνοειδές γράφημα. Η συνάρτηση Contract-Spider(t, T, r) πρώτα υπολογίζει την διαμέριση (S, K, R) του γραφήματος $G(t)$ εάν $r = -1$ (σε αυτήν την περίπτωση το γράφημα $G(t)$ είναι ένα αραιό αραχνοειδές γράφημα), ειδάλλως, υπολογίζει την διαμέριση του συμπληρώματος του γραφήματος $G(t)$ (σε αυτή την περίπτωση το γράφημα $G(t)$ είναι ένα πυκνό αραχνοειδές γράφημα). Τότε συσχετίζει κάθε κορυφή v_i του γραφήματος $G(t)$ με δύο τιμές: b_i και c_i. Πιο συγκεκριμένα, η συνάρτηση Contract-Spider-N_node εφαρμόζεται ως εξής.

Ο υπολογισμός των s-τιμών των κορυφών πετυχαίνεται σύμφωνα με ορισμένες παραμέτρους. Όπως με κάθε συστολική συνάρτηση, μια ενημέρωση των s-τιμών από δύο κορυφές εφαρμόζεται, που τώρα εξαρτάται από την ύπαρξη, ή μη, του συνόλου R εάν είναι κενό. Σημειώστε ότι, σε αντιστοιχία με τις τρεις φάσεις μιας γενικής συστολικής συνάρτησης, τα Βήματα 1–5 ανήκουν στην φάση υπολογισμού ενώ τα Βήματα 6–7 ανήκουν στην φάση ενημέρωσης και το Βήμα 8 ανήκει στην τελευταία φάση συρρίκνωσης.

Συνάρτηση **Contract-Spider**(t, T, r)

1. Εάν $r = -1$ τότε υπολόγισε τα σύνολα S, K, και R του γραφήματος $G(t)$, αλλιώς, εάν $r = 1$ υπολόγισε αυτά τα σύνολα στο γράφημα $\overline{G_t}$; έστω $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ και $K = \{v_{k+1}, \ldots, v_{2k}\}$; (σημειώστε ότι εάν $R \neq \emptyset$ τότε το σύνολο R περιέχει μόνο μια κορυφή, δηλαδή, $R = \{v_{2k+1}\}$)
   $\lambda_c \leftarrow 0;\quad \lambda_b \leftarrow 0;\quad \lambda_s \leftarrow 0;$
   για $i = 1, 2, \ldots, 2k$ **εκτέλεσε**
   $c_i \leftarrow -1;\quad b_i \leftarrow -1;$

2. Ενημέρωσε τις s-τιμές των κορυφών του συνόλου K ως εξής:
   για κάθε κορυφή $v_i \in K - \{v_{2k}\}$ **εκτέλεσε**
   $s(v_i) \leftarrow s(v_i) - \frac{1}{s(v_{i-k})} - r\cdot \quad c_i \leftarrow r \cdot \frac{s(v_k) - s(v_{i-k})}{s(v_k) \cdot s(v_{i-k})}; \quad b_i \leftarrow b_i + \frac{r}{s(v_{i-k})};$
   ενημέρωσε την s-τιμή της κορυφής $v_{2k} \in K$ ως εξής:
   $s(v_{2k}) \leftarrow s(v_{2k}) - \frac{1}{s(v_k)}\cdot \quad c_{2k} \leftarrow c_{2k} + \frac{r}{s(v_k)}; \quad b_{2k} \leftarrow b_{2k} + \frac{r}{s(v_k)};$

3. **εάν** $R \neq \emptyset$
   τότε {*το σύνολο R περιέχει μόνο μια κορυφή, δηλαδή, $R = \{v_{2k+1}\}$*}
   ενημέρωσε την s-τιμή της κορυφής $v_{2k+1} \in R$ ως εξής:
   $s(v_{2k+1}) \leftarrow s(v_{2k+1}) - r;$
   $c_{2k+1} \leftarrow -\frac{r}{s(v_k)};$
   $b_{2k+1} \leftarrow -1;$
   υπολόγισε τις ακόλουθους παραμέτρους:
   $\lambda_c \leftarrow \frac{c_{2k+1}}{s(v_{2k+1})}; \quad \lambda_b \leftarrow \frac{b_{2k+1}}{s(v_{2k+1})}; \quad \lambda_s \leftarrow \frac{1}{s(v_{2k+1})};$

4. Υπολόγισε τις ακόλουθες παραμέτρους:
   $$c_{2k} \leftarrow b_{2k} - r \cdot \left(\lambda_c + \sum_{i=k+1}^{2k-1} \frac{c_i}{s(v_i)} \right);$$
   $$b_{2k} \leftarrow b_{2k} - (r - s(v_{2k})) \cdot \left(\lambda_b + \sum_{i=k+1}^{2k-1} \frac{b_i}{s(v_i)} \right);$$

5. Ενημέρωσε την s-τιμή της κορυφής $v_{2k} \in K$ ως εξής:
   $$s(v_{2k}) \leftarrow s(v_{2k}) - r(r - s(v_{2k})) \cdot \left(\lambda_s + \sum_{i=k+1}^{2k-1} \frac{1}{s(v_i)} \right);$$

6. $\gamma \leftarrow \sum_{i=1}^{p} \frac{c_i \cdot b_i}{s(v_i)};$

7. Ενημέρωσε τις s-τιμές των κορυφών v_k και v_{2k} ως εξής:
   $s(v_k) \leftarrow s(v_k) \cdot s(v_{2k}) \cdot \gamma\cdot \quad s(v_{2k}) \leftarrow 1/\gamma;$

8. Αντικατέστησε το υποδέντρο με ρίζα τον κόμβο t με τον φύλλο/κόμβο που σχετίζεται με την κορυφή v_{2k};
   επέστρεψε το επεξεργασμένο δέντρο;

Αλγόριθμος 6: Contract-Spider

Επεξεργασία των N-κόμβων Δέντρου

Έστω ότι το γράφημα $G(t)$ είναι ένα πρώτο δέντρο. Βασιζόμενοι στα σύνολα επιπέδων ενός πρώτου δέντρου, υπολογίζουμε με έναν από κάτω προς τα πάνω τρόπο τις s-τιμές των κορυφών. Κάθε s-τιμή μιας κορυφής υπολογίζεται σύμφωνα με τις s-τιμές των παιδιών της, ενώ συγκεκριμένοι παράμετροι ενημερώνονται με παρόμοιο τρόπο. Τελικά, μια φάση ενημέρωσης και συρρίκνωσης εφαρμόζεται με τον ανάλογο τρόπο. Εδώ σημειώνουμε ότι αυτή η τεχνική βασίζεται σε έναν τύπο που έχει δωθεί στην εργασία [91]. Σημειώστε επίσης ότι η παράμετρος r της συνάρτησης εξαρτάται από το εάν το γράφημα $G(t)$ είναι ένα πρώτο δέντρο ή το συμπλήρωμά του είναι ένα πρώτο δέντρο.

Συνάρτηση **Contract-Tree**(t, T, r)

1. Εάν $r = -1$ τότε υπολόγισε τα σύνολα κόμβων $L_0, L_1, \ldots, L_h$ των επιπέδων $0, 1, \ldots, h$ του γραφήματος δέντρου $G(t)$, αλλιώς, εάν $r = 1$ υπολόγισε αυτά τα σύνολα στο γράφημα $\overline{G_t}$·
   για $i = 1, 2, \ldots, p$ **εκτέλεσε**
   $c_i \leftarrow -1$·

2. Με έναν από κάτω προς τα πάνω τρόπο, ενημέρωσε τις s-τιμές των κορυφών $v_1, v_2, \ldots, v_p$ ως εξής:
   για $i = 1, 2, \ldots, p$ **εκτέλεσε**
   2.1 $\quad s(v_i) \leftarrow s(v_i) - \displaystyle\sum_{j \in \mathrm{ch}(i)} \frac{1}{s(v_j)}$·
   2.2 $\quad c_i \leftarrow c_i - r \cdot \displaystyle\sum_{j \in \mathrm{ch}(i)} \frac{1}{s(v_j) \cdot c_j}$·

3. $\delta \leftarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{c_i^2}{s(v_i)}$ ·

4. Ενημέρωσε τις s-κορυφών των κορυφών v_{p-1} και v_p ως εξής:
   $s(v_{p-1}) \leftarrow s(v_{p-1}) \cdot s(v_p) \cdot \delta$· $\qquad s(v_p) \leftarrow 1/\delta$·

5. Αντικατέστησε το υποδέντρο με ρίζα τον κόμβο t με το φύλλο/κόμβο που σχετίζεται με την κορυφή v_p·
   επέστρεψε το επεξεργασμένο δέντρο·

Αλγόριθμος 7: Contract-Tree

Τα Βήματα 1–2 εκτελούν την φάση υπολογισμού, τα βήματα 3–4 εκτελούν την φάση ενημέρωσης και το Βήμα 5 εκτελεί την φάση συρρίκνωσης.

Επεξεργασία των N-κόμβων Κύκλου

Έστω ότι το γράφημα $G(t)$ είναι ένας άχορδος κύκλος και έστω $v_1 v_2 \cdots v_p$ να είναι ο άχορδος κύκλος. Ο υπολογισμός των s-τιμών των κορυφών εφαρμόζεται με έναν σειριακό τρόπο. Κάθε s-τιμή μιας κορυφής υπολογίζεται σύμφωνα με την s-τιμή της προηγούμενης κορυφής στην ακολουθία του κύκλου. Την ίδια στιγμή, η s-τιμή της κορυφής με τον υψηλότερο δείκτη υπολογίζεται. Όπως και στην προηγούμενη συνάρτηση, η παράμετρος r υπάρχει για να καθορίσει πότε η συνάρτηση εφαρμόζεται σε έναν άχορδο κύκλο ή στο συμπλήρωμά του.

Συνάρτηση **Contract-Cycle**(t, T, r)

1. Εάν $r = -1$ τότε υπολόγισε την ακολουθία των κορυφών τέτοια ώστε η ακολουθία $v_1 v_2 \cdots v_p$ να σχηματίζει έναν άχορδο κύκλο στο γράφημα $G(t)$, αλλιώς, εάν $r = 1$ υπολόγισε μια τέτοια ακολουθία στο γράφημα $\overline{G_t}$;
   $e \leftarrow r$;
   για $i = 1, 2, \ldots, p$ **εκτέλεσε**
   $c_i \leftarrow -1$;

2. Ενημέρωσε τις s-τιμές των κορυφών $v_1, v_2, \ldots, v_{p-1}$ ως εξής:
   για $i = 2, 3 \ldots, p-1$ **εκτέλεσε** {*απαλοιφή ενός σχεδόν-τριδιαγώνιου πίνακα*}
   2.1 $s(v_i) \leftarrow s(v_i) - \dfrac{r^2}{s(v_{i-1})}$;
   2.2 $c_i \leftarrow c_i - r \cdot \dfrac{c_{i-1}}{s(v_{i-1})}$;
   2.3 $s(v_p) \leftarrow s(v_p) - \dfrac{e^2}{s(v_{i-1})}$;
   2.4 $c_p \leftarrow c_p - \dfrac{e \cdot c_{i-1}}{s(v_{i-1})}$;
   2.5 $e \leftarrow \dfrac{e}{s(v_{i-1})}$;

3. Ενημέρωσε την s-τιμή της κορυφής v_p ως εξής:
   3.1 $e \leftarrow e + r$;
   3.2 $s(v_p) \leftarrow s(v_p) - \dfrac{e^2}{s(v_{p-1})}$;
   3.3 $c_p \leftarrow c_p - \dfrac{e \cdot c_{p-1}}{s(v_{p-1})}$;

4. $\delta \leftarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{c_i^2}{s(v_i)}$;

5. Ενημέρωσε τις s-τιμές των κορυφών v_{p-1} και v_p ως εξής:
   $s(v_{p-1}) \leftarrow s(v_{p-1}) \cdot s(v_p) \cdot \delta$; $\quad s(v_p) \leftarrow 1/\delta$;

6. Αντικατέστησε το υποδέντρο με ρίζα τον κόμβο t με το φύλλο/κόμβο που συσχετίζεται με την κορυφή v_p;
   επέστρεψε το επεξεργασμένο δέντρο;

Αλγόριθμος 8: Contract-Cycle

Η επεξεργασία στα Βήματα 2 και 3 μπορεί να θεωρηθεί ως μια απαλοιφή ενός συμμετρικού σχεδόν τριδιαγώνιου πίνακα μεγέθους $p \times p$. Ένας σχεδόν τριδιαγώνιος (tridiagonal) πίνακας είναι ένας τριδιαγώνιος πίνακας[1] με δύο επιπλέον μη-μηδενικά στοιχεία: τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα έχουν τιμή $s(v_i)$, τα πάνω από την διαγώνιο και τα κάτω από την διαγώνιο στοιχεία έχουν τιμή r και στις θέσεις $(1, p)$ και $(p, 1)$ υπάρχει η τιμή e. Έτσι, τα Βήματα 2 και 3 μετασχηματίζουν τον πίνακα σε έναν διαγώνιο πίνακα, ενώ οι συγκεκριμένες παράμετροι c_i ενημερώνονται κατά την διάρκεια των μετασχηματισμών.

[1] Ένας *τριδιαγώνιος*(tridiagonal) πίνακας είναι ένας τετραγωνικός πίνακας με μη-μηδενικές τιμές μόνο στην κύρια διαγώνιο και στις πρώτες διαγωνίους κάτω και πάνω από την κύρια διαγώνιο.

Επεξεργασία των N-κόμβων Συμπληρωμάτων

Έστω το γράφημα $\overline{G(t)}$ να είναι ένα αραιό αραχνοειδές γράφημα, ή ένα πρώτο δέντρο ή ένας άχορδος κύκλος. Σε αυτήν την περίπτωση, η συνάρτηση Handle-Complement-N_node(t, T) είναι υπεύθυνη για το κάλεσμα των αντίστοιχων συναρτήσεων συρρίκνωσης, δηλαδή, Contract-Spider, Contract-Tree, ή Contract-Cycle, με $r = 1$. Η τυπική περιγραφή της συνάρτησης Handle-Complement-N_node δίνεται παρακάτω:

Συνάρτηση **Handle-Complement-N_node**(t, T)

1. **για** κάθε κορυφή v_i, $1 \le i \le p$, **εκτέλεσε**
   $s(v_i) \leftarrow s(v_i) + 1;$
   $r \leftarrow 1;$

2. **εάν** το συμπλήρωμα του αντιπροσωπευτικού γραφήματος $G(t)$ είναι ένα αραιό αραχνοειδές γράφημα
   τότε $T \leftarrow$ *Contract-Spider-N_node*$(t, T, 1)$;
   αλλιώς εάν το συμπλήρωμα του αντιπροσωπευτικού γραφήματος $G(t)$ είναι ένα δέντρο
   τότε $T \leftarrow$ *Contract-Tree-N_node*$(t, T, 1)$;
   αλλιώς $T \leftarrow$ *Contract-Cycle-N_node*$(t, T, 1)$;

3. Ενημέρωσε την s-τιμή της κορυφής v_p ως εξής: $s(v_p) \leftarrow s(v_p) - 1;$
   επέστρεψε το επεξεργασμένο δέντρο;

Αλγόριθμος 9: Handle-Complement-N_node

4.3.2 Επεξεργασία των Μη-βασικών N-κόμβων

Έστω το αντιπροσωπευτικό γράφημα $G(t)$ να είναι ένα γράφημα το οποίο δεν είναι ένα βασικό γράφημα. Τότε, εκμεταλλευόμαστε το Θεώρημα του πίνακα-δέντρου, Kirchhoff (δείτε Ενότητα 4.4 για λεπτομέρειες) και εφαρμόζουμε μια Gauss-Jordan βασισμένη τεχνική. Η τυπική περιγραφή αυτής της συνάρτησης Contract-NonBasic-N_node(t, T), που ελέγχει αυτήν την περίπτωση, είναι η εξής:

Είναι εύκολο να παρατηρήσει κανείς τα βήματα της συνάρτησης Contract-NonBasic-N_node σε σχέση με τις τρεις φάσεις μιας συνάρτησης συρρίκνωσης. Τα πρώτα δύο βήματα είναι η φάση υπολογισμού, τα Βήματα 3–4 ανήκουν στην φάση ενημέρωσης και το Βήμα 5 ανήκει στην φάση συρρίκνωσης.

Συνάρτηση **Contract-NonBasic-N_node**(t, T)

1. Κατασκεύασε των $p \times p$ Kirchhoff πίνακα B του γραφήματος $G(t)$, όπου $v_1, v_2, \ldots, v_p$ είναι οι κορυφές/παιδιά του κόμβου t;
   για $i = 1, 2, \ldots, p$ **εκτέλεσε**
   $B[i,i] \leftarrow s(v_i)$;
   $c_i \leftarrow -1$;

2. **για** $i = 1, 2, \ldots, p-1$ **εκτέλεσε** $\{$*Gauss-Jordan απαλοιφή*$\}$
   2.1 **για** $j = i+1, i+2, \ldots, p$ **εκτέλεσε**
   $r \leftarrow B[j,i]/B[i,i]$;
   $c_j \leftarrow c_j - r \cdot c_i$;
   για $k = i, i+1, \ldots, p$ **εκτέλεσε**
   $B[j,k] \leftarrow B[j,k] - r \cdot B[i,k]$;
   2.2 επανέλαβε το Βήμα 2.1 με εναλλαγή των γραμμών και των στηλών στον πίνακα $B[\,,\,]$, έτσι ώστε
   να ολοκληρωθεί η Gauss-Jordan απαλοιφή;

3. $\beta \leftarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{c_i^2}{B[i,i]}$;

4. Ενημέρωσε τις s-τιμές των κορυφών $v_1, v_2, \ldots, v_p$ ως εξής:
   για $i = 1, 2, \ldots, p-2$ **εκτέλεσε**
   $s(v_i) \leftarrow B[i,i]$;
   $s(v_{p-1}) \leftarrow B[p-1, p-1] \cdot B[p,p] \cdot \beta$; $s(v_p) \leftarrow 1/\beta$;

5. Αντικατέστησε το υποδέντρο με ρίζα τον κόμβο t με το φύλλο/κόμβο που συσχετίζεται με την κορυφή v_p;
   επέστρεψε το επεξεργασμένο δέντρο;

Αλγόριθμος 10: Contract-NonBasic-N_node

4.4 Ορθότητα του Αλγορίθμου

Η απόδειξη της ορθότητας του αλγορίθμου Spanning_Trees-Number βασίζεται στο Θεώρημα του πίνακα-δέντρου, Kirchhoff· δείχνουμε ότι η τιμή που επιστρέφει ο αλγόριθμος Spanning_Trees-Number ισούται με τον συντελεστή μ_n^n του Kirchhoff πίνακα του συγκεκριμένου γραφήματος. Το πλεονέκτημα της μεθόδου μας σε σχέση με τον υπολογισμό της ορίζουσας του συντελεστή είναι ότι γλιτώνουμε χρόνο (και χώρο) επεξεργάζοντας αυτοτελείς-μονάδες, εφόσον κάθε κορυφή έξω από την αυτοτελή-μονάδα είτε βλέπει όλες τις κορυφές της αυτοτελούς-μονάδας ή χάνει όλες τις κορυφές.

Το Θεώρημα του πίνακα-δέντρου, Kirchhoff (Θεώρημα 1.2) επάγει ότι το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος G ισούται με έναν οποιονδήποτε από τους συντελεστές του Kirchhoff πίνακα K όπως ορίστηκε στην ενότητα 1.1.1, και έτσι, με την ορίζουσα του $(n-1) \times (n-1)$ υποπίνακα M του πίνακα K που σχηματίζται από τις πρώτες $n-1$ γραμμές και τις πρώτες $n-1$ στήλες. Χρειαζόμαστε να θεωρήσουμε την επεξεργασία των συστολικών υποδέντρων με ρίζα έναν a P-κόμβο, έναν S-κόμβο, και έναν N-κόμβο (έναν βασικό N-κόμβο ή έναν μη-βασικό N-κόμβο). Έστω ένα γράφημα G με n κορυφές και έστω οι p κορυφές $v_1, v_2, \ldots v_p$ που ορίζουν μια αυτοτελή-μονάδα στο γράφημα G. Σε σχέση με αυτήν την αυτοτελή-μονάδα, η μορφή του πίνακα M είναι η εξής:

$$
M = \left[\begin{array}{ccc:cccc}
d(v_1) & & (-1)_{i,j'} & (-1)_{1,p+1} & & & (-1)_{1,n-1} \\
& \ddots & & & & (-1)_{i,j} & \vdots \\
(-1)_{j',i} & & d(v_p) & (-1)_{p,p+1} & & & (-1)_{p,n-1} \\ \hdashline
(-1)_{p+1,1} & \cdots & (-1)_{p+1,p} & d(v_{p+1}) & & & \\
& & & & \ddots & (-1)_{i',j'} & \\
& (-1)_{j,i} & & & & d(v_j) & \\
& & & & (-1)_{j',i'} & & \ddots \\
(-1)_{n-1,1} & \cdots & (-1)_{n-1,p} & & & & d(v_{n-1})
\end{array}\right], \tag{4.1}
$$

όπου $d(v_i)$, $1 \leq i \leq n-1$, είναι ο βαθμός της κορυφής v_i στο γράφημα G. Η σημειογραφία $(-1)_{i,j}$ για τα μη-διαγώνια (i,j)-στοιχεία εκφράζει ότι τα στοιχεία είνια ίσα με -1 εάν οι κορυφές v_i και v_j είναι γειτονικές στο γράφημα G και είνια ίσες με 0 αλλιώς. Παρόμοια, τα στοιχεία (i',j) και (j,i') (αντίστ. τα στοιχεία (i,j') και (j',i)) είναι και τα δύο -1 εάν οι κορυφές $v_{i'}$ και v_j (αντίστ. v_i και $v_{j'}$) είναι γειτονικές στο γράφημα G και είναι ίσες με 0 αλλιώς, $1 \leq i' \leq p$ (αντίστ. $p+1 \leq j' \leq n-1$). Σημειώνουμε ότι, τα μη-διαγώνια στοιχεία στις πρώτες p γραμμές και p στήλες του πίνακα M εξαρτώνται από τον τύπο της αυτοτελούς-μονάδας που σχηματίζεται από τις κορυφές $v_1, v_2, \ldots, v_p$ (αναλόγως εάν σχηματίζεται από έναν P-κόμβο, έναν S-κόμβο ή έναν N-κόμβο). Επιπρόσθετα, εφόσον οι πρώτες p κορυφές επάγουν μια αυτοτελή-μονάδα στο γράφημα G, οι γραμμές του M υποπίνακα που σχηματίζονται από τις γραμμές $1, 2, \ldots, p$ και τις στήλες $p+1, p+2, \ldots, n-1$ είναι ίδιες και παρόμοιες, και οι στήλες του M υποπίνακα που σχηματίζονται από τις γραμμές $p+1, p+2, \ldots, n-1$ και τις στήλες $1, 2, \ldots, p$ είναι ίδιες.

Είναι ξεκάθαρο από το Θεώρημα 1.2 ότι $\tau(G) = \det(M)$· σημειώστε ότι ο αριθμός $\tau(G)$ εκφράζει το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος G. Αξίζει να σημειωθεί ότι, στο Βήμα 1 του αλγορίθμου Spanning_Trees_Number συσχετίζουμε μια s-τιμή που αρχικοποιείται στον βαθμό της κορυφής στο γράφημα G. Με σκοπό τον υπολογισμό της ορίζουσας του πίνακα M μηδενίζουμε τα μη-διαγώνια στοιχεία που βρίσκονται στον $p \times p$ υποπίνακα των πρώτων p γραμμών και p στηλών. Αυτή η εργασία πετυχαίνεται από την φάση υπολογισμού μιας συνάρτησης συστολής. Σημειώστε ότι, η μορφή του υποπίνακα εξαρτάται από τον τύπο του γραφήματος $G(t)$.

- Έστω ένα χωρίς-ακμές γράφημα $G(t)$ με p κορυφές (που επάγεται από έναν P-κόμβο t). Τότε ο $p \times p$ υποπίνακας είναι διαγώνιος εφόσον δεν υπάρχουν ακμές στο γράφημα $G(t)$. Η περίπτωση όπου το γράφημα $G(t)$ σχετίζεται με έναν S-κόμβο χειρίζεται με έναν παρόμοιο τρόπο (δείτε Ενότητα 4.4.1).

- Έστω το γράφημα $G(t)$ ένα δέντρο γράφημα. Στην εργασία [91], ένας τύπος βασισμένος στην ορίζουσα έχει δειχθεί με σκοπό τον υπολογισμό του πλήθους των σκελετικών δέντρων του γραφήματος $K_n - G$, όπου το γράφημα G είναι ένα δέντρο γράφημα. Η συνάρτηση Contract-Tree-N_node βασίζεται σε παρόμοια αντιμετώπιση· για μια λεπτομερή απόδειξη, δείτε [91].

- Έστω το γράφημα $G(t)$ ένας άχορδος κύκλος γράφημα. Σε αυτήν την περίπτωση, η μορφή του $p \times p$ υποπίνακα είναι παρόμοια με έναν τριδιαγώνιο συμμετρικό πίνακα. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η απαλοιφή ενός συμμετρικού τριδιαγώνιου πίνακα απαιτεί μόνο $O(n)$ μετασχηματισμούς που εκτελούνται στην φάση υπολογισμού της συνάρτησης Contract-Cycle-N_node.

- Έστω το γράφημα $G(t)$ να είναι ένα αραιό αραχνοειδές γράφημα. Αυτή η περίπτωση είναι σχετικά πολύπλοκη, παρ' όλο που βασίζεται σε κλασικές πράξεις πινάκων. Αποδεικνύουμε αυτούς τους μετασχηματισμούς στην Ενότητα 4.4.2.

- Έστω το γράφημα $G(t)$ να είναι το συμπλήρωμα ενός βασικού γραφήματος. Σε αυτήν την περίπτωση αναφερόμαστε στην Ενότητα 4.4.2.

- Έστω το γράφημα $G(t)$ να είναι ένα μη-βασικό γράφημα. Η φάση υπολογισμού της συνάρτησης Contract-NonBasic-N_node εφαρμόζει μια Gauss-Jordan απαλοιφή στον υποπίνακα που σχηματίζεται από τις πρώτες p γραμμές και p στήλες του πίνακα M και έτσι ο υποπίνακας μετατρέπεται σε διαγώνιο.

Μετασχηματίζουμε τον πίνακα M με κλασικές τεχνικές από την γραμμική άλγεβρα σε έναν άλλο πίνακα M_1, κάνοντας τον υποπίνακα $p \times p$ σε διαγώνιο πίνακα, έτσι ώστε $\det(M) = \det(M_1)$. Τότε ο πίνακας M_1 είναι μεγέθους $(n-1) \times (n-1)$, παρόμοιος του πίνακα M, και έχει την ακόλουθη μορφή:

$$M_1 = \left[\begin{array}{ccc:cccc}
s(v_1) & & 0 & (c_1)_{1,p+1} & & & (c_1)_{1,n-1} \\
& \ddots & & & & (c_i)_{i,j} & \vdots \\
0 & & s(v_p) & (c_p)_{p,p+1} & & & (c_p)_{p,n-1} \\
\hdashline
(b_1)_{p+1,1} & \cdots & (b_p)_{p+1,p} & s(v_{p+1}) & & & \\
& & & & \ddots & (-1)_{i',j'} & \\
& (b_i)_{j,i} & & & & s(v_j) & \\
& & & & (-1)_{j',i'} & & \ddots \\
(b_1)_{n-1,1} & \cdots & (b_p)_{n-1,p} & & & & s(v_{n-1})
\end{array}\right], \quad (4.2)$$

όπου τα στοιχεία $(c_i)_{i,j}$ και $(b_i)_{j,i}$, $1 \leq i \leq p \leq j \leq n-1$ έχουν τιμές c_i και b_i, αντίστοιχα, εάν οι κορυφές v_i και v_j είναι γειτονικές στο γράφημα G και είναι 0 αλλιώς. Η διαφορά του πίνακα M_1 από τον πίνακα M είναι ότι έχει όλες τα μη-διαγώνια στοιχεία των πρώτων p γραμμών και p στηλών ίσα με μηδέν. Οι τιμές των c_i και b_i, $p < i \leq n-1$, των αντίστοιχων γραμμών και στηλών του πίνακα M_1 εξαρτώνται από τον τύπο των μετασχηματισμών που εφαρμόζουμε πάνω στον πίνακα M. Υπενθυμίζουμε ότι, σε σχέση με τις συναρτήσεις συρρίκνωσης, αυτοί οι υπολογισμοί εκτελούνται στην φάση υπολογισμού. Το ακόλουθο λήμμα αποδεικνύει το ουσιαστικό βήμα της συρρίκνωσης ενός υποδέντρου στην κορυφή με τον υψηλότερο δείκτη v_p, που εφαρμόζεται σε όλες τις συναρτήσεις συρρίκνωσης, παρόμοια με την φάση ενημέρωσης και υπολογισμού.

Λήμμα 4.1. *Για την ορίζουσα του πίνακα M_1 της Εξ. (4.2) έχουμε ότι*

$$\det(M_1) = \left(\prod_{i=1}^{p-2} s(v_i)\right) \cdot s(v_{p-1}) \cdot s(v_p) \cdot \theta \cdot \det(M'),$$

όπου $\theta = \sum_{i=1}^{p} \frac{b_i c_i}{s(v_i)}$ *και M' είναι ένας $(n-p) \times (n-p)$ πίνακας της μορφής*

$$M' = \begin{bmatrix}
s'(v_p) & & & (-1)_{p,j} & & \\
& s(v_{p+1}) & & & & \\
& & \ddots & & (-1)_{i',j'} & \\
(-1)_{j,p} & & & s(v_j) & & \\
& & (-1)_{j',i'} & & \ddots & \\
& & & & & s(v_{n-1})
\end{bmatrix},$$

όπου $s'(v_p) = \frac{1}{\theta}$.

Απόδειξη. Με σκοπό τον υπολογισμό της ορίζουσας του πίνακα M_1, μηδενίζουμε τα μη-διαγώνια στοιχεία των πρώτων $p-1$ γραμμών: για κάθε $i = 1, 2, \ldots, p-1$, πολλαπλασιάζουμε την γραμμή p με $-c_i/c_p$ και την προσθέτουμε στην γραμμή i, και επομένως, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, p-1$, πολλαπλασιάζουμε την στήλη i με $\frac{c_i \cdot s(v_p)}{c_p \cdot s(v_i)}$ και την προσθέτουμε στην στήλη p. Ως αποτέλεσμα, μόνο τα διαγώνιες στοιχεία των πρώτων $p-1$ γραμμών έχουν μη-μηδενικές τιμές, που ισούνται με $s(v_i)$. Επίσης, εάν θ είναι η τιμή που ορίζεται στο λήμμα, όλα τα μη-μηδενικά στοιχεία στις θέσεις (i,p) της στήλης p έχουν τώρα την ίδια τιμή $\frac{s_p}{c_p} \cdot \theta$ και όλα τα μη-μηδενικά στοιχεία στις θέσεις (p,i) της γραμμής p έχουν τώρα την ίδια τιμή c_p, $p+1 \leq i \leq n-1$· αυτά τα μη-μηδενικά στοιχεία είχαν τιμή ίση με -1 στον αρχικό πίνακα M. Με σκοπό να τα κάνουμε ίσα με -1, διαιρούμε τα στοιχεία της γραμμής με c_p και της στήλης p με $\frac{s_p}{c_p} \cdot \theta$, και τότε έτσι ώστε να διατηρήσουμε την τιμή της ορίζουσας αμετάβλητη, πολλαπλασιάζουμε την γραμμή $p-1$ με $s_p \cdot \theta$. Έτσι, αναπτύσσοντας ως προς τις πρώτες $p-1$ γραμμές, βρίσκουμε ότι η ορίζουσα του πίνακα M_1 γίνεται

$$
\begin{aligned}
\det(M_1) &= \left(\prod_{i=1}^{p-1} s'(v_i) \right) \cdot \begin{vmatrix} s'(v_p) & & & (-1)_{p,j} & & & \\ & s(v_{p+1}) & & & & & \\ & & \ddots & & (-1)_{i',j'} & & \\ (-1)_{j,p} & & & s(v_j) & & & \\ & & (-1)_{j',i'} & & \ddots & & \\ & & & & & & s(v_{n-1}) \end{vmatrix} \\
&= \left(\prod_{i=1}^{p-1} s'(v_i) \right) \cdot \det(M'),
\end{aligned}
$$

όπου

$$
\begin{aligned}
s'(v_i) &= s(v_i), \qquad 1 \leq i \leq p-2 \\
s'(v_{p-1}) &= s(v_{p-1}) \cdot s(v_p) \cdot \theta \\
s'(v_p) &= s(v_p) \cdot \frac{1}{c_p} \cdot \frac{c_p}{s(v_p) \cdot \theta} = \frac{1}{\theta}. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας M' είναι ένας $(n-p) \times (n-p)$ πίνακας παρόμοιος με τον αρχικό πίνακα M· στην πραγματικότητα, είναι πανομοιότυπος με τον υποπίνακα του αρχικού πίνακα M που σχηματίζεται από τις γραμμές $p, p+1, \ldots, n-1$ και τις στήλες columns $p, p+1, \ldots, n-1$, με την μόνη διαφορά ότι η τιμή $s'(v_p)$ διαφέρει από την τιμή της $s(v_p)$. Έτσι, εάν υποθέσουμε (με έναν επαγωγικό τρόπο) ότι η ορίζουσα του πίνακα M' μπορεί να εκφραστεί ως το γινόμενο των κατάλληλων τιμών $s'(v_p), s'(v_{p+1}), \ldots, s'(v_{n-1})$, τότε η ορίζουσα του αρχικού πίνακα M είναι ίση με το γινόμενο αυτών των τιμών πολλαπλασιαζόμενες με το γινόμενο των τιμών $s(v_1), s(v_2), \ldots, s(v_{p-1})$, όπως κάνει ο αλγόριθμος Spanning_Trees-Number. Έτσι, αρκεί να καθορίσει κανείς τους τύπους των μετασχηματισμών που εφαρμόζουμε πάνω στον πίνακα M και να τεκμηριώσουμε τις τιμές των $s(v_i)$, $1 \leq i \leq p$, που υπολογίζει η κάθε συνάρτηση.

Έτσι, από το προηγούμενο λήμμα καθιερώνουμε την φάση ενημέρωσης και συρρίκνωσης σε κάθε συνάρτηση συρρίκνωσης. Αξίζει να σημειωθεί ότι σε πολλές περιπτώσεις ο πίνακας M_1 της Εξ. (4.2) είναι συμμετρικός και, επομένως, οι τιμές των b_i και c_i είναι ίσες.

4.4.1 Επεξεργασία ενός Συμπληρωματικού N-κόμβου

Έστω ο κόμβος t να είναι ένας συρρικνώσιμος κόμβος και θεωρείστε οι κορυφές/παιδιά του κόμβου t είναι $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$· σημειώνουμε ότι το σύνολο B επάγει ένα πρώτο γράφημα $G(t)$ όπου $\overline{G(t)}$ είναι ένα βασικό γράφημα. Σε αυτή την περίπτωση, ο πίνακας M έχει την μορφή της Εξ. (4.1).

Προσθέτουμε μια νέα πρώτη γραμμή και στήλη στον πίνακα M. Τα στοιχεία της πρώτης γραμμής $(1, i)$, $2 \leq i \leq p$, είναι ίσα με -1, εκτός του διαγώνιου στοιχείου που έχει τιμή 1, και όλες οι υπόλοιπες τιμές των στοιχείων της νέας γραμμής και στήλης είναι ίσες με 0. Αυτή η πρόσθεση γραμμής και στήλης διατηρεί την τιμή της ορίζουσας του πίνακα M.

Με σκοπό να υπολογίσουμε την ορίζουσα $\det(M)$, πολλαπλασιάζουμε τη πρώτη γραμμή με -1 και την προσθέτουμε στις p επόμενες γραμμές. Τώρα τα $(-1)_{j,i'}$ στοιχεία το αρχικού πίνακα, θα έχουνε τιμή 0, εάν ήταν -1 στον αρχικό πίνακα, και επίσης θα έχουν τιμή 1, εάν είχαν 0 στον αρχικό πίνακα. Τότε, η ορίζουσα του πίνακα M μετατρέπεται ως εξής:

$$\det(M) = \left|\begin{array}{ccccc:cccc}
1 & -1 & \cdots & -1 & & & & & \\
-1 & s(v_1)+1 & & \overline{(-1)}_{j,i'} & & (-1)_{1,p+1} & & & (-1)_{1,n-1} \\
\vdots & & \ddots & & & \vdots & (-1)_{j,i} & & \vdots \\
-1 & \overline{(-1)}_{i',j} & & s(v_p)+1 & & (-1)_{p,p+1} & & & (-1)_{p,n-1} \\
\hdashline
 & (-1)_{p+1,1} & \cdots & (-1)_{p+1,p} & & s(v_{p+1}) & (-1)_{j',i} & & \\
 & & & & & & \ddots & & \\
 & & (-1)_{i,j} & & & (-1)_{i,j'} & s(v_i) & & \\
 & & & & & & & \ddots & \\
 & (-1)_{n-1,1} & \cdots & (-1)_{n-1,p} & & & & & s(v_{n-1})
\end{array}\right|$$

$$= \left|\begin{array}{ccccc}
D & & (-1)_{j,i} & & \\
 & s(v_{p+1}) & (-1)_{j',i} & & \\
 & & \ddots & & \\
(-1)_{i,j} & & (-1)_{i,j'} & s(v_i) & \\
 & & & \ddots & \\
 & & & & s(v_{n-1})
\end{array}\right|,$$

όπου ο πίνακας D έχει μέγεθος $(p+1)\times(p+1)$. Οι εγγραφές $\overline{(-1)}_{i',j}$ και $\overline{(-1)}_{j,i'}$ των μη-διαγώνιων θέσεων (i', j) και (j, i') του πίνακα M είναι και οι δύο 0 εάν οι κορυφές $v_{i'}$ και v_j είναι γειτονικές στο γράφημα $G(t)$ (ή αλλιώς, έχου τιμή 1 εάν οι κορυφές $v_{i'}$ και v_j είναι γειτονικές στο γράφημα $\overline{G_t}$) και έχουν τιμή 1 αλλιώς, $1 \leq i',\ j \leq p$. Παρατηρούμε ότι ο πίνακας D είναι παρόμοιος με τον υποπίνακα που αντιστοιχεί με το βασικό γράφημα $\overline{G_t}$. Το βασικό γράφημα $\overline{G_t}$ μπορεί να ειδωθεί ως ένα βασικό γράφημα με τρεις επιπλέον διαφορές:

- το γράφημα $\overline{G_t}$ έχει $p+1$ κορυφές $v_0, v_1, \ldots, v_p$ με s-τιμές $s'(v_0) = 1$ και $s'(v_i) = s(v_i)+1$, $1 \leq i \leq p$· αυτό εκτελείται στο Βήμα 1 της συνάρτησης Handle-Complement-N_node, εφόσον αυξάνει κατά 1 τις s-τιμές των κορυφών.
- Εάν δύο κορυφές v_i και v_j, $0 \leq i\ j \leq p$ είναι γειτονικές στο γράφημα $\overline{G_t}$, τότε η εγγραφή στην αντίστοιχη εγγραφή του πίνακα D είναι ίση με 1 (υπενθυμίζουμε ότι, η αρχική τιμή ήταν -1) · έτσι, οι δύο συναρτήσεις Contract-Tree-N_node και Contract-Cycle-N_node εφαρμόζονται από την παράμετρο r, που είναι ίση με -1 εάν το γράφημα $G(t)$ είναι ένα βασικό γράφημα ή αλλιώς είναι ίση με 1 εάν το συμπλήρωμα του γραφήματος $G(t)$ είναι ένα βασικό γράφημα.
- Η κορυφή v_0 είναι γειτονική με όλες τις κορυφές v_i στο γράφημα $\overline{G_t}$, $1 \leq i \leq p$ και έτσι οι κορυφές $v_1, v_2, \ldots v_p$ σχηματίζουν μια αυτοτελή-μονάδα.

Κρατώντας αυτούς τους περιορισμούς, μπορούμε να εφαρμόσουμε παρόμοιες πράξεις με αυτές που είχαμε εφαρμόσει για το βασικό γράφημα $\overline{G(t)}$. Τότε μπορούμε επίσης να εφαρμόσουμε το Λήμμα 4.1 και να υπολογίσουμε τις s-τιμές των κορυφών $v_1, v_2, \ldots v_p$. Τελικά, καταλήγουμε στο ότι η ορίζουσα $\det(M)$ είναι ίση με:

$$
\begin{aligned}
\det(M) &= \left(\prod_{i=1}^{p-1} s(v_i)\right) \cdot \begin{vmatrix}
1 & -1 & & & & & \\
-1 & s(v_p) & & & (-1)_{p,j} & & \\
 & & s(v_{p+1}) & & & & \\
 & & & \ddots & & (-1)_{i',j'} & \\
 & (-1)_{j,p} & & & s(v_j) & & \\
 & & & (-1)_{j',i'} & & \ddots & \\
 & & & & & & s(v_{n-1})
\end{vmatrix} \\
&= \left(\prod_{i=1}^{p-1} s(v_i)\right) \cdot \begin{vmatrix}
s(v_p)-1 & & & (-1)_{p,j} & & \\
 & s(v_{p+1}) & & & & \\
 & & \ddots & & (-1)_{i',j'} & \\
(-1)_{j,p} & & & s(v_j) & & \\
 & & (-1)_{j',i'} & & \ddots & \\
 & & & & & s(v_{n-1})
\end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Έτσι, η τιμή $s(v_p) - 1$ αιτιολογεί την ενημέρωση της s-τιμής της κορυφής v_p στο Βήμα 3 της συνάρτησης Handle-Complement-N_node.

4.4.2 Επεξεργασία ενός N-κόμβου Αραχνοειδούς Γραφήματος

Έστω ο κόμβος t να είναι ένας N-κόμβος τέτοιος ώστε ο υποδέντρο με ρίζα τον κόμβο t να είναι συστολικό και το αντιπροσωπευτικό γράφημα $G(t)$ να είναι ένα αραιό αραχνοειδές γράφημα. Τότε, εάν υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι οι κορυφές/παιδιάτου κόμβου t είναι $v_1, v_2, \ldots, v_p$, που μπορούν να διαμεριστούν στ σύνολα $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, $K = \{v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_{2k}\}$, και R που είναι είτε κενό (σε αυτήν την περίπτωση, $p = 2k$) ή $R = \{v_{2k+1}\}$ (τότε, $p = 2k+1$). Έστω ότι υποθέτουμε για την ώρα ότι $R \neq \emptyset$· τότε, ο πίνακας M είναι:

$$
M = \left[\begin{array}{cccc|cccc|c|c}
s(v_1) & 0 & & 0 & r & & & & 0 & \\
0 & s(v_2) & & & & r & & & 0 & \\
 & & \ddots & & & & \ddots & & \vdots & \\
0 & & & s(v_k) & & & & r & 0 & \\
\hline
r & & & & s(v_{k+1}) & r & \cdots & r & r & Z_1 \\
 & r & & & r & s(v_{k+2}) & \cdots & r & r & \\
 & & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\
 & & & r & r & r & \cdots & s(v_{2k}) & r & \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & r & r & \cdots & r & s(v_{2k+1}) & \\
\hline
\multicolumn{9}{c|}{Z_2} & Z
\end{array}\right],
$$

όπου η παράμετρος r είναι ίση με -1 ή 1 που αναπαριστά τις γειτνιάσεις σε ένα αραιό ή πυκνό αραχνοειδές γράφημα, αντίστοιχα· Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, το συμπλήρωμα ενός αραιού αραχνοειδούς γραφήματος είναι ένα πυκνό αραχνοειδές γράφημα. Τα στοιχεία των πινάκων Z_1 και Z_2 είναι ίσα με -1 και 0 που εξαρτάται από το εάν οι αντίστοιχες κορυφές είναι γειτονικές στο γράφημα ή όχι, και ο πίνακας Z είναι ένας $(n-p-1) \times (n-p-1)$ υποπίνακας της μορφής

$$Z = \begin{bmatrix} s(v_{p+1}) & & (-1)_{j',i} & & \\ & \ddots & & & \\ (-1)_{i,j'} & & s(v_i) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & s(v_{n-1}) \end{bmatrix}.$$

Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι, εξαιτίας του ότι το αραχνοειδές γράφημα είναι μια αυτοτελή-μονάδα, οι στήλες του υποπίνακα Z_1 είναι πανομοιότυπες, όπως επίσης και οι γραμμές του υποπίνακα Z_2.

Για να υπολογίσουμε την ορίζουσα $\det(M)$ του πίνακα M, εκτελούμε τα ακόλουθα:

1. *Μηδενίζουμε τα μη-διαγώνια στοιχεία των πρώτων k γραμμών και στηλών του πίνακα M:* Για να το πετύχουμε αυτό,

   ▷ πολλαπλασιάζουμε την στήλη j, για $1 \leq j \leq k$, με $-r/s(v_j)$, και την προσθέτουμε στην στήλη $k+j$, αντίστοιχα·

   ▷ πολλαπλασιάζουμε την γραμμή j, για $1 \leq j \leq k$, με $-r/s(v_j)$, και την προσθέτουμε στην γραμμή $k+j$, αντίστοιχα.

   Σημειώνουμε ότι μετά την εκτέλεση των παραπάνω πράξεων τα διαγώνια στοιχεία (i,i), για $k+1 \leq i \leq 2k$, του πίνακα M έχουν τιμές $s(v_i) - \frac{r^2}{s(v_{i-k})}$. Εφόσον η τιμή r είναι ίση με -1 ή 1, έχουμε ότι $r^2 = 1$. Όλα τα μη-διαγώνια στοιχεία των (i,j) θέσεων και των συμμετρικών, για $k+1 \leq i \leq 2k$ και $p+1 \leq j \leq n-1$, έχουν τιμές

   $$b_i = -1 + \frac{r}{s(v_{2k-i})}.$$

   Προσέξτε ότι αυτή η τιμή αναθέτεται στις μεταβλητές b_i της συνάρτησης Contract-Spider-N_node στο Βήμα 2. Πιο συγκεκριμένα, ο πίνακας M γίνεται:

$$M = \left[\begin{array}{cccc|cccccc} s(v_1) & & & & & & & & & (-1)_{1,j} \\ & s(v_2) & & & & & & & & (-1)_{2,j} \\ & & \ddots & & & & & & & \vdots \\ & & & s(v_k) & & & & & & (-1)_{k,j} \\ \hline & & & & s(v_{k+1}) - \frac{1}{s(v_1)} & r & \cdots & r & r & (b_{k+1})_{k+1,j} \\ & & & & r & s(v_{k+2}) - \frac{1}{s(v_2)} & \cdots & r & r & (b_{k+2})_{k+2,j} \\ & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & r & r & \cdots & s(v_{2k}) - \frac{1}{s(v_k)} & r & (b_{2k})_{2k,j} \\ & & & & r & r & \cdots & r & s(v_{2k+1}) & (-1)_{2k+1,j} \\ (-1)_{j,1} & (-1)_{j,2} & \cdots & (-1)_{j,k} & (b_{k+1})_{j,k+1} & (b_{k+2})_{j,k+2} & \cdots & (b_{2k})_{j,2k} & (-1)_{j,2k+1} & Z \end{array}\right].$$

2. *Μηδενίζουμε τα μη-διαγώνια στοιχεία των γραμμών $k+1, k+2, \ldots, 2k+1$ του πίνακα M:* Για να το πετύχουμε αυτό,

▷ πολλαπλασιάζουμε την γραμμή $2k$ με -1, και την προσθέτουμε στις γραμμές j, για $k+1 \leq j \leq 2k+1$.

Τότε τα διαγώνια στοιχεία των $k+1, k+2, \ldots, 2k-1$ γραμμών έχουν τιμές $s'(v_i) = s(v_i) - \frac{1}{s(v_{i-k})} - r$, για $k+1 \leq i \leq 2k-1$. Αξίζει να σημειώσουμε ότι αυτές οι τιμές αναθέτονται στις s-τιμές των αντίστοιχων κορυφών στο Βήμα 2 της συνάρτησης Contract-Spider-N_node. Για να είμαστε συνεπής με τις τιμές που αναθέτονται στην συνάρτηση, έστω

$$\begin{aligned} c_i &= b_i - b_{2k} = r \cdot \frac{s(v_k) - s(v_{i-k})}{s(v_k) \cdot s(v_{i-k})}, \quad \text{for } k \leq i \leq 2k-1, \\ c_{2k} &= b_{2k}, \quad \text{and} \\ c_{2k+1} &= -1 - b_{2k} = -\frac{r}{s(k)}. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές $s'(v_{2k}) = s(v_{2k}) - \frac{1}{s(v_k)}$ και $s'(v_{2k+1}) = s(v_{2k+1}) - r$ των θέσεων $(2k, 2k)$ και $(2k+1, 2k+1)$ αντίστοιχα, θα έχουμε:

$$M = \left[\begin{array}{cccc|cccccc} s(v_1) & & & & & & & & & (-1)_{1,j} \\ & s(v_2) & & & & & & & & (-1)_{2,j} \\ & & \ddots & & & & & & & \vdots \\ & & & s(v_k) & & & & & & (-1)_{k,j} \\ \hline & & & & s'(v_{k+1}) & & & r - s'(v_{2k}) & & (c_{k+1})_{k+1,j} \\ & & & & & s'(v_{k+2}) & & r - s'(v_{2k}) & & (c_{k+2})_{k+2,j} \\ & & & & & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & & r & r & \cdots & s'(v_{2k}) & r & (c_{2k})_{2k,j} \\ & & & & & & & r - s'(v_{2k}) & s'(v_{2k+1}) & (c_{2k+1})_{2k+1,j} \\ (-1)_{j,1} & (-1)_{j,2} & \cdots & (-1)_{j,k} & (b_{k+1})_{j,k+1} & (b_{k+2})_{j,k+2} & \cdots & (b_{2k})_{j,2k} & (-1)_{j,2k+1} & Z \end{array}\right].$$

3. *Μηδενίζουμε τα μη-διαγώνια στοιχεία της γραμμής $2k$ και της στήλης $2k$ του πίνακα M:* Για να το πετύχουμε αυτό,

   ▷ πολλαπλασιάζουμε την γραμμή j, για $k+1 \leq j \leq 2k-1$, με $-\frac{r}{s'(v_j)}$, και την προσθέτουμε στην γραμμή $2k$·

   ▷ πολλαπλασιάζουμε την γραμμή $2k+1$, με $-\frac{r}{s'(v_{2k+1})}$, και την προσθέτουμε στην γραμμή $2k$.

   Οι παραπάνω πράξεις επηρεάζουν τις τιμές των θέσεων $(2k, 2k)$ και $(2k, j)$, για $p+1 \leq j \leq n-1$. Τα στοιχεία στις αντίστοιχες θέσεις έχουν τιμές:

$$\begin{aligned} s''(v_{2k}) &= s'(v_{2k}) - r(r - s'(v_{2k})) \cdot \left(\frac{1}{s'(v_{2k+1})} + \sum_{i=k+1}^{2k-1} \frac{1}{s'(v_i)} \right) \quad \text{and} \\ c'_{2k} &= c_{2k} - r \cdot \left(\frac{c_{2k+1}}{s'(v_{2k+1})} + \sum_{i=k+1}^{2k-1} \frac{c_i}{s'(v_i)} \right) \quad \text{respectively.} \end{aligned}$$

   Έτσι η s-τιμή της κορυφής v_{2k} αποδεικνύεται όπως επίσης και η τελική τιμή της παραμέτρου c_{2k} της συνάρτησης Contract-Spider-N_node. Υπενθυμίζουμε ότι αυτή είναι η περίπτωση που $R \neq \emptyset$ και γι' αυτό, οι τιμές των λ_s και λ_c του Βήματος 3 είναι απαραίτητες έτσι ώστε να αποκτηθούν οι αντίστοιχες συσχετίσεις. Συνεχίζουμε με την τελική πράξη πάνω στον πίνακα M:

   ▷ πολλαπλασιάζουμε την στήλη j, για $k+1 \leq j \leq 2k-1$, με $-\frac{r - s'(v_{2k})}{s'(v_j)}$, και την προσθέτουμε στην στήλη $2k$·

▷ πολλαπλασιάζουμε την στήλη $2k+1$, με $-\frac{r-s'(v_{2k})}{s'(v_{2k+1})}$, και την προσθέτουμε στην στήλη $2k$.

Αυτές οι πράξεις επηρεάζουν μόνο τις τιμές των θέσεων $(j, 2k)$, για $p+1 \leq j \leq n-1$. Αυτές οι τιμές μετατρέπονται σε:

$$b'_{2k} \quad = \quad b_{2k} - (r - s'(v_{2k})) \cdot \left(\frac{b_{2k+1}}{s'(v_{2k+1})} + \sum_{i=k+1}^{2k-1} \frac{b_i}{s'(v_i)} \right),$$

where $b_{2k+1} = -1$.

Συνοψίζοντας, ο τελικός πίνακας M είναι

$$M = \begin{bmatrix} s(v_1) & & & & & & & & & (-1)_{1,j} \\ & s(v_2) & & & & & & & & (-1)_{2,j} \\ & & \ddots & & & & & & & \vdots \\ & & & s(v_k) & & & & & & (-1)_{k,j} \\ & & & & s'(v_{k+1}) & & & & & (c_{k+1})_{k+1,j} \\ & & & & & s'(v_{k+2}) & & & & (c_{k+2})_{k+2,j} \\ & & & & & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & & & & s''(v_{2k}) & & (c'_{2k})_{2k,j} \\ & & & & & & & & s'(v_{2k+1}) & (c_{2k+1})_{2k+1,j} \\ (-1)_{j,1} & (-1)_{j,2} & \cdots & (-1)_{j,k} & (b_{k+1})_{j,k+1} & (b_{k+2})_{j,k+2} & \cdots & (b'_{2k})_{j,2k} & (b_{2k+1})_{j,2k+1} & Z \end{bmatrix}.$$

Έτσι ο πίνακας M έχει την μορφή του πίνακα M_1 της Εξ. (4.2) και το Λήμμα 4.1 αποδεικνύει την φάση της ενημέρωσης και της συρρίκνωσης της αντίστοιχης συνάρτησης.

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι στη περίπτωση που $R = \emptyset$ οι κατάλληλες τιμές της συνάρτησης, για $\lambda_c = 0, \lambda_b = 0$ και $\lambda_s = 0$, ταιριάζει τις προηγούμενες s-τιμές των κορυφών.

4.5 Πολυπλοκότητα Χρόνου

Στην συνέχεια υπολογίζουμε την πολυπλοκότητα χρόνου του αλγορίθμου Spanning_Trees-Number.

Λήμμα 4.2. *Ο αλγόριθμος Spanning_Trees-Number τρέχει σε $O(n+m+\phi(G))$ χρόνο, όπου n είναι το πλήθος των κορυφών, m είναι το πλήθος των ακμών, και $\phi(G)$ είναι το μη-βασικό κόστος του συγκεκριμένου γραφήματος G.*

Απόδειξη. Το Βήμα 1 του αλγορίθμου Spanning_Trees-Number χρειάζεται $O(n+m)$ χρόνο και τόσο χρόνο χρειάζεται η κατασκευή του md-δέντρου $T(G)$ του γραφήματος G [30, 80]. Ο υπολογισμός των συνόλων επιπέδων $L_0, L_1, \ldots, L_{h-1}$ του δέντρου $T(G)$ στο Βήμα 3 μπορεί να επιτευχθεί σε $O(n)$ χρόνο, αφού το δέντρο $T(G)$ περιέχει $O(n)$ κόμβους. Επιπρόσθετα, προσέξτε ότι ακριβώς μια από τις συναρτήσεις Contract-Parallel_Series, Handle-Basic-N_node (Contract-Spider, Contract-Tree, Contract-Cycle, Handle-Complement-N_node), και Contract-NonBasic-N_node εφαρμόζονται σε κάθε έναν από τους κόμβους του δέντρου $T(G)$. Όταν η συνάρτηση Contract-Parallel_Series εφαρμόζεται σε έναν κόμβο t, μπορεί να εκτελεστεί σε $O(|\text{ch}(t)|)$ χρόνο, όπου $|\text{ch}(t)|$ είναι το πλήθος των παιδιών του κόμβου t στο δέντρο $T(G)$. Επίσης, προσέξτε ότι οι συναρτήσεις Contract-Tree και Contract-Cycle απαιτούν $O(|\text{ch}(t)|)$ χρόνο, αφού το πλήθος των κόμβων είναι $O(|\text{ch}(t)|)$. Όταν η συνάρτηση Contract-Spider-N_node εφαρμόζεται στον κόμβο t με αντιπροσωπευτικό γράφημα ένα πρώτο αράχνοειδές γράφημα $G(t)$, πρέπει να υπολογίσουμε τα σύνολα S, K, και R του γραφήματος $G(t)$ (αυτό μπορεί να γίνει εύκολα σε $O(|V(G_t)| + |E(G_t)|)$ χρόνο αφού έχουν υπολογιστεί οι βαθμοί των κορυφών του αραχνοειδούς γραφήματος· σημειώστε ότι, εάν γράφημα είναι ένα αραχνοειδές γράφημα με διαμέριση (S, K, R), τότε για κάθε επιλογή των κορυφών v, u, και r από τα σύνολα S, K, και R αντίστοιχα, $\text{degree}(v) < \text{degree}(r) < \text{degree}(u)$ [62]), να ενημερώσουμε τις s-τιμές (αυτό παίρνει χρόνο $O(|\text{ch}(t)|)$), και να ενημερώσουμε το md-δέντρο (που επίσης παίρνει $O(|\text{ch}(t)|)$ χόρνο). Τελικά, όταν η συνάρτηση Contract-NonBasic-N_node εφαρμόζεται σε έναν κόμβο t, χρειάζεται $O(|V(G_t)|^{2.376})$ χρόνο, έτσι ώστε η εκτέλεση της συνάρτησης σε όλους του μη-βασικούς N-κόμβους του δέντρου $T(G)$ απαιτεί σε σύνολο $O(\phi(G))$ χρόνο, όπου $\phi(G)$ είναι το μη-βασικό κόστος του γραφήματος G.

Η κατασκευή του γραφήματος $G(t)$ σε έναν κόμβο t χρειάζεται $O(|V(G_t)| + |E(G_t)|)$ χρόνο, αφού ο κόμβος t είναι συστολικός, δηλαδή όλα τα παιδιά του κόμβου t είναι φύλλα στο δέντρο $T(G)$. Εδώ σημειώνουμε ότι το γράφημα $G(t)$ και το συμπλήρωμά του είναι συνεκτικά γραφήματα, αφού ο κόμβος t είναι ένας N-κόμβος στο δέντρο $T(G)$. Στις συναρτήσει Handle-Basic-N_node και Handle-Complement-N_node πρέπει να αναγνωρίσουν πότε ένα γράφημα $G(t)$ είναι ένα αραιό αραχνοειδές γράφημα, ένα πρώτο δέντρο, ένας άχορδος κύκλος ή το συμπλήρωμα ενός τέτοιου γραφήματος. Όπως προαναφέρθηκε, για ένα αραχνοειδές γράφημα, μπορούμε να υπολογίσουμε την διαμέριση του αραχνοειδούς γραφήματος σε $O(|V(G_t)| + |E(G_t)|)$ χρόνο. Τότε, ελέγχοντας τους βαθμούς των κορυφών στο σύνολο S είναι αρκετό έτσι ώστε να ξεκαθαρίσουμε ένα αραιό από ένα πυκνό αραχνοειδές γράφημα. Ένα γράφημα $G(t)$ είναι ένα δέντρο εάν και μόνο εάν είναι συνεκτικό και έχει $|V(G(t))| - 1$ ακμές· είναι εύκολο να δούμε ότι εάν το γράφημα $\overline{G(t)}$ είναι συνεκτικό και το γράφημα $G(t)$ έχει $\frac{k(k-1)}{2} - k + 1$ ακμές, όπου $k = |V(G_t)|$, τότε το γράφημα $G(t)$ είναι το συμπλήρωμα ενός δέντρου. Το γεγονός ότι ένας άχορδος κύκλος με k κορυφές και το συμπλήρωμά του είναι συνεκτικά και όλες οι κορυφές του έχουν βαθμό 2 και $k-3$, αντίστοιχα, είναι επαρκές για να τα αναγνωρίσουμε. Έτσι, η αναγνώριση χρειάζεται χρόνο γραμμικό ως προς το μέγεθος του συγκεκριμένου γραφήματος $G(t)$.

Δοθέντος ότι το πλήθος των κόμβων του δέντρου $T(G)$ είναι $O(n)$, το γεγονός ότι το πλήθος των ακμών του γραφήματος G είναι το πολύ ίσος με τον συνολικό αριθμό των ακμών από όλα τα αντιπροσωπευτικά γραφήματα του δέντρου $T(G)$, και το γεγονός ότι ο έλεγχος ενός γραφήματος H εάν είναι ένα βασικό γράφημα παίρνει $O(|V(H)| + |E(H)|)$ χρόνο, τότε το Βήμα 4 του αλγορίθμου Spanning_Trees-Number απαιτεί $O(n + m + \phi(G))$ χρόνο. Τελικά, το Βήμα 5 χρειάζεται $O(n)$ χρόνο υπό το ομοιόμορφο κριτήριο κόστους, σύμφωνα με το οποίο κάθε πράξη απαιτεί μια μονάδα χρόνου και κάθε καταχωρητής απαιτεί μια μονάδα χώρου, που επάγει ότι ανεξάρτητα του πόσο μεγάλοι είναι οι αριθμοί, μια αριθμητική πράξη μεταξύ ℓ αριθμών παίρνει $O(\ell)$ χρόνο. Επομένως, ο αλγόριθμος Spanning_Trees-Number χρειάζεται $O(n + m + \phi(G))$ χρόνο. ∎

Σημείωση 4.1. Η πολυπλοκότητα χρόνου και χώρου του αλγόριθμού μας μετριέται σύμφωνα με το ομοιόμορφο κριτήριο κόστους. Υπό το κριτήριο αυτό κάθε επεξεργασία στο μοντέλο μας απαιτεί μια μονάδα χρόνου και κάθε καταχωρητής μια μονάδα χώρου. Παρά το γεγονός ότι οι αριθμητικές πράξεις εμπεριέχουν μεγάλου μεγέθους τυχαίους αριθμούς, μετράμε κάθε πράξη ως ένα βήμα. Στην δικιά μας περίπτωση το ομοιόμορφο κόστος είναι πραγματικό (realistic) εάν μια λέξη του υπολογιστή μπορεί να αποθηκεύσει έναν ακέραιο μεγέθους το πολύ n^{n-2}, όπου n το πλήθος των κορυφών ενός γραφήματος (το πλήθος των σκελετικών δέντρων ενός γραφήματος G με n κορυφές είναι το πολύ n^{n-2}· το πλήρες γράφημα K_n έχει n^{n-2} σκελετικά δέντρα). Σημειώστε παρ' όλα αυτά ότι εάν η ποσότητα n^{n-2} είναι μεγαλύτερη από αυτήν που μπορεί να αποθηκευτεί σε μια λέξη του υπολογιστή, τότε ακόμα και το λογαριθμικό κριτήριο κόστους (το μοντέλο αυτό λαμβάνει υπ' όψιν το το περιορισμένο μέγεθος μιας πραγματικής θέσης (λέξης) μνήμης, που είναι λογαριθμική σε σχέση με τον αριθμό που αποθηκεύει) είναι κατά κάποιο τρόπο μη-ρεαλιστικό, αφού θεωρεί ότι δύο ακέραιοι αριθμοί i και j μπορούν να πολλαπλασιαστούν σε χρόνο $O(\log(i) + \log(j))$, ο οποίος δεν είναι γνωστός ότι είναι πραγματοποιήσιμος (δείτε [3, 96]). □

4.6 Υπολογισμός του Πλήθους των Σκελετικών Δέντρων σε Γραμμικό Χρόνο

Έστω G ένα γράφημα με n κορυφές και m ακμές και έστω $\phi(G)$ να είναι το μη-βασικό κόστος του. Από το Λήμμα 4.2, είναι ξεκάθαρο ότι εάν το κόστος $\phi(G)$ είναι γραμμικό ως προς το μέγεθος του γραφήματος G, τότε ο αλγόριθμος Spanning_Trees-Number τρέχει σε γραμμικό χρόνο. Πιο συγκεκριμένα, ακολουθούμενοι από τις συναρτήσεις που εφαρμόζονται σε κάθε εσωτερικό N-κόμβο t του δέντρου $T(G)$, έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 4.1. *Έστω ένα γράφημα G με n κορυφές και m ακμές, και έστω $T(G)$ το md-δέντρο του. Εάν κάθε πρώτο γράφημα στο δέντρο $T(G)$ είναι (i) ένα αραχνοειδές γράφημα, ή (ii) ένα δέντρο, ή (iii) ένας άκυκλος κύκλος, ή (iv) τα συμπληρώματά τους, ή (v) ένα γράφημα με προκαθορισμένο (fixed) μέγεθος, τότε το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος G μπορεί να υπολογιστεί σε $O(n+m)$ χρόνο και χώρο.*

Στη συνέχεια εξετάζουμε κλάσεις γραφημάτων που έχουν γραμμικό ή σταθερό μη-βασικό κόστος.

4.6.1 Δέντρα-cographs

Πρόσφατα, πολλοί ερευνητές αφιέρωσαν τις εργασίες τους στην επέκταση των γνωστών cographs. Ο Tinhofer στην εργασία [104] εισήγαγε τα δέντρα-cographs (tree-cographs) όπου η αναδρομή, αντί να ξεκινάει με μια μοναδική κορυφή, ξεκινάει με ένα οποιοδήποτε δέντρο. Έπεται ότι τα δέντρα-cographs περιέχουν όλα τα δέντρα και τα δάση. Έτσι, κάθε πρώτο γράφημα του md-δέντρου ενός δέντρου-cograph επάγει ένα δέντρο γράφημα. Από το Θεώρημα 4.1 είναι εύκολο να δει κανείς ότι το ακόλουθο αποτέλεσμα ισχύει.

Λήμμα 4.3. *Το μη-βασικό κόστος ενός δέντρου-cograph G είναι $\phi(G) = 0$.*

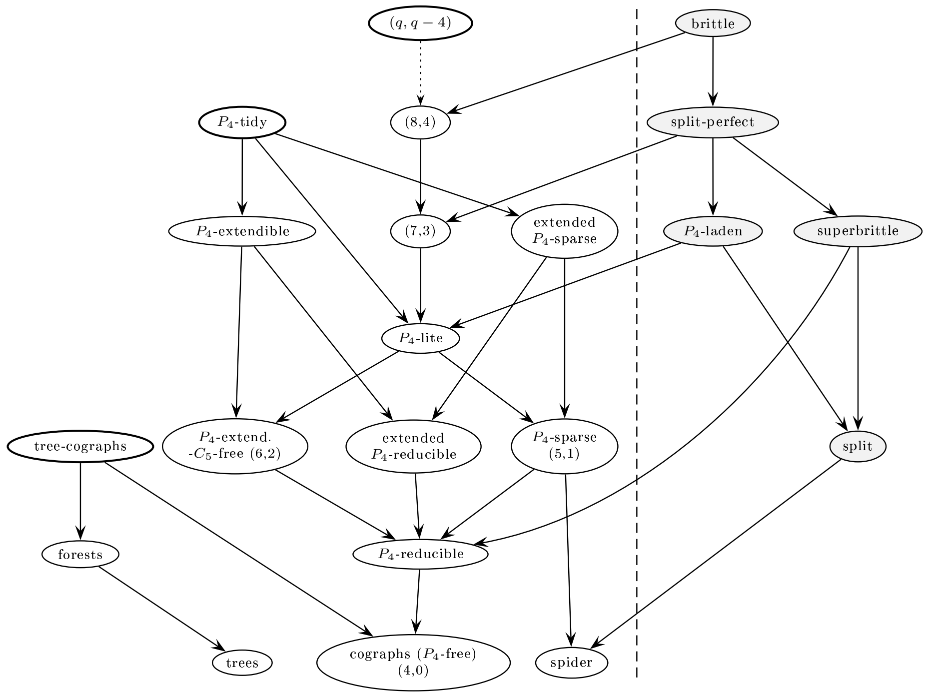
4.6.2 $(q, q-4)$ Γραφήματα

Οι Babel και Olariu στην εργασία [5] πρότειναν την γενική ιδέα των (q,t) γραφημάτων. Σε ένα τέτοι γράφημα, κανένα σύνολο με το πολύ q κορυφές περιέχει παραπάνω από t διαφορετικά P_4. Συγκεκριμένα, τα $(q, q-4)$ γραφήματα επιδέχονται σημαντικές δομικές ιδιότητες (έχουν ένα μοναδικό δέντρο αναπαράστασης· δείτε Θεώρημα 4.2) [4], είναι brittle[2] για $q \leq 8$ [5] αλλά δεν είναι brittle (ούτε τέλεια) for $q \geq 9$. Προκύπτει ότι τα cographs είναι ακριβώς τα $(4,0)$ γραφήματα, τα P_4-sparse γραφήματα είναι τα $(5,1)$ γραφήματα, και τα C_5-free P_4-extendible γραφήματα είναι τα $(6,2)$ γραφήματα. Με τον δικό μας συμβολισμό η δομή των $(q, q-4)$ γραφημάτων μπορεί να περιγραφεί ως εξής.

Θεώρημα 4.2 (Babel and Olariu [5]). *Έστω G ένα $(q, q-4)$ γράφημα. Τότε, κάθε πρώτο γράφημα στο md-δέντρο του γραφήματος G είναι είτε ένα πρώτο αραχνοειδές γράφημα, είτε ένα γράφημα με το πολύ q κορυφές.*

Βασιζόμενοι στο προηγούμενο αποτέλεσμα, πολλά προβλήματα βελτιστοποίησης και κυριαρχίας (domination problems) (όπως είναι η τάξη των κορυφών (vertex ranking), η επικάλυψη με μονοπάτια (path cover), η λίστα χρωμάτων (list coloring) κτλ.) μπορούν να επιλυθούν σε γραμμικό χρόνο για την κλάση των $(q, q-4)$ γραφημάτων για προκαθορισμένη τιμή q [4]. Εδώ σημειώνουμε ότι για ένα $(q, q-4)$ γράφημα G, το Θεώρημα 4.2 επάγει ότι οι κορυφές του αραχνοειδούς γραφήματος$G(t)$ στο δέντρο $T(G)$ δεν είναι απαραίτητα φύλλα. Επιπρόσθετα, εφόσον ο υπολογισμός του πλήθους των σκελετικών δέντρων ενός γραφήματος με σταθερό πλήθος κορυφών χρειάζεται σταθερό χόνο, το Θεώρημα 4.1 επάγει ότι:

[2] Ο Chvátal όρισε ένα γράφημα G να είναι *brittle* εάν κάθε επαγώμενο υπογράφημα H του γραφήματος G περιέχει μια κορυφή που δεν είναι μέση-κορυφή και ταυτόχρονα δεν είναι άκρο κανενός P_4. Δείτε επίσης [18].



Σχήμα 4.2: Συσχέτιση μεταξύ κλάσεων γραφημάτων (Hasse diagram). Για τις κλάσεις που βρίσκονται αριστερά από την διακεκομμένη γραμμή, το πλήθος των σκελετικών δέντρων μπορεί να υπολογιστεί σε γραμμικό χρόνο.

Λήμμα 4.4. *Το μη-βασικό κόστος ενός $(q, q-4)$ γραφήματος G με n κορυφές είναι $\phi(G) = O(n)$, για οποιοδήποτε καθορισμένο $q \geq 4$.*

4.6.3 P_4-tidy Γραφήματα

Όπως αναφέρεται στην εργασία [39], η κλάση των P_4-tidy γραφημάτων εισήχθει από την I. Rusu με σκοπό να ερμηνεύσει (διευκρινίσει) την έννοια του P_4-domination σε τέλεια γραφήματα. Ένα γράφημα G ονομάζεται P_4*-tidy* εάν για κάθε επαγώμενο P_4, έστω A, το πολύ μια κορυφή από το σύνολο $V \setminus A$ επάγει ένα P_4 μαζί με τρεις κορυφές από το A (δηλαδή, κάθε P_4 έχει το πολύ έναν *partner*). Τα P_4-tidy γραφήματα περιέχουν αυστηρά τα cographs, τα P_4-reducible, τα P_4-sparse, τα P_4-extendible, και τα P_4-lite γραφήματα. Τα P_4-lite γραφήματα είχαν οριστεί από τους Jamison και Olariu στην εργασία [59]: ένα γράφημα G λέγεται P_4*-lite* εάν κάθε επαγώμενο υπογράφημα H του γραφήματος G με το πολύ έξι κορυφές είτε περιέχει το πολύ δύο P_4, είτε είναι ένα 3-sun, είτε είναι το συμπλήρωμα ενός 3-sun (ένα *3-sun* είναι ένα πυκνό αραχνοειδές γράφημα με έξι κορυφές και με $R = \emptyset$). Είχαν επισημάνει ότι κάθε P_4-sparse γράφημα είναι P_4-lite και απέδειξαν ότι κάθε P_4-lite γράφημα είναι brittle και γι' αυτό είναι τέλειο. Επισημάνουμε εδώ ότι τα P_4-lite γραφήματα συμπίπτουν με τα C_5-free P_4-tidy γραφήματα.

Το Θεώρημα 3.2 στην εργασία [39] επιφέρει το ακόλουθο αποτέλεσμα για την m-αποσύνθεση των P_4-tidy γραφημάτων:

Θεώρημα 4.3 (Giakoumakis et al. [39]). *Έστω G ένα γράφημα και έστω $T(G)$ το md-δέντρο του. Το γράφημα G είναι P_4-tidy εάν και μόνο εάν για κάθε N-κόμβο t του δέντρου $T(G)$, είτε*

(i) *το γράφημα $G(t)$ είναι ένα πρώτο αραχνοειδές γράφημα με διαμέριση (S, K, R) και το πολύ μια κορυφή από το σύνολο $S \cup K$ είναι ένας εσωτερικός κόμβος στ δέντρο $T(G)$, είτε*

(ii) *το γράφημα $G(t)$ είναι ένα P_5 και καμία κορυφή του γραφήματος P_5 δεν είναι εσωτερική κορυφή στο δέντρο $T(G)$, είτε*

(iii) *το γράφημα $G(t)$ είναι ένα $\overline{P_5}$ και καμία κορυφή του γραφήματος $\overline{P_5}$ δεν είναι εσωτερική κορυφή στο δέντρο $T(G)$, είτε*

(iv) *το γράφημα $G(t)$ είναι ένα C_5 και καμία κορυφή του γραφήματος C_5 δεν είναι εσωτερική κορυφή στο δέντρο $T(G)$.*

Στην εργασία [39], το Θεώρημα 4.3 έπαιξε ουσιαστικό ρόλο για έναν γραμμικό αλγόριθμο αναγνώρισης των P_4-tidy γραφημάτων και για την γραμμική-χρόνου επίλυση προβλημάτων υπολογισμού του αριθμού κλίκας και ευστάθειας, του χρωματικού αριθμού, και του hamiltonian μονοπατιού. Σε συνδυασμό με την δική μας εργασία, αυτό επάγει ότι το μη-βασικό κόστος $\phi(G)$ ενός P_4-tidy γραφήματος G είναι μηδενικό.

Λήμμα 4.5. *Το μη-βασικό κόστος $\phi(G)$ ενός P_4-tidy γραφήματος G είναι $\phi(G) = 0$.*

Συνοψίζοντας, με βάση τα Λήμματα 4.3, 4.4, και 4.5, το πλήθος των σκελετικών δέντρων των κλασεων των δέντρων-cographs, $(q, q-4)$ γραφημάτων για σταθερό $q \geq 4$, και για των P_4-tidy γραφημάτων μπορεί να υπολογιστεί αποτελεσματικά. Επιπλέον, δεν είναι δύσκολο να δει κανείς ότι για αυτά τα γραφήματα ο χώρος που χρειάζεται ο αλγόριθμος Spanning_Trees-Number είναι $O(n+m)$· Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, το md-δέντρο ενός γραφήματος και, πιο συγκεκριμένα, η κατασκευή του απαιτεί χώρο γραμμικό ως προς το μέγεθος του γραφήματος [30, 80]. Έτσι, τα αποτελέσματα της ενότητας αυτής συγκεντρώνονται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 4.4. *Το πλήθος των σκελετικών δέντρων ενός δέντρου-cograph, ή ενός $(q, q-4)$ γραφήματος για σταθερό $q \geq 4$, ή ενός P_4-tidy γραφήματος μπορεί να υπολογιστεί σε $O(n+m)$ χρόνο και χώρο, όπου n και m είναι το πλήθος των κορυφών και ακμών, αντίστοιχα, του συγκεκριμένου γραφήματος.*

Το Σχήμα 4.2 παρουσιάζει τις κλάσεις των γραφημάτων που αναφέρονται στη εργασία αυτή και τις συσχετίσεις τους· η μέθπδός μας επιτρέπει τον γραμμικό χρόνο υπολογισμό του πλήθους των σκελετικών δέντρων για τις κλάσεις που βρίσκονται αριστερά από την διακεκομμένη γραμμή.

Αξίζει να σημειωθεί ότι αρκετές ακόμα υποκλάσεις γνωστών γραφημάτων επιφέρουν δομικές ιδιότητες που επιτρέπουν έναν γραμμικό χρόνο υπολογισμού του πλήθους των σκελετικών τους δέντρων. Παραδείγματα περιέχονται στις κλάσεις των tree-perfect και forest-perfect γραφημάτων που είχαν εισαχθεί στην εργασία [17] και για τα οποία το ακόλουθο λήμμα ισχύει (Λήμμα 4.1 [17]):

Λήμμα 4.6 (Brandstädt και Le [17]). *Έστω το γράφημα G που έχει ένα επαγώμενο μονοπάτι P_6. Τότε το γράφημα G είναι tree-perfect εάν και μόνο εάν το γράφημα G αποκτάται από ένα δέντρο αντικαθιστώντας τα φύλλα με cographs ή το γράφημα G αποκτάται από ένα πρώτο γράφημα με οκτώ κορυφές αντικαθιστώντας τις τέσσερις κορυφές του με cographs.*

Βασιζόμενοι στο προηγούμενο αποτέλεσμα, είναι προφανές ότι το πλήθος των σκελετικών δέντρων ενός tree-perfect γραφήματος με ένα επαγώμενο P_6 μπορεί να υπολογιστεί σε γραμμικό χρόνο και χώρο.

4.7 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάσαμε μια γενική μέθοδο υπολογισμού του πλήθους των σκελετικών δέντρων ενός γραφήματος χρησιμοποιώντας την m-αποσύνθεση, που επέφερε έναν γραμμικό αλγόριθμο για το πρόβλημα σε P_4-tidy γραφήματα, σε $(q, q-4)$ γραφήματα για σταθερό $q \geq 4$, και σε tree-cographs. Εκμεταλλευτήκαμε τις δομικές ιδιότητες του md-δέντρου αυτών των γραφημάτων και χρησιμοποιήσαμε το Θεώρημα του πίνακα-δέντρου, Kirchhoff, ως ένα εργαλείο για την απόδειξη της ορθότητας του προτεινόμενου αλγορίθμου. Περιμένου ότι η προσέγγισή μας εφαρμόζεται και σε άλλου τύπου πρώτων γραφημάτων (εκτός από αραχνοειδή γραφήματα, πρώτα δέντρα, άχορδους κύκλους και τα συμπληρώματά τους), που θα επέτρεπε τον υπολογισμό του πλήθους των σκελετικών δέντρων και για επιπρόσθετες κλάσεις, π.χ., τα *semi-P_4-sparse* γραφήματα [35] και τα $(P_5, diamond)$-*free* graphs [15].

Επιπλέον παραθέτουμε ως ένα ανοικτό πρόβλημα την αποτελεσματική επεξεργασία των διχοτομίσιμων (split) γραφημάτων και των αρκετών επεκτάσεων τους (που γενικεύουν τα αραχνοειδή γραφήματα)· τα διχοτομίσιμα γραφήματα παίζουν ένα βασικό ρόλο στο md-δέντρο των *split-perfect* γραφημάτων [16], και γι' αυτό ο αποτελεσματικός τρόπος επεξεργασίας τους θα οδηγούσε σε έναν γρήγορο υπολογισμό του πλήθους των σκελετικών δέντρων των τελευταίων κλάσεων.

Ορισμένα άλλα ενδιαφέροντα προβλήματα απαρίθμησης αφορούν στον υπολογισμό του πλήθους των τέλειων ταιριασμάτων (perfect matchings), των κύκλων του Hamilton και των κύκλων του Euler. Πιο συγκεκριμένα, έχει δειχτεί [76] ότι το πλήθος των τέλειων ταιριασμάτων μπορεί να υπολογιστεί αποτελεσματικά σε γραφήματα που επιδέχονται μια *Pfaffian orientation*. Όπως και στο Θεώρημα του πίνακα-δέντρου, Kirchhoff, αυτή η μέθοδος εμπεριέχει τον υπολογισμό μιας ορίζουσας ακολουθούμενη από τον υπολογισμό μιας τετραγωνικής ρίζας. Έτσι, δοθέντος ενός τέτοιου προσανατολισμού (orientation), ένας αλγόριθμος που κατασκευάζει τις τεχνικές συρρίκνωσης μπορεί να οδηγήσει σε αποτελεσματικές λύσεις για άλλα συνδυαστικά προβλήματα απαρίθμησης.

Τέλος, όπως προαναφέρθηκε στην εισαγωγή, ένα ομοιόμορφο αξιόπιστο δίκτυο (ορισμένο στις εργασίες [25, 84]) πρέπει να μεγιστοποιεί το πλήθος των σκελετικών δέντρων. Έτσι, είναι ενδιαφέρον να καθορίσει κανείς τους τύπους των γραφημάτων που έχουν το μέγιστο πλήθος σκελετικών δέντρων για συγκεκριμένο πλήθος κορυφών και ακμών (δείτε [41, 99, 100]). Το πρόβλημα αυτό μπορεί να προσεγγιστεί ως μια ερώτηση βελτιστοποίησης πάνω στις s-τιμές των κορυφών, που καθορίζει ο αλγόριθμος Spanning_Trees-Number. Τέτοιου είδους μελέτη είναι αυτή την στιγμή υπό έρευνα και μερικά πρώτα αποτελέσματα αναδεικνύουν ότι η σχεδόν τακτικότητα (almost regularity) φαίνεται να είναι το κλειδί για την επίλυση του προβλήματος.

Κεφαλαιο 5

Μεγιστοποιηση του Πληθους των Σκελετικων Δεντρων των Αστεροειδων Γραφηματων

5.1 Εισαγωγή

Ένα γράφημα G αποτελείται από ένα σύνολο $V(G)$ από κορυφές και ένα σύνολο $E(G)$ από ακμές όπου κάθε ακμή αντιστοιχεί σε ένα μη διατεταγμένο ζεύγος κορυφών από το σύνολο $V(G)$. Θεωρούμε πεπερασμένα μη-κατευθυνόμενα γραφήματα χωρίς βρόχους ή ανακυκλώσεις και χωρίς πολλαπλές ακμές. Έστω ένα τέτοιο γράφημα G με n κορυφές και m ακμές. Ένα σκελετικό δέντρο του γραφήματος G είναι ένα άκυκλο $(n-1)$-ακμών υπογράφημα.

Το πλήθος των σκελετικών δέντρων ενός γραφήματος (δικτύου) G, καλείται επίσης *πολυπλοκότητα* (complexity) του γραφήματος G [10], είναι ένα σημαντικό, ευρέως γνωστό, πρόβλημα στην θεωρία γραφημάτων και εμφανίζεται σε ένα πλήθος εφαρμογών. Οι πιο αξιοσημείωτες περιοχές εφαρμογών είναι η αξιοπιστία δικτύων [84, 99], ο υπολογισμός της συνολικής αντίστασης μεταξύ μιας ακμής σε ένα ηλεκτρικό δίκτυο (electrical network) [13], απαρίθμηση συγκεκριμένων χημικών στοιχείων [20], και απαρίθμηση των Eulerian κύκλων (circuits) σε ένα γράφημα [47]. Συγκεκριμένα, η απαρίθμηση σκελετικών δέντρων είναι ένα ουσιαστικό βήμα σε πολλές τεχνικές για τον υπολογισμό, την οριοθέτηση και την προσεγγιστική αξιοπιστία δικτύων [25]· σε ένα δίκτυο που μοντελοποιείται από ένα γράφημα, η ενδοεπικοινωνία μεταξύ όλων των κόμβων του δικτύου επάγει ότι το γράφημα πρέπει να περιέχει ένα σκελετικό δέντρο και, επομένως, η μεγιστοποίηση του πλήθους των σκελετικών δέντρων είναι ένας τρόπος για την μεγιστοποίηση της αξιοπιστίας.

Επομένως, τόσο για θεωρητικούς όσο και για πρακτικούς σκοπούς, ενδιαφερόμαστε για την εξαγωγή μαθηματικών τύπων για τον υπολογισμό του πλήθους των σκελετικών δέντρων ενός γραφήματος G, όπως επίσης και για το K_n-συμπλήρωμα (K_n-complement) του γραφήματος G· εάν το γράφημα G είναι ένα υπογράφημα του πλήρες γραφήματος K_n, τότε το K_n-συμπλήρωμα του γραφήματος G, που συμβολίζεται με $K_n - G$, ορίζεται ως το γράφημα που αποκτάται από το γράφημα K_n διαγράφοντας τις ακμές του γραφήματος G (σημειώστε ότι, εάν το γράφημα G έχει n κορυφές, τότε το γράφημα $K_n - G$ συμπίπτει με το γράφημα $\overline{G}$, δηλ. το συμπλήρωμα του γραφήματος G). Πολλές περιπτώσεις έχουν μελετηθεί που εξαρτώνται από την επιλογή του γραφήματος G. Έχει μελετηθεί όταν το γράφημα G είναι ένα επιγραφόμενο μοριακό γράφημα (labelled molecular graph) [20], όταν το γράφημα G είναι ένα πλήρες πολυμερή γράφημα (complete multipartite graph) [107], όταν το γράφημα G είναι ένα κυκλικό γράφημα (circulant graph) [42, 109], όταν το γράφημα G είναι ένας κυβικός και τετραδικός κύκλος (cubic-quadruple cycle graph) [108], όταν το γράφημα G είναι ένα threshold γράφημα [46], όταν το γράφημα G είναι ένα quasi-threshold γράφημα [91] και άλλες πολλές περιπτώσεις (δείτε το βιβλίο του Berge [9] για μια έκθεση των βασικών αποτελεσμάτων· δείτε επίσης [24, 67, 93, 91, 94, 100, 106, 107]).

Μια κοινή αντιμετώπιση για τον καθορισμό του πλήθους των σκελετικών δέντρων ενός γραφήματος G βασίζεται σε ένα κλασικό αποτέλεσμα γνωστό ως το *συμπληρωματικό σκελετικών δέντρων πίνακα* (complement spanning-tree matrix) θεώρημα [103], που εκφράζει το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος G ως μια συνάρτηση της ορίζουσας ενός πίνακα που μπορεί να κατασκευαστεί εύκολα από την σχέση γειτνίασης του γραφήματος G, δηλαδή, από τον πίνακα γειτνίασης, από την λίστα γειτνίασης, κ.τ.λ. Υπολογίζοντας την ορίζουσα του συμπληρωματικού σκελετικών δέντρων πίνακα φαίνεται ότι είναι μια πολλά-υποσχόμενη κατεύθυνση για τον καθορισμό του πλήθους των σκελετικών δέντρων για οικογένειες γραφημάτων της μορφής $K_n - H$, όπου το γράφημα H είναι ένα γράφημα που διατηρεί μια συγκεκριμένη συμμετρία (δείτε [9, 24, 41, 93, 91, 107, 109]).

Σε αυτό το κεφάλαιο, ορίζουμε δύο κλάσεις γραφημάτων, που ονομάζονται *complete-planet* and the *star-planet* γραφήματα, και γενικεύουν πολλές γνωστές κλάσεις γραφημάτων για τα οποία υπάρχει ένας κλειστός τύπος για το πλήθος των σκελετικών δέντρων τους· καλούμε τις δύο αυτές κλάσεις γραφημάτων *αστεροειδή* (asteroidal) γραφήματα. Εξάγουμε κλειστούς τύπους για το πλήθος των σκελετικών δέντρων των γραφημάτων της μορφής $K_n - H$, στην περίπτωση που το γράφημα H είναι (i) ένα complete-planet γράφημα, και (ii) ένα star-planet γράφημα. Δείχνουμε ότι οι τύποι μας γενικεύουν προτεινόμενους τύπους για τις κλάσεις γραφημάτων όπως είναι τα πλήρες γραφήματα, τα αστέρια (star) γραφήματα, οι τροχοί (wheel) γραφήματα, τα gem γραφήματα, τα multi-star γραφήματα, τα multi-complete/star γραφήματα, κ.τ.λ. Οι αποδείξεις μας βασίζονται στο συμπληρωματικό σκελετικών δέντρων πίνακα θεώρημα και χρησιμοποιούμε κλασικές τεχνικές από την γραμμική άλγεβρα και την θεωρία πινάκων.

Παρόλο που το πρόβλημα της μεγιστοποίησης του πλήθους των σκελετικών δέντρων ενός γραφήματος είναι δύσκολο στην γενική περίπτωση, είναι δυνατό να πετύχει κανείς αποτελεσματική επίλυση για κάποιες μη-τετριμμένες κλάσεις γραφημάτων. Σε αυτό το κεφάλαιο αποδεικνύουμε επίσης αποτελέσματα μεγιστοποίησης για την κλάση των αστεροειδή γραφημάτων. Πιο συγκεκριμένα, αναγνωρίζουμε και χαρακτηρίζουμε τα complete-planet και star-planet γραφήματα που έχουν μέγιστο πλήθος σκελετικών δέντρων. Τα αποτελέσματα μεγιστοποίησης που δίνουμε γενικεύουν και επεκτείνουν προηγούμενα αποτελέσματα μεγιστοποίησης για την κλάση των multi-star γραφημάτων [24].

Το κεφάλαιο είναι οργανωμένο ως εξής. Στην δεύτερη ενότητα εδραιώνουμε την σημειογραφία και την ορολογία μας, ορίζουμε την κλάση των αστεροειδή γραφημάτων και παρουσιάζουμε προηγούμενα αποτελέσματα. Στην τρίτη και την τέταρτη ενότητα εξάγουμε κλειστούς τύπους για το πλήθος των σκελετικών δέντρων των K_n-συμπληρωμάτων των complete-planet γραφημάτων και των star-planet γραφημάτων, αντίστοιχα. Στην πέμπτη ενότητα παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα μεγιστοποίησης. Τέλος, στην έκτη ενότητα συνοψίζουμε το κεφάλαιο και δείχνουμε ότι άλλα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στα [9, 24, 91, 93, 94, 107] έπονται ως άμεση συνέπεια των θεωρημάτων μας.

5.2 Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

Με K_n συμβολίζουμε το πλήρες γράφημα με n κορυφές. Επίσης, για λόγους συμμετρίας, συμβολίζουμε με S_{n+1} το αστέρι γράφημα με $n+1$ κορυφές, που συνήθως συμβολίζεται με $S_{1,n}$. Καλούμε την κορυφή του γραφήματος S_{n+1} με μέγιστο βαθμό την *κεντρική κορυφή* (center vertex). Το άχορδο μονοπάτι (αντίστ. κύκλος) με n κορυφές $v_1v_2\cdots v_n$ με ακμές v_iv_{i+1} (αντίστ. v_iv_{i+1} και v_1v_n), $1 \leq i < n$, συμβολίζεται με P_n (αντίστ. C_n).

Έστω δύο γραφήματα G_1 και G_2. Η *ένωσή* τους (union) $G = G_1 \cup G_2$ έχει σύνολο κορυφών $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ και σύνολο ακμών $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$. Το *καρτεσιανό γινόμενό* τους (join) συμβολίζεται με $G_1 + G_2$ και αποτελείται από το γράφημα $G_1 \cup G_2$ προσθέτοντας όλες τις ακμές από το καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων $V(G_1)$ και $V(G_2)$. Για ένα οποιοδήποτε συνεκτικό γράφημα G, γράφουμε mG για το γράφημα με m συνιστώσες, που η κάθε μία είναι ισόμορφη με το γράφημα G, $m \geq 2$. Έτσι, το γράφημα mK_n (αντίστ. mS_n, mP_n, mC_n) αποτελείται από m ανεξάρτητα αντίγραφα του γραφήματος K_n (αντίστ. S_n, P_n, C_n). Σημειώστε ότι, $S_{n+1} = K_1 + nK_1$. Σε όλο το κεφάλαιο, αναφερόμαστε στα πλήρες γραφήματα, αστέρια γραφήματα, μονοπάτια γραφήματα, και κύκλους γραφήματα ως κλίκες, αστέρια, μονοπάτια, και κύκλους, αντίστοιχα.

5.2.1 Αστεροειδή Γραφήματα

Ένα γράφημα G με n κορυφές καλείται ***complete-planet*** (αντίστ. ***star-planet***) εάν το σύνολο κορυφών του $V(G)$ επιδέχεται μια διαμέριση στα σύνολα A και B τέτοια ώστε:

(S1) $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ και $G[A] = K_m$ (αντιστ. $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_m, c\}$ και $G[A] = S_{m+1}$), $m \geq 1$·

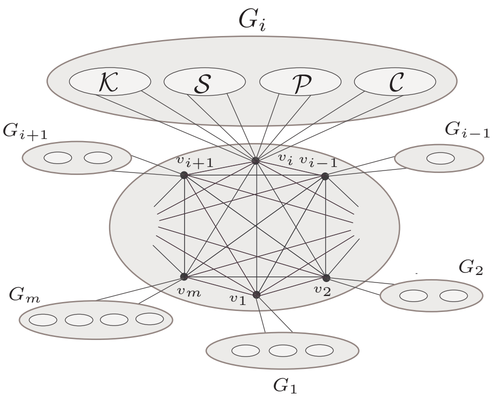
(S2) $B = B_1 + B_2 + \cdots + B_m$, και για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$, $|B_i| \geq 0$ και το σύνολο B_i επάγει α_{ij}, β_{ij}, γ_{ij}, και δ_{ij} ανεξάρτητα αντίγραφα κλικών, αστεριών, μονοπατιών, και κύκλων, αντίστοιχα, με j κορυφές· δηλαδή,

$$G_i \equiv G[B_i] \;=\; \alpha_{ij}K_j \;\cup\; \beta_{ij}S_j \;\cup\; \gamma_{ij}P_j \;\cup\; \delta_{ij}C_j, \quad 1 \leq i \leq m, \;\; 1 \leq j \leq |B_i|\cdot$$

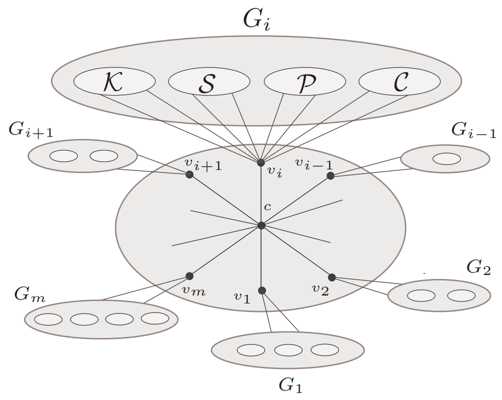
(S3) Η κορυφή $v_i \in A$ βλέπει όλες τις κορυφές του γραφήματος G_i και χάνει όλες τις κορυφές από το σύνολο $B - V(G_i)$, $1 \leq i \leq m$.

Συγκεντρωτικά καλούμε τα παραπάνω ορισμένα γραφήματα *αστεροειδή* (asteroidal) γραφήματα. Το Σχήμα 5.1 δείχνε την γενική μορφή ενός complete-planet γραφήματος και ενός star-planet γραφήματος. Έστω ένα αστεροειδή γράφημα G και έστω τα A και B τα σύνολα διαμέρισης του συνόλου κορυφών $V(G)$ σύμφωνα με τον άνω ορισμό: καλούμε το γράφημα $G[A]$ το ***sun-γράφημα*** του γραφήματος G, το γράφημα $G[B]$ το ***planet-γράφημα***, και τα γραφήματα $G_1, G_2, \ldots, G_m$ τα ***planet-υπογράφημα***. Εξ' ορισμού, $G[B] = \bigcup_{i=1}^{m} G_i$. Ένα μεγιστοτικό συνεκτικό υπογράφημα ενός planet-υπογράφημα G_i καλείται ***planet-συνιστώσα*** του γραφήματος G_i. Συμβολίζουμε με ℓ_i την πληθικότητα του συνόλου B_i. Έτσι, το πλήθος των κορυφών του γραφήματος G_i είναι ℓ_i. Επιπλέον, ο ορισμός του γραφήματος G_i επάγει ότι για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$, ισχύει ότι

$$\sum_{j=1}^{\ell_i} \;(\; \alpha_{ij} \;+\; \beta_{ij} \;+\; \gamma_{ij} \;+\; \delta_{ij} \;) \cdot j \;\;=\;\; \ell_i. \tag{5.1}$$



(a) ένα complete-planet γράφημα



(b) ένα star-planet γράφημα

Σχήμα 5.1: Αστεροειδή γραφήματα.

Επομένως, $|B| = \sum_{i=1}^{m} \ell_i$. Το άθροισμα αυτό το συμβολίζουμε με ℓ. Επομένως, ένα complete-planet γράφημα έχει ακριβώς $m+\ell$ κορυφές, ενώ ένα star-planet γράφημα έχει $m+\ell+1$ κορυφές. Από εδώ και στο εξής, καλούμε *sun-κορυφές* και *planet-κορυφές* τις κορυφές των γραφημάτων $G[A]$ και $G[B]$, αντίστοιχα.

Σε όλο το κεφάλαιο, χρησιμοποιούμε την ακόλουθη σύμβαση: μια οποιαδήποτε απομονωμένη κορυφή ενός planet-υπογραφήματος θεωρείται ότι είναι το γράφημα K_1 (και όχι ένα από τα γραφήματα S_1, P_1, ή C_1)· έτσι, για όλα τα i, $\beta_{i1} = \gamma_{i1} = \delta_{i1} = 0$. Παρόμοια, $\beta_{i2} = \gamma_{i2} = \delta_{i2} = 0$, αφού $K_2 = S_2 = P_2 = C_2$. Τέλος, $\gamma_{i3} = \delta_{i3} = 0$, αφού $K_3 = C_3$ και $S_3 = P_3$. Επομένως, για μια planet-συνιστώσα που είναι ένας αστέρας S_n, τότε $n \geq 3$, ενώ εάν είναι ένα μονοπάτι P_n ή ένας κύκλος C_n τότε $n \geq 4$.

Έστω ένα αστεροειδή γράφημα G με m sun-κορυφές και ℓ planet-κορυφές. Συμβολίζουμε με $\alpha(j)$ το πλήθος των μέγιστων κλικών K_j, $1 \leq j \leq \ell$, των planet-γράφημα $G[B]$. Παρόμοια, συμβολίζουμε με $\beta(j)$, $\gamma(j)$, και $\delta(j)$ το πλήθος των μέγιστων αστεριών S_j, μονοπατιών P_j, και κύκλων C_j, αντίστοιχα, του γραφήματος $G[B]$. Έτσι, έχουμε:

$$\alpha(j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}, \quad \beta(j) = \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij}, \quad \gamma(j) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_{ij}, \quad \text{and} \quad \delta(j) = \sum_{i=1}^{m} \delta_{ij}.$$

Ορίζουμε το διάνυσμα $\alpha = [\alpha(1), \alpha(2), \ldots, \alpha(\ell)]$ πάνω στο planet-γράφημα $G[B]$, και το καλούμε *διάνυσμα κλικας* (clique vector) του αστεροειδή γραφήματος G. Με έναν παρόμοιο τρόπο, ορίζουμε τα διανύσματα β, γ, και δ και τα ονομάζουμε *διάνυσμα αστεριού* (star vector), *διάνυσμα μονοπατιού* (path vector), και *διάνυσμα κύκλου* (cycle vector), αντίστοιχα. Επομένως, τα διανύσματα α, β, γ, και δ ενός αστεροειδή γραφήματος G καθορίζουν το πλήθος των μέγιστων κλικών, αστεριών, μονοπατιών, και κύκλων στο γράφημα $G[B]$. Απο εδώ και στο εξής, γράφουμε $\alpha \neq 0$ για να δηλώσουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας δείκτης j, $1 \leq j \leq \ell$, τέτοιος ώστε $\alpha(j) \neq 0$, δηλαδή, $\alpha = 0$ είναι ισοδύναμο με $\alpha(1) = \alpha(2) = \ldots = \alpha(\ell) = 0$. Χρησιμοποιούμε παρόμοιο συμβολισμό για τα διανύσματα αστεριών, μονοπατιών και κύκλων. Για παράδειγμα, εάν $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$ και $\delta \neq 0$, τότε το planet-γράφημα $G[B]$ περιέχει μόνο αστέρια, μονοπάτια και κύκλους.

Ενδιαφερόμαστε για την εξαγωγή κλειστών τύπων για το πλήθος των σκελετικών δέντρων των γραφημάτων της μορφής $K_n - G_c$ και $K_n - G_s$, όπου G_c είναι ένα complete-planet γράφημα και G_s είναι ένα star-planet γράφημα. Με σκοπό να το πετύχουμε αυτό, επιγράφουμε κατάλληλα τις κορυφές των γραφημάτων G_c και G_s.

Έστω ένα αστεροειδή γράφημα G με planet-υπογραφήματα $G_1, G_2, \ldots, G_m$ από ένα σύνολο ℓ planet-κορυφών. Ο τρόπος που επιγράφουμε ξεκινάει πρώτα από τη επιγραφή των κορυφών των planet-υπογραφημάτων $G_1, G_2, \ldots, G_m$ και στην συνέχεια επιγράφουμε τις κορυφές του sun-γράφημα $G[A]$. Πιο συγκεκριμένα:

- πρώτα επιγράφουμε τις ℓ κορυφές του planet-γράφημα $G[B]$. Για κάθε ένα γράφημα G_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, επιγράφουμε τις κορυφές των μέγιστων κλικών, αστεριών, μονοπατιών, και κύκλων με την ακόλουθη σειρά:

  (i) $K_1, K_1, \ldots, K_2, K_2, \ldots, K_{\ell_i}$· οι κορυφές από κάθε κλίκα K_j, $1 \leq j \leq \ell_i$, επιγράφονται με τυχαίο τρόπο·

  (ii) $S_3, S_3, \ldots, S_4, S_4, \ldots, S_{\ell_i}$· για κάθε αστέρα S_j, $3 \leq j \leq \ell_i$, όλες οι κορυφές εκτός από την κεντρική κορυφή επιγράφονται πρώτες και με τυχαίο τρόπο, ενώ η κεντρική κορυφή επιγράφεται τελευταία·

  (iii) $P_4, P_4, \ldots, P_5, P_5, \ldots, P_{\ell_i}$· οι κορυφές από κάθε μονοπάτι $P_j = v_1 v_2 \cdots v_j$ επιγράφονται με την σειρά $v_1, v_2, \ldots, v_j$, $4 \leq j \leq \ell_i$·

  (iv) $C_4, C_4, \ldots, C_4, C_4, \ldots, C_{\ell_i}$· οι κορυφές από κάθε κύκλο $C_j = v_1 v_2 \cdots v_j v_1$ επιγράφονται με την διάταξη $v_1, v_2, \ldots, v_j$, $4 \leq j \leq \ell_i$·

- στη συνέχεια, επιγράφουμε τις m κορυφές των $v_i \in G[A]$, $1 \leq i \leq m$·

- για ένα star-planet γράφημα, η κεντρική κορυφή του sun-γράφημα επιγράφεται τελευταία, δηλαδή, η κεντρική κορυφή έχει την υψηλότερη επιγραφή.

5.2.2 Συμπληρωματικός Σκελετικών Δέντρων Πίνακας

Έστω ένα γράφημα G με n κορυφές $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Ο *συμπληρωματικός σκελετικών δέντρων πίνακας* (complement spanning-tree matrix) του γραφήματος G είναι ένας $n \times n$ πίνακας A που ορίζεται ως εξής:

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 - \frac{\overline{d}(v_i)}{n} & \text{εάν } i = j, \\ \frac{1}{n} & \text{εάν } i \neq j \text{ και } v_i v_j \text{ είναι ακμή του γραφήματος } \overline{G}, \\ 0 & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

όπου $\overline{d}(v_i)$ είναι ο βαθμός της κορυφής v_i στο γράφημα $\overline{G}$. Έχει αποδειχτεί [103] (γνωστό επίσης ως το *συμπληρωματικών σκελετικών δέντρων πίνακας θεώρημα* (complement spanning tree matrix theorem)) ότι το πλήθος των σκελετικών δέντρων $\tau(G)$ του γραφήματος G δίνεται από τον τύπο

$$\tau(G) = n^{n-2} \cdot \det(A).$$

Στην περίπτωση που το γράφημα $G = K_n$, έχουμε ότι $A = I_n$ και επομένως $\det(A) = 1$· η *Cayley's tree formula* [47] ορίζει ότι $\tau(K_n) = n^{n-2}$. Εάν $G = K_n - H$, όπου $|V(H)| = p < n$, σχηματίζουμε τον συμπληρωματικό σκελετικών δέντρων πίνακα A του γραφήματος G· έχει την ακόλουθη μορφή (κενά στοιχεία στους πίνακες αναπαριστούν 0):

$$A = \begin{bmatrix} I_{n-p} & \\ & M' \end{bmatrix},$$

όπου ο υποπίνακας M' είναι ένας $p \times p$ πίνακας που αντιστοιχεί στις κορυφές του γραφήματος H. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο υποπίνακας I_{n-p} αντισοιχεί στις υπόλοιπες $n-p$ κορυφές που έχουν βαθμό $n-1$ στο γράφημα G, και, γι' αυτό, έχουν βαθμό 0 στο γράφημα $\overline{G}$. Από την μορφή του πίνακα A, έχουμε ότι $\det(A) = \det(M')$. Έτσι, επικεντρωνόμαστε στον υπολογισμό της ορίζουσας του πίνακα M'.

Ο *πίνακας βαθμών* (matrix degree) ενός γραφήματος G με p κορυφές είναι ένας $p \times p$ πίνακας D ορισμένος ως εξής: $D_{i,i} = d(v_i)$ και $D_{i,j} = 0$ για $i \neq j$, $1 \leq i,j \leq p$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι εάν πολλαπλασιάσουμε με n κάθε στήλη (ή γραμμή) τον πίνακα M', θα έχουμε $\det(M') = n^{-p}\det(M)$, όπου $M = B + nI_p - D$, και B and D είναι οι πίνακες γειτνίασης και βαθμών του γραφήματος H, αντίστοιχα. Συνοψίζοντας, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Πόρισμα 5.1. *Έστω ένα γράφημα $G = K_n - H$ όπου $|V(H)| = p$, και έστω $M = B + nI_p - D$ ένας $p \times p$ πίνακας, όπου οι πίνακες B και D είναι οι πίνακες γειτνίασης και βαθμών του γραφήματος H, αντίστοιχα. Τότε,*

$$\tau(G) = n^{n-p-2} \cdot \det(M).$$

Σε όλο το υπόλοιπο κεφάλαιο, κενές εγγραφές σε πίνακες αντιπροσωπεύουν μηδενικές τιμές 0.

5.3 Το Πλήθος των Σκελετικών Δέντρων των Αστεροειδών Γραφημάτων

Πρίν αποδείξουμε τους κλειστούς τύπους για το πλήθος των σκελετικών δέντρων των γραφημάτων $K_n - G$, όπου το γράφημα G είναι ένα αστεροειδή γράφημα, ας υποθέσουμε τους $j \times j$ πίνακες M_j^K, M_j^P, M_j^C, και M_j^S, που αντιστοιχούν σε μια κλίκα K_j, σε ένα αστέρα S_j, σε ένα μονοπάτι P_j, και σε έναν κύκλο C_j με j κορυφές, αντίστοιχα· δηλαδή,

$$M_j^K = \begin{bmatrix} n-j & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & n-j & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & n-j & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & n-j \end{bmatrix}, \quad M_j^S = \begin{bmatrix} n-2 & & & & & 1 \\ & n-2 & & & & 1 \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & n-2 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & n-j \end{bmatrix},$$

$$M_j^P = \begin{bmatrix} n-2 & 1 & & & \\ 1 & n-3 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & n-3 & 1 \\ & & & 1 & n-2 \end{bmatrix}, \quad \text{and } M_j^C = \begin{bmatrix} n-3 & 1 & & & 1 \\ 1 & n-3 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & n-3 & 1 \\ 1 & & & 1 & n-3 \end{bmatrix}.$$

Σημειώστε ότι εξ' ορισμού του συμπληρωματικού σκελετικών δέντρων πίνακα, το άθροισμα των στοιχείων σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη, σε κάθε έναν από τους τέσσερις πίνακες, είναι $n-1$. Είναι εύκολο να εξάγει κανείς ένα τύπο για τις ορίζουσες των πινάκων M_j^K και M_j^S αφαιρώντας την πρώτη γραμμή από όλες τις υπόλοιπες γραμμές και προσθέτοντας όλες τις στήλες στην πρώτη στήλη. Έχουμε:

$$\begin{aligned} & \lambda(K_j) \equiv \det(M_j^K) &=& \ (n-1)\cdot(n-j-1)^{j-1} \\ \text{and} \quad & \lambda(S_j) \equiv \det(M_j^S) &=& \ (n-2)^{j-1}\cdot\left(n-j-\frac{j-1}{n-2}\right). \end{aligned}$$

Για τους πίνακες M_j^P και M_j^C, ορίζουμε μια αναδρομική σχέση που επιλύεται χρησιμοποιώντας κλασικές τεχνικές (παρόμοια αποτελέσματα μπορούν να βρεθούν στην εργασία [41])· για $n \geq 5$, έχουμε:

$$\begin{array}{rlcl} & \lambda(P_j) \equiv \det(M_j^P) & = & \dfrac{n-1}{r \cdot 2^j} \cdot \Big((n-3+r)^j - (n-3-r)^j\Big) \\ & & = & \dfrac{n-1}{2^{j-1}} \cdot \displaystyle\sum_{t=0}^{j-1} \left(r^t \cdot (n-3)^{j-t-1}\right) \\ \text{and} & \lambda(C_j) \equiv \det(M_j^C) & = & \dfrac{1}{2^j} \cdot \left((n-3+r)^j + (n-3-r)^j + (-2)^{j+1}\right) \end{array}$$

όπου

$$r = \sqrt{(n-1) \cdot (n-5)}.$$

Η συνθήκη $n \geq 5$ μας επιβεβαιώνει ότι η μεταβλητή r είναι ένας πραγματικός αριθμός· δεν είναι απαραίτητο, εφόσον εάν θέλουμε να έχουμε ένα μονοπάτι ή ένα κύκλο, καθένα από αυτά πρέπει να έχει τουλάχιστον τέσσερις κορυφές (θυμηθείτε την σύμβασή μας) και εφόσον το γράφημα sun-γράφημα έχει τουλάχιστον μια κορυφή. Πιο συγκεκριμένα, σημειώστε ότι εάν $n = 5$ τότε $\lambda(P_j) = \lambda(C_j) = 0$ εφόσον $(n-3+r)^j - (n-3-r)^j = 0$ και $(n-3+r)^j + (n-3-r)^j = 2^j + 2^j$. Αυτό είναι αναμενόμενο και στις δύο περιπτώσεις, επειδή το αστεροειδή γράφημα A αποτελείται από μια μοναδική κορυφή γειτονική με όλες τις κορυφές των γραφημάτων P_j $(= P_4)$ ή C_j $(= C_4)$ και επομένως $K_n - A = \overline{A}$ είναι μη-συνεκτικό. Επιπλέον, δεν είναι δύσκολο να δει κανείς:

Παρατήρηση 5.1. *Οι ποσότητες $\lambda(K_j), \lambda(S_j), \lambda(P_j)$, και $\lambda(C_j)$ είναι μη-αρνητικές.*

5.3.1 Complete-planet Γραφήματα

Έστω K_n το πλήρες γράφημα με n κορυφές και G_c ένα complete-planet γράφημα με m sun-κορυφές $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ και ℓ planet-κορυφές τέτοιο ώστε $V(G_c) \subseteq V(K_n)$. Θα χρησιμοποιήσουμε το Πόρισμα 5.1 με σκοπό να εξάγουμε έναν κλειστό τύπο για το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος $G = K_n - G_c$.

Για κάθε γράφημα $G_i + v_i$, $1 \leq i \leq m$, όπου το γράφημα G_i είναι το i-στο planet-υπογράφημα του G_c, κατασκευάζουμε έναν πίνακα U_i που έχει την ακόλουθη μορφή:

$$U_i = \begin{bmatrix} M^K & & & & 1 \\ & M^S & & & 1 \\ & & M^P & & 1 \\ & & & M^C & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & n - d(v_i) \end{bmatrix},$$

όπου οι υποπίνακες M^K, M^S, M^P, και M^C αντιστοιχούν στις κλίκες, αστέρια, μονοπάτια, και κύκλους των γραφημάτων G_i αντίστοιχα. Ο πίνακας M^K περιέχει α_{i1} αντίγραφα του πίνακα M_1^K, α_{i2} αντίγραφα του πίνακα M_2^K, και ο.κ.ε. Πιο συγκεκριμένα, ο πίνακας M^K έχει ακριβώς $\sum_{j=1}^{\ell_i} j\alpha_{ij}$ γραμμές και στήλες, που αντιστοιχούν σε μια κορυφή από τις α_{ij} κλίκες K_j, $1 \leq j \leq \ell_i$, του γραφήματος G_i. Αυτή η περίπτωση είναι παρόμοια για τους πίνακες M^S, M^P, και M^C. Από την μορφή που δείξαμε προηγουμένως του πίνακα και της Εξ. (5.1), συμπεράνουμε ότι ο πίνακας U_i έχει μέγεθος $(\ell_i + 1) \times (\ell_i + 1)$.

Με σκοπό να υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα U_i, προσθέτουμε μια επιπλέον γραμμή και μια επιπλέον στήλη επάνω και αριστερά του πίνακα U_i· ο τροποποιημένος $(\ell_i + 2) \times (\ell_i + 2)$ πίνακας U_i' έχει την $(1, 1)$-θέση και $(1, \ell_i + 2)$-θέση ίση με 1 ενώ όλες οι άλλες θέσεις της πρώτης γραμμής και στήλης είναι ίσες με 0. Πιο συγκεκριμένα, ο πίνακας U_i' έχει την ακόλουθη μορφή:

$$U_i' = \left[\begin{array}{c:ccc} 1 & & & 1 \\ \hdashline & & & \\ & & U_i & \\ & & & \\ & & & \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & & & & & 1 \\ & M^K & & & & 1 \\ & & M^S & & & 1 \\ & & & M^P & & 1 \\ & & & & M^C & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & n-d(v_i) \end{bmatrix}.$$

Αναπτύσσοντας ως προς τα στοιχεία της πρώτης στήλης του πίνακα U_i', έχουμε ότι $\det(U_i') = \det(U_i)$. Αφαιρούμε την πρώτη γραμμή του πίνακα U_i' από όλες τις γραμμές του πίνακα U_i', εκτός από την τελευταία. Στη συνέχεια, πολλαπλασιάζουμε τις στήλες του πίνακα U_i', εκτός από την τελευταία στήλη, με $1/(n-1)$ και τις προσθέτουμε στην πρώτη στήλη. Σημειώστε ότι το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης εκτός από την τελευταία είναι ίσα με $n-1$. Τελικώς, αφαιρούμε την πρώτη στήλη από την τελευταία στήλη του πίνακα U_i'. Έτσι, αντικαθιστώντας την τιμή $d(v_i) = m + \ell_i - 1$ και εφόσον $\det(U_i') = \det(U_i)$, θα έχουμε:

$$\det(U_i) \;=\; \begin{vmatrix} M^K & & & & \\ & M^S & & & \\ & & M^P & & \\ & & & M^C & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & q_i \end{vmatrix} \;=\; q_i \cdot \prod_{j=1}^{\ell_i} \left(\lambda(K_j)^{\alpha_{ij}} \cdot \lambda(S_j)^{\beta_{ij}} \cdot \lambda(P_j)^{\gamma_{ij}} \cdot \lambda(C_j)^{\delta_{ij}}\right),$$

όπου $q_i = n - (m + \ell_i - 1) - \dfrac{\ell_i}{n-1}$.

Τώρα είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τον αριθμό $\tau(G)$ των σκελετικών δέντρων του γραφήματος $G = K_n - G_c$ χρησιμοποιώντας το συμπληρωματικό σκελετικών δέντρων πίνακα θεώρημα και το Πόρισμα 5.1. Έτσι κατασκευάζουμε έναν $(m+\ell) \times (m+\ell)$ πίνακα $U(= M)$ για ένα complete-planet γράφημα G_c, βασιζόμενοι στον τρόπο που επιγράφουμε τις κορυφές. Τότε θα έχουμε:

$$\tau(G) = n^{n-m-\ell-2} \cdot \det(U) \tag{5.2}$$

$$\text{όπου} \;\; U = \begin{bmatrix} U_{1,1} & & & & 1 & & & \\ & U_{2,2} & & & & 1 & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & U_{m,m} & & & & 1 \\ 1 & & & & n-d(v_1) & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & & & 1 & n-d(v_2) & \cdots & 1 \\ & & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & 1 & 1 & \cdots & n-d(v_m) \end{bmatrix}$$

είναι ένας $(m+\ell) \times (m+\ell)$ πίνακας και οι υποπίνακες $U_{i,i}$, $1 \le i \le m$, αποκτούνται από τον πίνακα U_i διαγράφοντας την τελευταία γραμμή και την τελευταία στήλη (που αντιστοιχεί στην κορυφή v_i). Τώρα απομένει να υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα U. Ακολουθώντας μια διαδικασία παρόμοια με αυτή που εφαρμόσαμε στον πίνακα U_i, θα έχουμε:

$$\det(U) \;=\; \prod_{j=1}^{\ell} \left(\lambda(K_j)^{\alpha(j)} \cdot \lambda(S_j)^{\beta(j)} \cdot \lambda(P_j)^{\gamma(j)} \cdot \lambda(C_j)^{\delta(j)}\right) \;\cdot\; \begin{vmatrix} q_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & q_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & q_m \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{j=1}^{\ell} \left(\lambda(K_j)^{\alpha(j)} \cdot \lambda(S_j)^{\beta(j)} \cdot \lambda(P_j)^{\gamma(j)} \cdot \lambda(C_j)^{\delta(j)} \right) \cdot \det(D_c). \tag{5.3}$$

Για να υπολογίσουμε την τιμή $\det(D_c)$, πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή του πίνακα D_c με -1 και την προσθέτουμε στις υπόλοιπες $m-1$ γραμμές. Τότε, πολλαπλασιάζουμε την στήλη i με $\frac{q_1-1}{q_i-1}$, $2 \le i \le m$, και την προσθέτουμε στην πρώτη στήλη. Ο πίνακας D_c μετατρέπεται σε άνω τριγωνικό με την $(1,1)$-θέση ίση με $q_1 + \sum_{i=2}^{m} \frac{q_1-1}{q_i-1}$ και κάθε (i,i)-θέση, $2 \le i \le m$, ισούται με $q_i - 1$. Έτσι,

$$det(D_c) \;=\; \left(q_1 + \sum_{i=2}^{m} \frac{q_1-1}{q_i-1} \right) \cdot \prod_{i=2}^{m} (q_i - 1) \;=\; \left(1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{q_i - 1} \right) \cdot \prod_{i=1}^{m} (q_i - 1).$$

Χρησιμοποιώντας την μεταβλητή p_i για να δηλώνουμε $p_i = q_i - 1$ και αντικαθιστώντας την τιμή της ορίζουσας $\det(D_c)$ στην Εξ. (5.3), θα έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 5.1. *Έστω ένα complete-planet γράφημα G_c με m sun-κορυφές και ℓ planet-κορυφές. Τότε, το πλήθος των σκελετικών δένδρων $\tau(G)$ του γραφήματος $G = K_n - G_c$, όπου $n \ge m + \ell$, είναι ίσο με*

$$\tau(G) \;=\; n^{n-m-\ell-2} \cdot \prod_{j=1}^{\ell} \left(\lambda(K_j)^{\alpha(j)} \cdot \lambda(S_j)^{\beta(j)} \cdot \lambda(P_j)^{\gamma(j)} \cdot \lambda(C_j)^{\delta(j)} \right) \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i} \right) \cdot \prod_{i=1}^{m} p_i$$

όπου

$$p_i \;=\; n - m - \frac{n}{n-1} \cdot \ell_i$$

και $\alpha(j)$ (αντίστ. $\beta(j)$, $\gamma(j)$, $\delta(j)$) είναι το πλήθος των μέγιστων κλικών (αντίστ. αστεριών, μονοπατιών, κύκλων) με j κορυφές στα planet-γραφήματα του γραφήματος G_c.

Για τις ποσότητες p_i, μπορούμε να δείξουμε το ακόλουθο.

Λήμμα 5.1. *Έστω ένα complete-planet γράφημα G_c με m sun-κορυφές και ℓ planet-κορυφές. Τότε, για τις ποσότητες p_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, έχουμε:*

1. *εάν $m = 1$, τότε $p_1 \ge -1$ με την ισότητα να ισχύει εάν και μόνο εάν $n = m + \ell = \ell + 1$·*

2. *εάν $m \ge 2$ και $\ell = 0$, τότε για όλα τα $i = 1, 2, \ldots, m$, $p_i = n - m \ge 0$, με την ισότητα να ισχύει εάν και μόνο εάν $n = m + \ell = m$·*

3. *εάν $m \ge 2$, $\ell > 0$, και $\exists \ell_j = \ell$, τότε $p_j \ge -\frac{n-m}{n-1} > -1$ και για όλα τα $i \ne j$, $p_i = n - m > 0$ ·*

4. *εάν $m \ge 2$, $\ell > 0$, και $\forall i = 1, 2, \ldots, m$, $\ell_i \ne \ell$, τότε $p_i > 0$.*

Απόδειξη: Υπενθυμίζουμε ότι $n \ge m + \ell$. Για τις τέσσερις περιπτώσεις, θα έχουμε:

1. Εάν $m = 1$ τότε $n \ge 1 + \ell \Longrightarrow -\ell \ge -(n-1)$. Έτσι,

$$p_1 \;=\; n - 1 - \frac{n}{n-1} \cdot \ell \;\ge\; n - 1 - \frac{n}{n-1} \cdot (n-1) \;=\; -1.$$

   Επομένως, $p_1 = -1$ iff $n = 1 + \ell$.

2. Προφανώς ισχύει.

3. Για όλα τα $i \neq j$, $p_i = n - m > 0$ εφόσον $n \geq m + \ell > m$. Επειδή $-\ell \geq -(n-m)$, για p_j θα έχουμε:

$$p_j \;=\; n - m - \frac{n}{n-1}\cdot \ell \;\geq\; n - m - \frac{n}{n-1}\cdot (n-m) \;=\; -\frac{n-m}{n-1}$$

που είναι μεγαλύτερο από -1 επειδή $n - 1 > n - m > 0$.

4. Εφόσον $\ell_i \neq \ell$ για όλα τα $i = 1, 2, \ldots, m$, τότε $\ell_i \leq \ell - 1$. Έτσι,

$$p_i \;=\; n - m - \frac{n}{n-1}\cdot \ell_i \;\geq\; \ell - \frac{n}{n-1}\cdot (\ell - 1) \;=\; \frac{n-\ell}{n-1} \;>\; 0$$

αφού ισχύει $n \geq m + \ell > \ell \geq 1$. ∎

Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι παρόλο που μια ποσότητα p_i μπορεί να είναι αρνητική (δείτε Περιπτώσεις (1) και (3) από το Λήμμα 5.1), το πλήθος των σκελετικών δέντρων δεν είναι ποτέ αρνητικό. Στην Περίπτωση (1), σημειώνουμε ότι

$$\left(1 + \sum_{i=1}^{m} 1/p_i\right)\cdot \prod_{i=1}^{m} p_i \;=\; (1 + 1/p_1)\cdot p_1 \;=\; p_1 + 1 \;\geq\; 0,$$

που επάγει ότι $\tau(K_n - G_c) \geq 0$ αφού n, $\lambda(K_j)$, $\lambda(S_j)$, $\lambda(P_j)$, και $\lambda(C_j)$ είναι όλα μη-αρνητικά (δείτε Παρατήρηση 5.1)· $\tau(K_n - G_c) = 0$ εάν και μόνο εάν $p_1 = -1$ όπως αναμενόταν αφού εάν $p_1 = -1$, που ισχύει εάν και μόνο εάν $n = 1 + \ell$, τότε το γράφημα $K_n - G_c$ είναι το συμπλήρωμα του γραφήματος G_c στο οποίο η (μοναδική) sun-κορυφή v_1 του γραφήματος G_c είναι απομονωμένη.

Στην Περίπτωση (3), έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\left(1 + \sum_{i=1}^{m} 1/p_i\right)\cdot \prod_{i=1}^{m} p_i \;&=\; \prod_{i=1}^{m} p_i + \sum_{i=1}^{m}\prod_{t\neq i} p_t \\
&\geq\; (n-m)^{m-1}\cdot\left(-\frac{n-m}{n-1}\right) + (n-m)^{m-1} + (m-1)\cdot(n-m)^{m-2}\cdot\left(-\frac{n-m}{n-1}\right) \\
&=\; (n-m)^{m-1}\cdot\left[-\frac{n-m}{n-1} + 1 - \frac{m-1}{n-1}\right] = 0,
\end{aligned}$$

που σημαίνει ότι $\tau(K_n - G_c) \geq 0$· ξανά, $\tau(K_n - G_c) = 0$ εάν και μόνο εάν $n = m + \ell$, που είναι αναμενόμενο αφού τότε το γράφημα $K_n - G_c$ είναι το συμπλήρωμα του γραφήματος G_c, στο οποίο η sun-κορυφή v_j είναι απομονωμένη.

5.3.2 Star-planet Γραφήματα

Έστω ένα star-planet γράφημα G_s με $m + 1$ sun-κορυφές και ℓ planet-κορυφές τέτοιο ώστε $V(G_s) \subseteq V(K_n)$. Χρησιμοποιούμε το συμπληρωματικό σκελετικών δέντρων πίνακα θεώρημα με σκοπό να εξάγουμε έναν κλειστό τύπο για το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος $G = K_n - G_s$.

Στην προηγούμενη ενότητα, για το γράφημα $G = K_n - G_c$ έχουμε σχηματίσει τον $(\ell_i{+}1) \times (\ell_i{+}1)$ πίνακα U_i, και έχουμε υπολογίσει την ορίζουσά του. Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι ο πίνακας U_i ταιριάζει με τον αντίστοιχο πίνακα για το γράφημα $K_n - G_s$ δεδομένου ότι χρησιμοποιούμε $d(v_i) = \ell_i + 1$, $1 \leq i \leq m$. Υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα U_i βασιζόμενοι στην ίδια τεχνική με αυτήν που εφαρμόσαμε για την περίπτωση του γραφήματος $K_n - G_c$, και θα έχουμε:

$$\det(U_i) \;=\; p_i \cdot \prod_{j=1}^{\ell_i}\left(\lambda(K_j)^{\alpha_{ij}}\cdot \lambda(S_j)^{\beta_{ij}}\cdot \lambda(P_j)^{\gamma_{ij}}\cdot \lambda(C_j)^{\delta_{ij}}\right),$$

όπου $p_i \;=\; n - (\ell_i + 1) - \dfrac{\ell_i}{n-1} \;=\; n - 1 - \dfrac{n}{n-1} \cdot \ell_i$.

Έτσι, από το Πόρισμα 5.1 κατασκευάζουμε τον $(m+\ell+1)\times(m+\ell+1)$ πίνακα $U(=M)$, σύμφωνα με τον τρόπο επιγραφής για ένα star-planet γράφημα G_s. Για τον αριθμό $\tau(G)$ των σκελετικών δέντρων του γραφήματος $G = K_n - G_s$, έχουμε τον ακόλουθο τύπο:

$$\tau(G) = n^{n-m-\ell-3} \cdot \det(U) \tag{5.4}$$

$$\text{όπου } U = \begin{bmatrix} U_{1,1} & & & & 1 & & & & \\ & U_{2,2} & & & & 1 & & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & & \\ & & & U_{m,m} & & & & 1 & \\ 1 & & & & n-d(v_1) & & & & 1 \\ & 1 & & & & n-d(v_2) & & & 1 \\ & & \ddots & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & & & & n-d(v_m) & 1 \\ & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 & n-d(c) \end{bmatrix}$$

είναι ένας $(m+\ell+1)\times(m+\ell+1)$ πίνακας. Όπως και στην περίπτωση του γραφήματος $K_n - G_c$, κάθε υποπίνακας $U_{i,i}$, $1 \le i \le m$, αποκτάται από τον πίνακα U_i διαγράφοντας την τελευταία γραμμή και την τελευταία στήλη. Σημειώστε ότι

$$\det(U_{i,i}) \;=\; \prod_{j=1}^{\ell_i} \lambda(K_j)^{\alpha_{ij}} \cdot \lambda(S_j)^{\beta_{ij}} \cdot \lambda(P_j)^{\gamma_{ij}} \cdot \lambda(C_j)^{\delta_{ij}}.$$

Έτσι, για την ορίζουσα του πίνακα U, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \det(U) \;&=\; \prod_{j=1}^{\ell} \Big(\lambda(K_j)^{\alpha(j)} \cdot \lambda(S_j)^{\beta(j)} \cdot \lambda(P_j)^{\gamma(j)} \cdot \lambda(C_j)^{\delta(j)}\Big) \cdot \begin{vmatrix} p_1 & & & & 1 \\ & p_2 & & & 1 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & p_m & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & n-m \end{vmatrix} \\ &=\; \prod_{j=1}^{\ell} \Big(\lambda(K_j)^{\alpha(j)} \cdot \lambda(S_j)^{\beta(j)} \cdot \lambda(P_j)^{\gamma(j)} \cdot \lambda(C_j)^{\delta(j)}\Big) \cdot \det(D_s), \end{aligned}$$

όπου D_s είναι ένας $(m+1)\times(m+1)$ πίνακας. Με σκοπό να υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα D_s, δουλεύουμε όπως και στην περίπτωση του complete-planet γραφήματος: πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή του πίνακα D_s με -1 και την προσθέτουμε στις επόμενες $m-1$ γραμμές. Τότε, πολλαπλασιάζουμε την στήλη i με $\frac{p_1}{p_i}$, $2 \le i \le m$, και τη προσθέτουμε στην πρώτη στήλη. Τελικά, έτσι ώστε να κάνουμε τον πίνακα D_s άνω διαγώνιο, πολλαπλασιάζουμε την πρώτη στήλη με $\frac{-1}{p_1}$ και την προσθέτουμε add it toστην στήλη $m+1$. Έτσι,

$$\det(D_s) \;=\; \left(n - m - \frac{1}{p_1} - \sum_{i=2}^{m} \frac{1}{p_i}\right) \cdot \prod_{i=1}^{m} p_i \;=\; \left(n - m - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i}\right) \cdot \prod_{i=1}^{m} p_i.$$

Έχουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 5.2. *Έστω ένα star-planet γράφημα G_s με $m+1$ sun-κορυφές και ℓ planet-κορυφές. Τότε, το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος $G = K_n - G_s$, όπου $n \geq m+\ell+1$, είναι ίσο με*

$$\tau(G) \;=\; n^{n-m-\ell-3} \cdot \prod_{j=1}^{\ell} \left(\lambda(K_j)^{\alpha(j)} \cdot \lambda(S_j)^{\delta(j)} \cdot \lambda(P_j)^{\beta(j)} \cdot \lambda(C_j)^{\gamma(j)} \right) \cdot \left(n - m - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i} \right) \cdot \prod_{i=1}^{m} p_i$$

όπου

$$p_i \;=\; n - 1 - \frac{n}{n-1} \cdot \ell_i$$

και $\alpha(j)$ (αντίστ. $\beta(j)$, $\gamma(j)$, $\delta(j)$) είναι το πλήθος των μέγιστων κλικών (αντίστ. αστεριών, μονοπατιών, κύκλων) με j κορυφές στο planet-graph του γραφήματος G_s.

Σε αυτήν την περίπτωση, για τις ποσότητες p_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, έχουμε ότι:

Λήμμα 5.2. *Έστω ένα star-planet γράφημα G_s με $m+1$ sun-κορυφές και ℓ planet-κορυφές. Τότε,*

1. *εάν $\ell = 0$, τότε για όλα τα $i = 1, 2, \ldots, m$, $p_i = n-1 > 0$·*
2. *εάν $\ell > 0$ και $m = 1$, τότε $p_1 > 0$·*
3. *εάν $\ell > 0$, $m \geq 2$, και $\exists \ell_j = \ell$, τότε $p_j > 0$ και για όλα $i \neq j$, $p_i = n-1 > 0$·*
4. *εάν $\ell > 0$, $m \geq 2$, και $\forall i = 1, 2, \ldots, m$, $\ell_i < \ell$, τότε $p_i > m \geq 2$.*

Απόδειξη: Υπενθυμίζουμε ότι $n \geq m+1+\ell$ που εκφράζει ότι $-\ell \geq m+1-n$. Επομένως,

1. Προφανώς ισχύει.
2. Εφόσον $m = 1$ παίρνουμε ότι $-\ell \geq 2-n$ και έτσι

$$p_1 \;=\; n-1-\frac{n}{n-1}\cdot \ell \;\geq\; n-1+\frac{n}{n-1}\cdot(2-n) \;=\; \frac{1}{n-1} \;>\; 0$$

επειδή $n > 1$.

3. Από τον ορισμό των p_i, ισχύει $p_i = n-1 > 0$ για όλα τα $i \neq j$. Για την ποσότητα p_j, έχουμε

$$p_j \;=\; n-1-\frac{n}{n-1}\cdot \ell \;\geq\; n-1+\frac{n}{n-1}\cdot(m+1-n) \;=\; \frac{nm}{n-1} - 1 \;>\; 0$$

εφόσον $m \geq 2$ και $n > 3$, και έτσι $nm \geq 2n > n-1$.

4. Εφόσον για όλα τα $i = 1, 2, \ldots, m$ ισχύει ότι $\ell_i \neq \ell$, τότε $\ell_i \leq \ell - 1$. Επιπλέον, $n-1 \geq m+\ell$. Έτσι,

$$p_i \;\geq\; m+\ell-\frac{n}{n-1}\cdot(\ell-1) \;=\; m+\frac{n\ell-\ell-n\ell+n}{n-1} \;=\; m+\frac{n-\ell}{n-1} \;>\; m$$

αφού $n \geq m+1+\ell > \ell \geq 1$. ∎

Το Λήμμα 5.2 εκφράζει ότι οι ποσότητες p_i είναι σε όλες τις περιπτώσεις θετικές. Επιπλέον, μπορούμε να πιστοποιήσουμε ότι το πλήθος των σκελετικών δέντρων δεν είναι ποτέ αρνητικό. Επειδή τα n, $\lambda(K_j)$, $\lambda(S_j)$, $\lambda(P_j)$, και $\lambda(C_j)$ είναι όλα μη-αρνητικά (Παρατήρηση 5.1), απομένει να δείξουμε ότι $(n - m - \sum_{i=1}^{m} 1/p_i) \cdot \prod_{i=1}^{m} p_i \geq 0$. Στην περίπτωση (1), σημειώνουμε ότι

$$\left(n - m - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i} \right) \cdot \prod_{i=1}^{m} p_i \;=\; \left(n - m - \frac{m}{n-1} \right) \cdot (n-1)^m \;=\; \left(n \cdot \frac{n-m-1}{n-1} \right) \cdot (n-1)^m \geq 0$$

επειδή $n \geq m+1 > 1$. Έτσι, ο αριθμός $\tau(K_n - G_s)$ των σκελετικών δέντρων δεν είναι μικρότερο από 0· εάν $n = m+1$ τότε $\tau(K_n - G_s) = 0$, όπως αναμενόταν, εφόσον για $n = m+1$, το γράφημα $K_n - G_s$ είναι το συμπλήρωμα του γραφήματος G_s στο οποίο η κεντρική κορυφή του sun-γραφήματος του G_s είναι απομονωμένη. Στην περίπτωση (2), $m = 1$ και

$$\left(n - m - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i}\right) \cdot \prod_{i=1}^{m} p_i \;=\; \left(n - 1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot p_1 \;=\; (n-1) \cdot p_1 - 1 \;=\; (n-1)^2 - n\ell - 1 \;=\; n(n-2-\ell) \;\geq\; 0$$

αφού $n \geq m+1+\ell = 2+\ell$. Επίσης, εάν $n = \ell+2$ τότε $\tau(K_n - G_s) = 0$, όπως αναμενόταν αφού για $n = \ell+2$, το γράφημα $K_n - G_s$ είναι το συμπλήρωμα ενός γραφήματος G_s στο οποίο η sun-κορυφή v_1 του γραφήματος G_s είναι απομονωμένη. Στην περίπτωση (3) έχουμε,

$$\begin{aligned}
\left(n - m - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i}\right) \cdot \prod_{i=1}^{m} p_i \;&=\; \left(n - m - \left(\frac{m-1}{n-1} + \frac{1}{p_j}\right)\right) \cdot (n-1)^{m-1} \cdot p_j \\
&=\; (n-1)^{m-1} \cdot \left(\left(n - m - \frac{m-1}{n-1}\right) \cdot p_j + 1\right) \;>\; 0
\end{aligned}$$

επειδή $p_j > 0$ και $n > m \implies -\frac{m-1}{n-1} > -1 \implies n - m - \frac{m-1}{n-1} > n - m - 1 \geq \ell > 0$. Τελικώς, στην περίπτωση (4), εφόσον $p_i > m$,

$$\left(n - m - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i}\right) \cdot \prod_{i=1}^{m} p_i \;>\; \left(n - m - \frac{m}{m}\right) \cdot m^m \;=\; (n-m-1) \cdot m^m \;>\; 0.$$

5.4 Αποτελέσματα Μεγιστοποίησης

Όπως προαναφέρθηκε στην εισαγωγή, το πιο ομοιόμορφο αξιόπιστο δίκτυο ([25, 84]) ορίζεται για να μεγιστοποιεί πλήθος των σκελετικών δέντρων. Έτσι, είναι ενδιαφέρον να καθορίσουμε τους τύπους των γραφημάτων που έχουν μέγιστο πλήθος σκελετικών δέντρων για προκαθορισμένες τιμές των κορυφών και ακμών. Για να κρατήσουμε το πλήθος των κορυφών και ακμών σταθερό, θεωρούμε ότι το πλήθος των κορυφών του γραφήματος K_n και του sun-γραφήματος και των διανυσμάτων κλίκας, αστεριού, μονοπατιού, και κύκλου είναι σταθερά. Σε αυτήν την ενότητα, παρέχουμε αποτελέσματα μεγιστοποίησης για το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος $K_n - G$, όπου το γράφημα G είναι ένα complete-planet ή ένα star-planet γράφημα.

5.4.1 Complete-planet Γραφήματα

Έστω ένα complete-planet γράφημα G_c με m sun-κορυφές και ℓ planet-κορυφές, όπου $\ell = \ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_m$ και ℓ_i, $1 \leq i \leq m$, είναι το πλήθος των κορυφών των planet-υπογραφημάτων $G_1, G_2, \ldots, G_m$. Για ευκολία συμβολισμού, γράφουμε τον αριθμό $\tau(K_n - G_c)$ των σκελετικών δέντρων του γραφήματος $K_n - G_c$ του Θεωρήματος 5.1 ως εξής:

$$\tau(K_n - G_c) \;=\; X(G_c) \cdot Y(G_c),$$

όπου

$$\begin{aligned}
X(G_c) \;&=\; n^{n-m-\ell-2} \cdot \prod_{j=1}^{\ell} \left(\lambda(K_j)^{\alpha(j)} \cdot \lambda(P_j)^{\beta(j)} \cdot \lambda(C_j)^{\gamma(j)} \cdot \lambda(S_j)^{\delta(j)}\right), \\
Y(G_c) \;&=\; \left(1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i}\right) \cdot \prod_{i=1}^{m} p_i,
\end{aligned}$$

και

$$p_i \;=\; n - m - \frac{n}{n-1} \cdot \ell_i. \tag{5.5}$$

Εφόσον μας ενδιαφέρει να μεγιστοποιήσουμε το πλήθος των σκελετικών δέντρων όταν οι παράμετροι n και m, όπως επίσης και το διάνυσμα κλίκας α, το διάνυσμα αστεριού β, το διάνυσμα μονοπατιών γ, και το διάνυσμα κύκλου δ είναι σταθερά, επαρκεί να μεγιστοποιήσουμε τον παράγοντα $Y(G_c)$.

Θα συγκεντρωθούμε στη περίπτωση εκείνη που $m \geq 2$ και $\ell > 0$· εάν $m = 1$ ή $\ell = 0$, δεν έχουμε καμία ικανότητα να αλλάξουμε την δομή του γραφήματος G_c. Εφόσον

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \;=\; \sum_{i=1}^{m}(n-m-\frac{n}{n-1}\ell_i) \;=\; (n-m)\,m - \frac{n}{n-1}\sum_{i=1}^{m}\ell_i \;=\; (n-m)\,m - \frac{n}{n-1}\ell,$$

το οποίο έχει σταθερή τιμή εφόσον τα n, m, ℓ είναι προκαθορισμένα, αντικαθιστούμε την τιμή p_m με $S - \sum_{i=1}^{m-1} p_i$ στον παράγοντα $Y(G_c)$, όπου $S = \sum_{i=1}^{m} p_i = (n-m)\,m - \frac{n}{n-1}\ell$. Τότε,

$$\begin{aligned}
Y(G_c) &= \left(1+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{p_i}\right)\cdot\prod_{i=1}^{m}p_i \;=\; \prod_{i=1}^{m}p_i + \sum_{i=1}^{m}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}p_j\\
&= p_m\prod_{i=1}^{m-1}p_i + p_m\sum_{i=1}^{m-1}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m-1}p_j + \prod_{i=1}^{m-1}p_i\\
&= \left(S-\sum_{i=1}^{m-1}p_i\right)\cdot\prod_{i=1}^{m-1}p_i + \left(S-\sum_{i=1}^{m-1}p_i\right)\cdot\sum_{i=1}^{m-1}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m-1}p_j + \prod_{i=1}^{m-1}p_i\\
&= \left(1+S-\sum_{i=1}^{m-1}p_i\right)\cdot\prod_{i=1}^{m-1}p_i + \left(S-\sum_{i=1}^{m-1}p_i\right)\cdot\sum_{i=1}^{m-1}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m-1}p_j.
\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε το μέγιστο βρίσκοντας την μερική παράγωγο του παράγωντα $Y(G_c)$ ως προς οποιοδήποτε p_t, $1 \leq t \leq m-1$, και θέτοντάς το ίσο με το 0.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Y(G_c)}{\partial p_t} &= -\prod_{i=1}^{m-1}p_i + \left(1+S-\sum_{i=1}^{m-1}p_i\right)\cdot\prod_{\substack{i=1\\ i\neq t}}^{m-1}p_i - \sum_{i=1}^{m-1}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m-1}p_j + \left(S-\sum_{i=1}^{m-1}p_i\right)\cdot\sum_{\substack{i=1\\ i\neq t}}^{m-1}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i,t}}^{m-1}p_j\\
&= -\prod_{i=1}^{m-1}p_i + \left(1+S-\sum_{i=1}^{m-1}p_i\right)\cdot\frac{1}{p_t}\prod_{i=1}^{m-1}p_i - \sum_{i=1}^{m-1}\left(\frac{1}{p_i}\prod_{j=1}^{m-1}p_j\right) +\\
&\qquad\qquad \left(S-\sum_{i=1}^{m-1}p_i\right)\cdot\sum_{\substack{i=1\\ i\neq t}}^{m-1}\left(\frac{1}{p_ip_t}\prod_{j=1}^{m-1}p_j\right)\\
&= \prod_{i=1}^{m-1}p_i\left[-1+\frac{1}{p_t}\left(1+S-\sum_{i=1}^{m-1}p_i\right)-\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{p_i}+\left(S-\sum_{i=1}^{m-1}p_i\right)\cdot\frac{1}{p_t}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq t}}^{m-1}\frac{1}{p_i}\right]\\
&= \prod_{i=1}^{m-1}p_i\left[-1+\frac{1}{p_t}-\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{p_i}+\frac{1}{p_t}\left(S-\sum_{i=1}^{m-1}p_i\right)+\frac{1}{p_t}\left(S-\sum_{i=1}^{m-1}p_i\right)\cdot\sum_{\substack{i=1\\ i\neq t}}^{m-1}\frac{1}{p_i}\right]\\
&= \prod_{i=1}^{m-1}p_i\left[-1-\sum_{\substack{i=1\\ i\neq t}}^{m-1}\frac{1}{p_i}+\frac{1}{p_t}\left(S-\sum_{i=1}^{m-1}p_i\right)\cdot\left(1+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq t}}^{m-1}\frac{1}{p_i}\right)\right]\\
&= \prod_{i=1}^{m-1}p_i\cdot\left(1+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq t}}^{m-1}\frac{1}{p_i}\right)\cdot\left(\frac{1}{p_t}\left(S-\sum_{i=1}^{m-1}p_i\right)-1\right)\\
&= \prod_{\substack{i=1\\ i\neq t}}^{m-1}p_i\cdot\left(1+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq t}}^{m-1}\frac{1}{p_i}\right)\cdot\left(S-\sum_{i=1}^{m-1}p_i\;-p_t\right).
\end{aligned}$$

Τότε, μπορούμε να δείξουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Λήμμα 5.3. *Εάν $m \geq 2$ και $\ell > 0$, τότε για κάθε $t \in \{1, 2, \ldots, m\}$*

$$\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq t}}^{m-1} p_i \cdot \left(1 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq t}}^{m-1} \frac{1}{p_i}\right) > 0.$$

Απόδειξη: Εάν για όλα τα $i = 1, 2, \ldots, m$, ισχύει ότι $\ell_i < \ell$ then $p_i > 0$ (περίπτωση (4) του Λήμματος 5.1) και το λήμμα προφανώς έπεται. Έστω τώρα ότι $\ell_j = \ell$ για κάποια j από το σύνολο $\{1, 2, \ldots, m\}$. Εάν $t = j$, τότε το λήμμα ξανά έπεται εφόσον $p_i > 0$ για όλα τα $i \neq j$ (περίπτωση (3) του Λήμματος 5.1). Τώρα, εάν $t \neq j$, τότε

$$\begin{aligned}
\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq t}}^{m-1} p_i \cdot \left(1 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq t}}^{m-1} \frac{1}{p_i}\right) &= \Big((n-m)^{m-2} \cdot p_j\Big) \cdot \left(1 + \frac{m-2}{n-m} + \frac{1}{p_j}\right) \\
&= (n-m)^{m-2} \cdot \left(p_j \cdot (1 + \frac{m-2}{n-m}) + 1\right) \\
&\geq (n-m)^{m-2} \cdot \left[-\frac{n-2}{n-1} + 1\right] > 0
\end{aligned}$$

εφόσον $p_j \geq -\frac{n-m}{n-1}$ (δείτε περίπτωση (3) του Λήμματος 5.1), $1 - \frac{n-2}{n-1} = \frac{1}{n-1}$, and $n \geq m + \ell > m \geq 2$. ∎

Με βάση το Λήμμα 5.3, η μερική παράγωγος $\partial Y(G_c)/\partial p_t$ είναι ίση με 0 εάν και μόνο εάν

$$p_t = S - \sum_{i=1}^{m-1} p_i = p_m.$$

Εφόσον η παραπάνω ισότητα ισχύει για κάθε $t = 1, 2, \ldots, m-1$, συμπεραίνουμε ότι η ποσότητα $Y(G_c)$ φτάνει σε ένα όριο εάν και μόνο εάν $p_1 = p_2 = \ldots = p_m$ ή ισοδύναμα όταν $\ell_1 = \ell_2 = \ldots = \ell_m$. Επιπλέον, ελέγχοντας το πρόσημο της τιμής των $\partial^2 Y(G_c)/\partial^2 p_t$ όταν $p_t = S - \sum_{i=1}^{m-1} p_i$, πιστοποιούμε ότι το άνω όριο του παράγοντα $Y(G_c)$ είναι ένα μέγιστο· σημειώστε ότι

$$\frac{\partial^2 Y(G_c)}{\partial^2 p_t} = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq t}}^{m-1} p_i \cdot \left(1 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq t}}^{m-1} \frac{1}{p_i}\right) \cdot \Big(-1 - 1\Big) < 0.$$

Τα αποτελέσματά μας συγκεντρώνονται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 5.3. *Έστω ένα complete-planet γράφημα G_c με προκαθορισμένα διανύσματα κλικών, αστεριών, μονοπατιών, και κύκλων, και $m + \ell$ κορυφές, όπου $\ell = \sum_{i=1}^{m} \ell_i$, και ℓ_i είναι το πλήθος των κορυφών των i-στών planet-υπογραφημάτων G_i. Τότε, το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος $K_n - G_c$ μεγιστοποιείται όταν οι τιμές των ℓ_i είναι όλες ίσες.*

Στην εργασία [24], ένα θεώρημα μεγιστοποίησης παρέχεται για το γράφημα $K_n - G$, όπου το γράφημα G είναι ένα multi-star γράφημα, που έπεται ως συνέπεια του Θεωρήματος 5.3· εφόσον οι συγγραφείς του [24] θεώρησαν ότι οι planet-συνιστώσες μπορούν μόνο να είναι μοναδικές κορυφές, τότε εάν δεν είναι δυνατό να ισχύει $\ell_1 = \ell_2 = \cdots = \ell_m$, είναι σίγουρο εφικτό να εξασφαλιστεί ότι οποιοδήποτε από τα ℓ_i διαφέρουν το πολύ κατά 1. Εφόσον για τα δοθέντα διανύσματα κλικών, αστεριών, μονοπατιών, και κύκλων, καταφερθεί να ισχύει $\ell_1 = \ell_2 = \cdots = \ell_m$, εάν είναι εφικτό, μας απαιτεί να κάνουμε ένα μεγάλο αριθμό συνδυασμών γενικά. Παρακάτω δίνουμε ένα επιπλέον αποτέλεσμα το οποίο όταν εφαρμόζεται επαναληπτικά μας βοηθάει να πετύχουμε ένα μέγιστο σε αυτό το πλήθος των σκελετικών δέντρων, παρόλο που αυτό δεν είναι απαραίτητο ολικό μέγιστο.

Έστω δύο τυχαίες κορυφές v_i και v_j του sun-γραφήματος $G_c[A]$ και έστω G_i και G_j τα αντίστοιχα planet-υπογραφήματα· Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, τα γραφήματα G_i και G_j έχουν ℓ_i και ℓ_j κορυφές, αντίστοιχα. Από το γράφημα G_c, κατασκευάζουμε το complete-planet γράφημα G'_c μετακινώντας τις planet-συνιστώσες μεταξύ των planet-υπογραφημάτων G_i και G_j έτσι ώστε να αποκτήσουμε τα planet-υπογραφήματα G'_i και G'_j με ℓ'_i και ℓ'_j κορυφές, αντίστοιχα· τότε, $\ell'_i + \ell'_j = \ell_i + \ell_j$.

Βρίσκουμε τώρα το πλήθος των σκελετικών δέντρων των γραφημάτων G'_c και G_c. Πρώτα, η ποσότητα $Y(G_c)$, σε σχέση με τα p_i και p_j, μπορεί να γραφτεί ως

$$\begin{aligned} Y(G_c) &= p_i p_j \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i,j}}^{m} p_k \ + \ p_i p_j \sum_{\substack{r=1 \\ r\neq i,j}}^{m} \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq r,i,j}}^{m} p_k \ + \ (p_i + p_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i,j}}^{m} p_k \\ &= p_i p_j \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i,j}}^{m} p_k \cdot \left(1 + \sum_{\substack{r=1 \\ r\neq i,j}}^{m} \frac{1}{p_r} \right) \right) + (p_i + p_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i,j}}^{m} p_k \\ &= p_i p_j \cdot \Phi_1 \ + \ (p_i + p_j) \cdot \Phi_2. \end{aligned}$$

Παρόμοια, για το γράφημα G'_c θα έχουμε

$$Y(G'_c) = p'_i p'_j \cdot \Phi_1 \ + \ (p'_i + p'_j) \cdot \Phi_2.$$

Επιπρόσθετα, τα γραφήματα G_c και G'_c έχουν τα ίδια διανύσματα κλικών, αστεριών, μονοπατιών, και κύκλων, και έτσι $X(G'_c) = X(G_c)$. Με σκοπό να συγκρίνουμε τα πλήθη των σκελετικών δέντρων των γραφημάτων $K_n - G'_c$ και $K_n - G_c$, εξετάζουμε την διαφορά τους:

$$\begin{aligned} \tau(K_n - G'_c) - \tau(K_n - G_c) &= (Y(G'_c) - Y(G_c)) \cdot X(G_c) \\ &= \big((p'_i p'_j - p_i p_j) \cdot \Phi_1 + (p'_i + p'_j - p_i - p_j) \cdot \Phi_2 \big) \cdot X(G_c). \quad (5.6) \end{aligned}$$

Από την Εξ. (5.5), πετυχαίνουμε:

$$\begin{aligned} p'_i + p'_j &= 2(n-m) - \frac{n}{n-1} \cdot (\ell'_i + \ell'_j) \qquad \text{and} \\ p_i + p_j &= 2(n-m) - \frac{n}{n-1} \cdot (\ell_i + \ell_j). \end{aligned}$$

Εφόσον $\ell'_i + \ell'_j = \ell_i + \ell_j$, είναι εύκολο να δεί κανείς ότι $p'_i + p'_j = p_i + p_j$. Έτσι, η Εξ. (5.6) μετρέπεται

$$\tau(K_n - G'_c) - \tau(K_n - G_c) = (p'_i p'_j - p_i p_j) \cdot \Phi_1 \cdot X(G_c). \quad (5.7)$$

Για τα γινόμενα $p'_i p'_j$ και $p_i p_j$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} p'_i p'_j &= (n-m)^2 - (n-m)\frac{n}{n-1}(\ell'_i + \ell'_j) + \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 \ell'_i \ell'_j \qquad \text{and} \\ p_i p_j &= (n-m)^2 - (n-m)\frac{n}{n-1}(\ell_i + \ell_j) + \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 \ell_i \ell_j. \end{aligned}$$

Έτσι, εφόσον $\ell'_i + \ell'_j = \ell_i + \ell_j$, η Εξ. (5.7) μετατρέπεται σε

$$\tau(K_n - G'_c) - \tau(K_n - G_c) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 \left(\ell'_i \ell'_j - \ell_i \ell_j \right) \cdot \Phi_1 \cdot X(G_c). \quad (5.8)$$

Με έναν παρόμοιο τρόπο με αυτόν που δείξαμε στην απόδειξη του Λήμματος 5.3, μπορούμε να δείξουμε ότι $\Phi_1 > 0$. Επιπρόσθετα, $X(G_c) \geq 0$. Έτσι, στην Εξ. (5.8) έχουμε να θεωρήσουμε την τιμή $\ell'_i \ell'_j - \ell_i \ell_j$. Αποδεικνύουμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 5.4. *If* $|\ell'_i - \ell'_j| < |\ell_i - \ell_j|$ *then* $\ell'_i\ell'_j - \ell_i\ell_j > 0$.

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω $\ell_i \geq \ell_j$ και $\ell'_i \geq \ell'_j$. Εφόσον $\ell'_i - \ell'_j < \ell_i - \ell_j$ και $\ell'_i + \ell'_j = \ell_i + \ell_j$, υπάρχει ένας ακέραιος $r \geq 1$ τέτοιος ώστε,

$$\ell'_i = \ell_i - r \qquad \text{and} \qquad \ell'_j = \ell_j + r.$$

Εφόσον $\ell'_i \geq \ell'_j$, θα πρέπει να ισχύει ότι $\ell_i - r \geq \ell_j + r \Longrightarrow 2r \leq \ell_i - \ell_j$. Επιπλέον, $\ell'_i\ell'_j = \ell_i\ell_j + r(\ell_i - \ell_j) - r^2$, και, γι' αυτό, $\ell'_i\ell'_j - \ell_i\ell_j = r(\ell_i - \ell_j) - r^2$ που είναι μεγαλύτερο από 0 εφόσον $1 \leq r \leq (\ell_i - \ell_j)/2$. ∎

Επομένως, έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 5.4. *Έστω ένα complete-planet γράφημα G_c, έστω δύο κορυφές v_i, v_j του sun-γραφήματος και ℓ_i, ℓ_j τα πλήθη των κορυφών των planet-υπογραφημάτων G_i και G_j που σχετίζονται με τις κορυφές v_i και v_j, αντίστοιχα. Εάν τις κλίκες, τα αστέρια, τα μονοπάτια και τους κύκλους των γραφημάτων G_i και G_j τα ανακατατάσσουμε έτσι ώστε στο τροποποιημένο γράφημα G'_c τα πλήθη των κορυφών των planet-γραφημάτων που σχετίζονται με τις κορυφές v_i και v_j είναι ℓ'_i και ℓ'_j με $|\ell'_i - \ell'_j| < |\ell_i - \ell_j|$, τότε το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος $K_n - G'_c$ είναι μεγαλύτερο από αυτό του γραφήματος $K_n - G_c$.*

Το Θεώρημα 5.4 επάγει ότι μπορούμε να διαλέξουμε ένα ζευγάρι κορυφών από το sun-γράφημα ενός complete-planet γραφήματος G_c και ανακατατάσσουμε τις planet-συνιστώσες των planet-υπογραφημάτων έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσουμε την απόλυτη τιμή της διαφοράς των αριθμών κορυφών τους. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία για ένα ακόμα τέτοιο ζευγάρι κορυφών και συνεχίσουμε έως ότου κανένα ζευγάρι των κορυφών επιφέρει μεγαλύτερο σε πλήθος σκελετικών δέντρων.

5.4.2 Star-planet Γραφήματα

Αποδεικνύουμε παρόμοια αποτελέσματα για το πλήθος $\tau(K_n - G_s)$ των σκελετικών δέντρων του γραφήματος $K_n - G_s$, όπου G_s είναι ένα star-planet γράφημα με $m+1$ sun-κορυφές και ℓ planet-κορυφές. Υποθέτουμε ότι $\ell = \ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_m$ και ℓ_i, είναι το πλήθος των κορυφών του planet-υπογραφήματος G_i, $1 \leq i \leq m$. Τότε, από το Θεώρημα 5.2 έχουμε ότι

$$\tau(K_n - G_s) \;\; = \;\; X(G_s) \cdot Y(G_s),$$

όπου

$$\begin{aligned} X(G_s) &= n^{n-m-\ell-3} \cdot \prod_{j=1}^{\ell} \left(\lambda(K_j)^{\alpha(j)} \cdot \lambda(S_j)^{\beta(j)} \cdot \lambda(P_j)^{\gamma(j)} \cdot \lambda(C_j)^{\delta(j)} \right), \\ Y(G_s) &= \left(n - m - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i} \right) \cdot \prod_{i=1}^{m} p_i, \end{aligned}$$

και

$$p_i \;\; = \;\; n - 1 - \frac{n}{n-1} \cdot \ell_i. \tag{5.9}$$

Με σκοπό να μεγιστοποιήσουμε το πλήθος $\tau(K_n - G_s)$ των σκελετικών δέντρων υπό την υπόθεση ότι οι παράμετροι n και m, και τα διανύσματα της κλίκας, αστεριού, μονοπατιού, και κύκλου είναι καθορισμένα, επαρκεί να μεγιστοποιήσουμε τον παράγοντα $Y(G_s)$.

Είναι γνωστό ότι το γινόμενο k θετικών αριθμών $a_1, a_2, \ldots, a_k$ που το άθροισμά τους A είναι σταθερό, είναι μέγιστο όταν όλοι οι αριθμοί είναι ίσοι· αυτό φαίνεται αντικαθιστώντας την μεταβλητή a_k με $A - \sum_{i=1}^{k-1} a_i$ στο γινόμενο των a_i και δουλεύοντας με τις μερικές παραγώγους της τελικής έκφρασης ως προς οποιοδήποτε από τα a_i. Με τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να δείξουμε ότι το άθροισμα $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i}$ των k θετικών αριθμών $a_1, a_2, \ldots, a_k$ που το άθροισμά τους είναι σταθερό, ελαχιστοποιήται όταν όλοι οι αριθμοί είναι ίσοι. Έτσι, εφόσον το άθροισμα των μεταβλητών p_i είναι $(n-m)m - \frac{n\ell}{n-1}$ που είναι σταθερό όπως υποθέσαμε διότι τα n, m, ℓ είναι σταθερά, και οι δύο παράγοντες του $Y(G_s)$ είναι μέγιστα όταν όλα τα p_i είναι ίσα. Έτσι, εάν λάβουμε υπ' όψιν ότι οποιοδήποτε δύο p_i, p_j είναι ίσα εάν και μόνο εάν $\ell_i = \ell_j$ (δείτε Εξ. (5.9)) έχουμε ένα παρόμοι αποτέλεσμα με το Θεώρημα 5.3.

Θεώρημα 5.5. *Έστω ένα star-planet γράφημα G_s με σταθερά διανύσματα κλίκας, αστεριού, μονοπατιού, και κύκλου, και $m + \ell + 1$ κορυφές, όπου $\ell = \sum_{i=1}^{m} \ell_i$ και ℓ_i είναι το πλήθος των κορυφών των i planet-υπογραφημάτων G_i. Τότε, το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος $K_n - G_s$ μεγιστοποιείται όταν όλα τα ℓ_i είναι ίσα.*

Στη συνέχεια, θεωρούμε ένα star-planet γράφημα G_s και δύο τυχαίες κορυφές v_i και v_j του sun-γραφήματος $G_s[A]$ που αντιστοιχούν στα planet-γραφήματα που περιέχουν ℓ_i και ℓ_j κορυφές, αντίχτοιχα. Κατασκευάζουμε από το γράφημα G_s τα star-planet γραφήματα G'_s μετακινώντας τις συνιστώσες μεταξύ των planet-υπογραφημάτων των κορυφών v_i και v_j έτσι ώστε τα τελικά planet-γραφήματα έχουν ℓ'_i και ℓ'_j κορυφές, αντίστοιχα. Τότε, $\ell'_i + \ell'_j = \ell_i + \ell_j$ και $X(G_s) = X(G'_s)$. Η ποσότητα $Y(G_s)$, ως προς τα p_i και p_j, μπορεί να γραφτεί ως

$$\begin{aligned}
Y(G_s) &= (n-m)\, p_i p_j \prod_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{m} p_k - p_i p_j \sum_{\substack{r=1\\r\neq i,j}}^{m} \prod_{\substack{k=1\\k\neq r,i,j}}^{m} p_k - (p_i + p_j) \prod_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{m} p_k \\
&= p_i p_j \left(\left(n - m - \sum_{\substack{r=1\\r\neq i,j}}^{m} \frac{1}{p_r} \right) \cdot \prod_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{m} p_k \right) - (p_i + p_j) \prod_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{m} p_k \\
&= p_i p_j \cdot \Psi_1 - (p_i + p_j) \cdot \Psi_2.
\end{aligned}$$

Μια παρόμοια έκφραση ισχύει για την ποσότητα $Y(G'_s)$ ως προς τα p'_i και p'_j. Από την Εξ. (5.9), έχουμε:

$$\begin{aligned}
p_i + p_j &= 2(n-1) - \frac{n}{n-1} \cdot (\ell_i + \ell_j), \\
p'_j + p'_j &= 2(n-1) - \frac{n}{n-1} \cdot (\ell'_i + \ell'_j)
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
p_i p_j &= (n-1)^2 - n(\ell_i + \ell_j) + \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 \ell_i \ell_j, \\
p'_i p'_j &= (n-1)^2 - n(\ell'_i + \ell'_j) + \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 \ell'_i \ell'_j.
\end{aligned}$$

Εφόσον $\ell'_i + \ell'_j = \ell_i + \ell_j$, είναι εύκολο να δούμε ότι $p'_i + p'_j = p_i + p_j$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
\tau(K_n - G'_s) - \tau(K_n - G_s) &= \big((p'_i p'_j - p_i p_j) \cdot \Psi_1 - (p'_i + p'_j - p_i - p_j) \cdot \Psi_2 \big) \cdot X(G_s) \\
&= (p'_i p'_j - p_i p_j) \cdot \Psi_1 \cdot X(G_s) \\
&= \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 \big(\ell'_i \ell'_j - \ell_i \ell_j \big) \cdot \Psi_1 \cdot X(G_s).
\end{aligned}$$

Το Λήμμα 5.5 αποδεικνύει ότι για οποιαδήποτε i, j, ισχύει $\Psi_1 > 0$.

Λήμμα 5.5. *Εάν $m \geq 2$ και $\ell > 0$, τότε $\Psi_1 > 0$.*

Απόδειξη: Εάν για όλα τα $i = 1, 2, \ldots, m$, $\ell_i \neq \ell$ τότε $p_i > m$ (δείτε περίπτωση (4) στο Λήμμα 5.2), και έτσι

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= \left(n - m - \sum_{\substack{r=1\\r\neq i,j}}^{m} \frac{1}{p_r}\right) \cdot \prod_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{m} p_k \;>\; \left(n - m - \frac{m-2}{m}\right) \cdot m^{m-2}\\ &> (n-m-1)\cdot m^{m-2} \;>\; 0\end{aligned}$$

αφού $n \geq m + 1 + \ell > m + 1$. Έστω τώρα ότι υπάρχει ένας δείκτης t τέτοιος ώστε $\ell_t = \ell$. Τότε, $p_t > 0$ και $p_i = n - 1$ για $i \neq j$ (περίπτωση (3) στο Λήμμα 5.2). Εάν το t είναι είτε i, είτε j τότε

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= \left(n - m - \sum_{\substack{r=1\\r\neq i,j}}^{m} \frac{1}{p_r}\right) \cdot \prod_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{m} p_k \;>\; \left(n - m - \frac{m-2}{n-1}\right) \cdot (n-1)^{m-2}\\ &> (n-m-1)\cdot (n-1)^{m-2} \;>\; 0\end{aligned}$$

αφού $m - 2 < n - 1$. Εάν το t διαφέρει και από τα δύο i, j τότε

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= \left(n - m - \sum_{\substack{r=1\\r\neq i,j}}^{m} \frac{1}{p_r}\right) \cdot \prod_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{m} p_k \;=\; \left(n - m - \left(\frac{m-3}{n-1} + \frac{1}{p_t}\right)\right) \cdot (n-1)^{m-3} \cdot p_j\\ &= (n-1)^{m-3} \cdot \left(\left(n - m - \frac{m-3}{n-1}\right) \cdot p_j + 1\right) \;>\; 0\end{aligned}$$

επειδή $p_j > 0$ και $n > m \implies -\frac{m-3}{n-1} > -1 \implies n - m - \frac{m-3}{n-1} > n - m - 1 \geq \ell > 0$. ∎

Επιπρόσθετα, η ποσότητα $X(G_s) \geq 0$. Έτσι, από τα Λήμματα 5.4 και 5.5, έχουμε ότι:

Θεώρημα 5.6. *Έστω ένα star-planet γράφημα G_s, v_i, v_j δύο κορυφές του sun-γραφήματος και ℓ_i, ℓ_j το πλήθος των κορυφών των planet-υπογραφημάτων G_i και G_j, που συσχετίζονται με τι κορυφές v_i και v_j, αντίστοιχα. Εάν οι κλίκες, τα αστέρια, τα μονοπάτια, και οι κύκλοι των υπογραφημάτων G_i και G_j ανακατατεθούν έτσι ώστε στο τελικό γράφημα G'_s τα πλήθη των κορυφών των planet-γραφημάτων που συσχετίζονται με τις κορυφές v_i και v_j είναι ℓ'_i και ℓ'_j με $|\ell'_i - \ell'_j| < |\ell_i - \ell_j|$, τότε το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος $K_n - G'_s$ είναι μεγαλύτερο από αυτό του γραφήματος $K_n - G_s$.*

Με βάση το Θεώρημα 5.6, ένα τοπικό ελάχιστο για το πλήθος των σκελετικών δέντρων μπορεί να αποκτηθεί όπως στην περίπτωση των complete-planet γραφημάτων.

5.5 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο, ορίσαμε δύο κλάσεις των αστεροειδή γραφημάτων, που ονομάζονται complete-planet και star-planet γραφήματα, και αποδείξαμε κλειστούς τύπους για τα γραφήματα της μορφής $K_n - G$, όπου το γράφημα G είναι ένα complete-planet ή ένα star-planet γράφημα. Για τον σκοπό αυτό, χρησιμοποιήσαμε το συμπληρωματικών σκελετικών δέντρων πίνακα θεώρημα όπως επίσης και κλασικές τεχνικές από την γραμμική άλγεβρα και την θεωρία πινάκων.

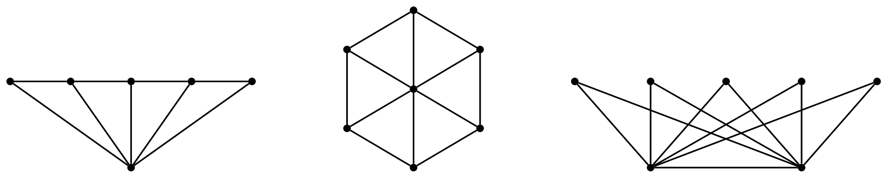
Παράμετροι $m,\ \ell,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$	Complete-planet γράφημα G_c	Αναφορά
$m = k+1,\ \ell = 0$ ή $m = 1,\ \alpha(k) = 1,\ \alpha(i) = 0\ \forall\, i \neq k,\ \beta = \gamma = \delta = 0$	K_{k+1}	[9, 94]
$m = 1,\ \beta(k) = 1,\ \beta(i) = 0\ \forall\, i \neq k,\ \alpha = \gamma = \delta = 0$	$K_2 + kK_1$	[9]
$m = 1,\ \gamma(k) = 1,\ \gamma(i) = 0\ \forall\, i \neq k,\ \alpha = \beta = \delta = 0$	$K_1 + P_k$ (gem, για $k = 4$)	[9]
$m = 1,\ \delta(k) = 1,\ \delta(i) = 0\ \forall\, i \neq k,\ \alpha = \beta = \gamma = 0$	τροχός (wheel) γράφημα W_{k+1}	[9]
$m \geq 1,\ \alpha(1) \neq 0,\ \alpha(i) = 0\ \forall\, i \neq 1,\ \beta = \gamma = \delta = 0$	multi-star γράφημα	[93, 107]
$m \geq 1,$ κατάλληλο $\alpha \neq 0,\ \beta = \gamma = \delta = 0$	multi-complete/star γράφημα	[24]

Πίνακας 5.1: Υποκλάσεις των complete-planet γραφημάτων.

Παράμετροι $m,\ \ell,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$	Star-planet γράφημα G_s	Αναφορά
$m \geq 1,\ \ell = 0$	$S_{1,m}$	[9, 94]
$m \geq 1,\ \alpha(1) \neq 0,\ \alpha(i) = 0\ \forall\, i \neq 1,\ \beta = \gamma = \delta = 0$	δέντρα με διάμετρο $d \leq 4$	[91]

Πίνακας 5.2: Υποκλάσεις των star-planet γραφημάτων.

Η εξαγωγή κλειστών τύπων για διαφορετικούς τύπους γραφημάτων μπορεί να αποδειχτεί χρήσιμη στην αναγνώριση εκείνων των γραφημάτων που περιέχουν το μέγιστο πλήθος σκελετικών δέντρων. Τέτοιου είδους μελέτη έχει πρακτικές συνέπειες που συνδέονται με την αξιοπιστία δικτύων (δείτε για παράδειγμα [84, 75, 99]). Σε αυτό το κεφάλαιο, πετύχαμε επίσης, και αποτελέσματα μεγιστοποίησης για την κλάση των αστεροειδή γραφημάτων: αναδείξαμε τα complete-planet και star-planet γραφήματα που επιδέχονται το μέγιστο πλήθος σκελετικών δέντρων· τα αποτελέσματά μας γενικεύουν και επεκτείνουν προηγούμενα αποτελέσματα μεγιστοποίησης για την κλάση των multi-star και των multi-complete/star γραφημάτων [24].



$K_1 + P_5$ $\qquad$ W_7 $\qquad$ $K_2 + 5K_1$

Σχήμα 5.2: Ορισμένα αστεροειδή γραφήματα.

Ο υπολογισμός της ορίζουσας του συμπληρωματικού σκελετικών δέντρων πινάκων φαίνεται ότι είναι μια ενδιαφέρουσα κατεύθυνση για τον καθορισμό του πλήθους των σκελετικών δέντρων για τις οικογένειες γραφημάτων της μορφής $K_n - G$, όπου το γράφημα G κατέχει μια έμφυτη συμμετρία. Πιο συγκεκριμένα, πολλά από τα γνωστά αποτελέσματα [9] που προέκυψαν από επιχειρήματα συνδυαστικής, μπορούν εύκολα να αποδειχτούν χρησιμοποιώντας παρόμοιες τεχνικές με αυτές που χρησιμοποιήθηκαν σε αυτό το κεφάλαιο. Επιπλέον, άλλα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στα [24, 93, 94, 107] έπονται ώς συνέπειες των θεωρημά των μας που αποδείξαμε σε αυτό το κεφάλαιο. Πιο ειδικά, πολλά γραφήματα μπορούν να εξαχθούν ως συγκεκριμένες περιπτώσεις των αστεροειδή γραφημάτων, που εξαρτώνται από το sun-γράφημα και τις τιμές των διανυσμάτων κλίκας, αστεριού, μονοπατιού, και κύκλου. Για παράδειγμα, δοθέντος ενός complete-planet γραφήματος με γράφημα K_m και διανύσματα α, β, γ, δ, και θέτοντας $m = 1$, $\gamma(5) = 1$, $\gamma(j) = 0$ για όλα τα $j \neq 5$, και $\alpha = \beta = \delta = 0$, παίρνουμε το γράφημα $K_1 + P_5$, και όταν θέτουμε $m = 1$, $\delta(k) = 1$, $\delta(j) = 0$ για όλα τα $j \neq k$, και $\alpha = \beta = \gamma = 0$, παίρνουμε το γράφημα τρόχο (wheel graph) W_{k+1} (δείτε Σχήμα 5.2). Ένας κατάλογος τέτοιων αποτελεσμάτων παρουσιάζεται στους Πίνακες 5.1 και 5.2.

Κεφαλαιο 6

Πληθος Σκελετικων Δεντρων σε Κατηγοριες Γραφηματων της Μορφης $K_n^m \pm G$

6.1 Εισαγωγή

Ένα *σκελετικό δέντρο* (spanning tree) ενός συνεκτικού μη-κατευθυνόμενου γραφήματος G είναι ένα $(n-1)$-ακμών συνεκτικό υπογράφημά του. Το πλήθος των σκελετικών δέντρων ενός γραφήματος (δικτύου) G, καλείται επίσης *πολυπλοκότητα* (complexity) του γραφήματος G [10], είναι ένα σημαντικό, ευρέως γνωστό, πρόβλημα στην θεωρία γραφημάτων και εμφανίζεται σε ένα πλήθος εφαρμογών. Οι πιο αξιοσημείωτες περιοχές εφαρμογών είναι η αξιοπιστία δικτύων [84, 99], ο υπολογισμός της συνολικής αντίστασης μεταξύ μιας ακμής σε ένα ηλεκτρικό δίκτυο (electrical network) [13], απαρίθμηση συγκεκριμένων χημικών στοιχείων [20], και απαρίθμηση των Eulerian κύκλων (circuits) σε ένα γράφημα [47].

Επομένως, τόσο για θεωρητικούς όσο και για πρακτικούς σκοπούς, ενδιαφερόμαστε για την εξαγωγή μαθηματικών τύπων για τον υπολογισμό του πλήθους των σκελετικών δέντρων ενός γραφήματος G, όπως επίσης και για το K_n-συμπλήρωμα (K_n-complement) του γραφήματος G· εάν το γράφημα G είναι ένα υπογράφημα του πλήρες γραφήματος K_n, τότε το K_n-συμπλήρωμα του γραφήματος G, που συμβολίζεται με $K_n - G$, ορίζεται ως το γράφημα που αποκτάται από το γράφημα K_n διαγράφοντας τις ακμές του γραφήματος G (σημειώστε ότι, εάν το γράφημα G έχει n κορυφές, τότε το γράφημα $K_n - G$ συμπίπτει με το γράφημα $\overline{G}$, δηλ. το συμπλήρωμα του γραφήματος G). Πολλές περιπτώσεις έχουν μελετηθεί που εξαρτώνται από την επιλογή του γραφήματος G. Έχει μελετηθεί όταν το γράφημα G είναι ένα επιγραφόμενο μοριακό γράφημα (labelled molecular graph) [20], όταν το γράφημα G είναι ένα πλήρες πολυμερή γράφημα (complete multipartite graph) [107], όταν το γράφημα G είναι ένα κυκλικό γράφημα (circulant graph) [42, 109], όταν το γράφημα G είναι ένας κυβικός και τετραδικός κύκλος (cubic-quadruple cycle graph) [108], όταν το γράφημα G είναι ένα threshold γράφημα [46], όταν το γράφημα G είναι ένα quasi-threshold γράφημα [91] και άλλες πολλές περιπτώσεις (δείτε το βιβλίο του Berge [9] για μια έκθεση των βασικών αποτελεσμάτων· δείτε επίσης [24, 67, 93, 91, 94, 100, 106, 107]).

Σε αυτό το κεφάλαιο, επεκτείνουμε την προηγούμενη έννοια και λαμβάνουμε υπ' όψιν γραφήματα που επάγονται από το πλήρες πολυγράφημα (complete multigraph) K_n^m διαγράφοντας πολλαπλές ακμές· συμβολίζουμε με K_n^m το πλήρες πολυγράφημα με n κορυφές και ακριβώς m ακμές να ενώνουν κάθε ζεύγος των κορυφών. Βασιζόμενοι στις ιδιότητες του Kirchhoff πίνακα, που επιτρέπει τον υπολογισμό του πλήθους των σκελετικών δέντρων για ένα οποιοδήποτε γράφημα, εξάγουμε έναν τύπο ως μια συνάρτηση μιας ορίζουσας για τον υπολογισμό του πλήθους των σκελετικών δέντρων του γραφήματος $K_n^m - G$, όπου το γράφημα G είναι ένα υπογράφημα του K_n^m, και, επομένως, είναι ένα πολυγράφημα. Αξίζει να σημειωθεί ότι, εάν $m = 1$ τότε το γράφημα $K_n^m - G$ συμπίπτει με το γράφημα $K_n - G$.

Επίσης θεωρούμε γραφήματα που προκύπτουν από το πλήρες πολυγράφημα K_n^m προσθέτοντας πολλαπλές ακμές σε αυτό. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε πολυγραφήματα της μορφής $K_n^m + G$ που προκύπτουν από το πλήρες πολυγράφημα K_n^m προσθέτοντας ένα σύνολο ακμών (του γραφήματος K_n^m) που επάγουν το γράφημα G. Και σε αυτή την περίπτωση, βασιζόμενοι στις ιδιότητες του Kirchhoff πίνακα, εξάγουμε έναν τύπο ως μια συνάρτηση μιας ορίζουσας για τον υπολογισμό του πλήθους των σκελετικών δέντρων του γραφήματος $K_n^m + G$. Όσο γνωρίζουμε μέχρις στιγμής, δεν υπάρχουν πολλά γνωστά αποτελέσματα για τον αριθμό $\tau(K_n^m + G)$. Ο Bedrosian στην εργασία [8] θεώρησε τον αριθμό $\tau(K_n + G)$ για κάποιους απλούς σχηματισμούς του γραφήματος G, δηλαδή, όταν το γράφημα G σχηματίζει έναν κύκλο, ένα πλήρες γράφημα, ή όταν το σύνολο κορυφών του είναι αρκετά μικρό. Πιο πρόσφατα, οι Golin et al. [42] απέδειξαν έναν κλειστό τύπο για τον αριθμό $\tau(K_n + G)$ χρησιμοποιώντας Chebyshev πολυώνυμα, που εισήχθησαν [12], για την περίπτωση όπου το γράφημα G είναι ένα κυκλικό (circulant) γράφημα.

Συμβολίζουμε με $K_n^m \pm G$ την οικογένεια των γραφημάτων της μορφής $K_n^m + G$ και $K_n^m - G$, και εξάγουμε έναν τύπο για το πλήθος $\tau(K_n^m \pm G)$. Επιπρόσθετα, βασιζόμενοι σε αυτά τα αποτελέσματα, γενικεύουμε τους τύπους μας και επεκτείνουμε την οικογένεια των γραφημάτων $K_n^m \pm G$ στην πιο γενική οικογένεια γραφημάτων της μορφής $K_n^{(m)} \pm G$, όπου $K_n^{(m)}$ είναι το πλήρη υπογράφημα με n κορυφές και τουλάχιστον $m \geq 1$ ακμές να ενώνουν κάθε ζεύγος κορυφών.

Βασιζόμενοι στα αποτελέσματά μας –δηλαδή, τους τύπους ως προς την συνάρτηση μιας ορίζουσας για το πλήθος των σκελετικών δέντρων της οικογένειας των γραφημάτων $\tau(K_n^m \pm G)$, και χρησιμοποιώντας κλασικές αλγεβρικές τεχνικές, γενικεύουμε γνωστούς κλειστούς τύπους για το πλήθος των σκελετικών δέντρων απλών γραφημάτων της μορφής $K_n - G$. Συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε κλειστούς τύπους για το πλήθος των σκελετικών δέντρων $\tau(K_n^m \pm G)$, στην περίπτωση που το γράφημα G είναι (i) ένα πλήρες πολυμερή γράφημα (complete multipartite graph), και (ii) ένα multi-star γράφημα.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι οι προτεινόμενοι τύποι εκφράζουν το πλήθος των σκελετικών δέντρων $\tau(K_n^m \pm G)$ ως μια συνάρτηση μιας ορίζουσας ενός πίνακα που μπορεί να κατασκευαστεί εύκολα από την σχέση γειτνίασης του γραφήματος G. Τα αποτελέσματά μας γενικεύουν προηγούμενα αποτελέσματα και επεκτείνουν την οικογένεια των γραφημάτων της μορφής $K_n^m \pm G$ που επιδέχονται τύπους για το πλήθος των σκελετικών δέντρων.

Το κεφάλαιο είναι οργανωμένο ως εξής. Στην δεύτερη ενότητα εδραιώνουμε την σημειογραφία και την ορολογία μας, και παρουσιάζουμε προηγούμενα αποτελέσματα. Στην τρίτη ενότητα παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα που έχουμε για τα γραφήματα $K_n^m \pm G$, ενώ στην τέταρτη ενότητα παρουσιάζουμε τα αποτελέσματά μας για τα γραφήματα $K_n^{(m)} \pm G$. Στην πέμπτη ενότητα εφαρμόζουμε τα αποτελέσματά μας έτσι ώστε να αποκτήσουμε κλειστούς τύπους για τα γραφήματα $K_n^m \pm G$, όπου το γράφημα G είναι ένα πλήρες πολυμερή γράφημα και ένα multi-star γράφημα, αντίστοιχα. Τέλος, στην έκτη ενότητα συνοψίζουμε το κεφάλαιο και παραθέτουμε πιθανές επεκτάσεις.

6.2 Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

Θεωρούμε πεπερασμένα μη-κατευθυνόμενα απλά γραφήματα και πολυγραφήματα χωρίς βρόχους (ανακύκλωση)· η σημειολογία *πολυγράφημα* (multigraph) χρησιμοποιείται όταν πολλαπλές ακμές επιτρέπονται σε ένα γράφημα. Για ένα γράφημα G, συμβολίζουμε με $V(G)$ και $E(G)$ το σύνολο κορυφών και σύνολο ακμών του γραφήματος G, αντίστοιχα.

Η *πολλαπλότητα* (multiplicity) ενός ζεύγος κορυφών (v, u) ενός γραφήματος G, δηλώνεται με $\ell_G(vu)$, και είναι το πλήθος των ακμών που ενώνουν τις κορυφές v και u στο γράφημα G. Η ελάχιστη πολλαπλότητα μεταξύ όλων των ζεύγων κορυφών του γραφήματος G συμβολίζεται με $\lambda(G)$ ενώ ο συμβολισμός $\Lambda(G)$ είναι ο μέγιστος τέτοιος αριθμός. Έτσι, εάν $\lambda(G) > 0$, τότε κάθε ζεύγος κορυφών στο γράφημα G είναι συνδεδεμένο με τουλάχιστον $\lambda(G)$ ακμές· εάν $\Lambda(G) = 1$, τότε το γράφημα G δεν περιέχει πολλαπλές ακμές, δηλαδή, το γράφημα G είναι ένα *απλό* (simple) γράφημα (σημειώστε ότι ένα απλό γράφημα ή ένα πολυγράφημα δεν περιέχει ανακυκλώσεις). Ο βαθμός μιας κορυφής v ενός γραφήματος G, συμβολίζεται με $d_G(v)$, και εκφράζει το πλήθος των ακμών που πρόσκεινται στην κορυφή v στο γράφημα G. Ο ελάχιστος βαθμός μεταξύ όλων των κορυφών του γραφήματος G συμβολίζεται με $\delta(G)$ ενώ με $\Delta(G)$ συμβολίζουμε το μέγιστο τέτοιο αριθμό.

Συμβολίζουμε με $K_n^{(m)}$ το πλήρες πολυγράφημα με n κορυφές και με $\lambda(K_n^{(m)}) = m$, όπου $m \geq 1$· δηλαδή, το γράφημα $K_n^{(m)}$ έχει τουλάχιστον $m \geq 1$ ακμές που ενώνουν κάθε ζεύγος των κορυφών του. Ένα πλήρες πολυγράφημα (complete multigraph) με n κορυφές και ακριβώς m ακμές να ενώνουν κάθε ζεύγος των κορυφών του ονομάζεται *m-πλήρες πολυγράφημα* (m-complete multigraph) και συμβολίζεται με K_n^m. Έτσι, για το m-πλήρες πολυγράφημα K_n^m έχουμε ότι $\lambda(K_n^m) = \Lambda(K_n^m) = m$ και $\delta(K_n^m) = \Delta(K_n^m) = (n-1)m$. Σημειώστε ότι, το 1-πλήρες πολυγράφημα είναι το γράφημα K_n. Εξ' ορισμού, κάθε πλήρες πολυγράφημα $K_n^{(m)}$ περιέχει ένα υπογράφημα ισόμορφο με ένα m-πλήρες πολυγράφημα K_n^m.

Έστω ένα πλήρες πολυγράφημα $K_n^{(m)}$ και έστω $\mathcal{C}$ να είναι ένα σύνολο των ακμών του γραφήματος $K_n^{(m)}$ τέτοιο ώστε το γράφημα που αποκτάται από το γράφημα $K_n^{(m)}$ διαγράφοντας τις ακμές του συνόλου $\mathcal{C}$ είναι ένα m-πλήρες πολυγράφημα K_n^m· το γράφημα που επάγεται από τις ακμές του συνόλου $\mathcal{C}$ ονομάζεται ένα *χαρακτηριστικό* (characteristic) γράφημα του $K_n^{(m)}$ και συμβολίζεται με $\mathcal{H}(K_n^{(m)})$. Εξ' ορισμού, ένα χαρακτηριστικό γράφημα $\mathcal{H}(K_n^{(m)})$ δεν περιέχει καμία απομονωμένη κορυφή.

Έστω δύο πολυγραφήματα G και H. Το γράφημα $G + H$ είναι ορισμένο ως εξής:

$$V(G+H) \; = \; V(G) \cup V(H)$$

και

$$vu \in E(G+H) \iff vu \in E(G) \;\; \text{ή} \;\; vu \in E(H).$$

Από τον ορισμό, και τα δύο γραφήματα G και H είναι υπογραφήματα του $G + H$. Επιπλέον, εάν $v, u \in V(G) \cap V(H)$, τότε $\ell_{G+H}(vu) = \ell_G(vu) + \ell_H(vu)$.

Έστω δύο πολυγραφήματα G και H τέτοια ώστε $E(H) \subseteq E(G)$. Το γράφημα $G - H$ ορίζεται ως το γράφημα που αποκτάται από το γράφημα G διαγράφοντας τις ακμές του H.

Έχοντας ορίσει τα γραφήματα $G + H$ και $G - H$, είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι $K_n^{(m)} = K_n^m + \mathcal{H}(K_n^{(m)})$ και $K_n^m = K_n^{(m)} - \mathcal{H}(K_n^{(m)})$. Πιο γενικά, $\mathcal{H}(K_n^{(m)}) \neq K_n^{(m)} - K_n^m$· η ισότητα ισχύει όταν το γράφημα $\mathcal{H}(K_n^{(m)})$ έχει n κορυφές.

Ο *πίνακας γειτνίασης* (adjacency matrix) ενός πολυγραφήματος G με n κορυφές, που συμβολίζεται με $A(G)$, είναι ένας $n \times n$ πίνακας με διαγώνια στοιχεία $A(G)[i,i] = 0$ και μη-διαγώνια στοιχεία $A(G)[i,j] = \ell_G(v_i v_j)$. Ο *πίνακας βαθμών* (degree matrix) του πολυγραφήματος G, που συμβολίζεται με $D(G)$, είναι ένας $n \times n$ πίνακας με διαγώνια στοιχεία $D(G)[i,i] = d_G(v_i)$ και μη-διαγώνια στοιχεία $D(G)[i,j] = 0$. Μέσα σε όλο το κεφάλαιο κενά στοιχεία στους πίνακες αναπαριστούν μηδενικές τιμές.

Για έναν $n \times n$ πίνακα M, ο *ij-ελάσσων* (minor) μ_j^i είναι η ορίζουσα του $(n-1) \times (n-1)$ πίνακα που αποκτάται από τον πίνακα M διαγράφοντας την γραμμή i και την στήλη j. Ο *i-συντελεστής* (cofactor) ισούται με μ_i^i. Ο *Kirchhoff πίνακας* (Kirchhoff matrix) $L(G)$ (επίσης γνωστός ως ο *Laplacian πίνακας* (Laplacian matrix)) για ένα πολυγράφημα G με n κορυφές είναι ένας $n \times n$ πίνακας με στοιχεία

$$L(G)[i,j] = \begin{cases} d_G(v_i) & \text{εάν } i = j, \\ -\ell_G(v_i v_j) & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

όπου $d_G(v_i)$ είναι ο βαθμός της κορυφής v_i στο γράφημα G και $\ell_G(v_i v_j)$ είναι το πλήθος των ακμών που ενώνουν τις κορυφές v_i και v_j στο γράφημα G. Ο πίνακας $L(G)$ είναι ένας θετικά-ορισμένος πίνακας, αφού είναι ένας συμμετρικός πίνακας και έχει μη-αρνητικές πραγματικές ιδιοτιμές. Σημειώστε ότι, $L(G) = D(G) - A(G)$.

Το *Θεώρημα του πίνακα-δέντρου, Kirchhoff* (Kirchhoff matrix tree theorem)[10] είναι ένα από τα πιο γνωστά αποτελέσματα στην θεωρία γραφημάτων. Παρέχει έναν τύπο για το πλήθος των σκελετικών δέντρων ενός γραφήματος G, σε σχέση με τους συντελεστές (cofactors) του Kirchhoff Πίνακα· είναι ορισμένος ως εξής:

Θεώρημα 6.1 (Θεώρημα του Πίνακα-Δέντρου, Kirchhoff [10, 47]). *Για ένα οποιοδήποτε πολυγράφημα G με τον πίνακα $L(G)$ ορισμένο όπως προηγουμένως, οι συντελεστές του πίνακα $L(G)$ έχουν την ίδια τιμή, και αυτή η τιμή είναι ίση με το πλήθος των σκελετικών δέντρων $\tau(G)$ του πολυγραφήματος G.*

Το Θεώρημα του Πίνακα-Δέντρου παρέχει ένα δυνατό εργαλείο για τον υπολογισμό του πλήθους $\tau(G)$ των σκελετικών δέντρων ενός γραφήματος G. Για αυτόν τον υπολογισμό, πρώτα σχηματίζουμε τον Kirchhoff πίνακα $L(G)$ του γραφήματος G και αποκτάμε τον $(n-1) \times (n-1)$ πίνακα $L_i(G)$ από τον $L(G)$ διαγράφοντας την i-στή γραμμή και στήλη (τυχαία), και τότε υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα $L_i(G)$. Η πράξη της διαγραφής μιας γραμμής και μιας στήλης από τον πίνακα $L(G)$ μπορεί να φαίνεται κατά κάποιο τρόπο αυθαίρετη. Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο βιβλίο [10] για περισσότερες λεπτομέρειες.

Το πλήθος των σκελετικών δέντρων ενός γραφήματος G μπορεί να υπολογιστεί απ' ευθείας (χωρίς την διαγραφή οποιαδήποτε γραμμής ή στήλης) ως προς έναν πίνακα $L'(G)$ παρόμοιο με τον Kirchhoff πίνακα $L(G)$, που σχετίζεται με το γράφημα G [103], ή, εναλλακτικά, μπορεί να υπολογιστεί ορίζοντας ένα χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\det(L(G) - xI)$ πάνω στον πίνακα $L(G)$· η τελευταία περίπτωση λαμβάνει υπ' όψιν τον υπολογισμό των ιδιοτιμών του πίνακα $L(G)$ (δείτε [12, 20, 42, 99, 109]).

Στη δική μας μελέτη, εκφράζουμε το πλήθος των σκελετικών δέντρων ενός γραφήματος της μορφής $K_n^m \pm G$, όπου το γράφημα G είναι ένα υπογράφημα του K_n^m με p κορυφές, σε σχέση με έναν $p \times p$ πίνακα $B(G)$ που σχετίζεται με το γράφημα G, και όχι σε σχέση με έναν $n \times n$ πίνακα $L(K_n^m \pm G)$ που σχετίζεται με ολόκληρο το γράφημα $K_n^m \pm G$.

6.3 Τα $K_n^m \pm G$ Γραφήματα

Σε αυτήν την ενότητα, θεωρούμε γραφήματα που αποκτούνται από το m-πλήρες πολυγράφημα K_n^m διαγράφοντας ή/και προσθέτοντας πολλαπλές ακμές. Ενδιαφερόμαστε στην εξαγωγή τύπων που βασίζονται στην ορίζουσα για το πλήθος των σκελετικών δέντρων των γραφημάτων της μορφής $K_n^m - G$ και $K_n^m + G$, όπου το γράφημα G είναι ένα πολυγράφημα που επάγεται από ένα σύνολο ακμών $S \subseteq E(K_n^m)$.

6.3.1 Η Περίπτωση $K_n^m - G$

Έστω ένα πολυγράφημα G που επάγεται από ένα σύνολο ακμών του γραφήματος K_n^m. Αποδεικνύουμε τύπους για το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος $K_n^m - G$· το γράφημα G έχει $p \leq n$ κορυφές και $\Lambda(G) \leq m$.

Με σκοπό να υπολογίσουμε το πλήθος των σκελετικών δέντρων $\tau(K_n^m - G)$ κάνουμε χρήση του Θεωρήματος 6.1. Επομένως, θεωρούμε τον $n \times n$ Kirchhoff πίνακα $L = L(K_n^m - G)$, που έχει την ακόλουθη μορφή:

$$L = \left[\begin{array}{cccc|cccc}
m(n-1) & -m & \cdots & -m & -m & -m & \cdots & -m \\
-m & m(n-1) & \cdots & -m & -m & -m & \cdots & -m \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
-m & -m & \cdots & m(n-1) & -m & -m & \cdots & -m \\
\cline{5-8}
-m & -m & \cdots & -m & m(n-1)-d_G(v_1) & & & -m+\ell_G(v_jv_i) \\
-m & -m & \cdots & -m & & m(n-1)-d_G(v_2) & & \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & & & \ddots & \\
-m & -m & \cdots & -m & -m+\ell_G(v_iv_j) & & & m(n-1)-d_G(v_p)
\end{array}\right],$$

όπου $d_G(v_i)$ είναι ο βαθμός της κορυφής $v_i \in G$ και $\ell_G(v_iv_j)$ είναι η πολλαπλότητα των κορυφών v_i και v_j στο γράφημα G. Οι ποσότητες των μη-διαγωνίων θέσεων $(n-p+i,\ n-p+j)$ του πίνακα L είναι ίσα με $-m+\ell_G(v_iv_j)$, $1 \leq i,\ j \leq p$. Σημειώστε ότι, οι πρώτες $n-p$ γραμμές και στήλες του πίνακα L αντιστοιχούν στις $n-p$ κορυφές του συνόλου $V(K_n^m) - V(G)$ και, έτσι, έχουν βαθμό $m(n-1)$ στο γράφημα $K_n^m - G$. Εφόσον $p \leq n$ και $\Lambda(G) \leq m$, ο πίνακας L είναι ένας θετικά-ορισμένος πίνακας.

Έστω ο $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας L_1 που αποκτάται από τον πίνακα L διαγράφοντας την πρώτη γραμμή και στήλη. Τότε, από το Θεώρημα 6.1 έχουμε ότι

$$\tau(K_n^m - G) = \det(L_1).$$

Για να υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα L_1, προσθέτουμε μια γραμμή και μια στήλη στον πίνακα L_1· ο $n \times n$ πίνακας που προκύπτει L_1', έχει 1 στην θέση $(1,1)$, $-m$ στις θέσεις $(1,j)$, $2 \leq j \leq n$, και 0 στις θέσεις $(i,1)$, $2 \leq i \leq n$. Είναι εύκολο να πιστοποιήσει κανείς, ότι $\det(L_1') = \det(L_1)$. Έτσι, ο $n \times n$ πίνακας L_1' έχει την ακόλουθη μορφή:

$$
L_1' = \left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & -m & \cdots & -m & -m & -m & \cdots & -m \\
0 & m(n-1) & \cdots & -m & -m & -m & \cdots & -m \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & -m & \cdots & m(n-1) & -m & -m & \cdots & -m \\
\hline
0 & -m & \cdots & -m & m(n-1)-d_G(v_1) & & & -m+\ell_G(v_jv_i) \\
0 & -m & \cdots & -m & & m(n-1)-d_G(v_2) & & \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & & & \ddots & \\
0 & -m & \cdots & -m & -m+\ell_G(v_iv_j) & & & m(n-1)-d_G(v_p)
\end{array}\right].
$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή του τελικού πίνακα L_1' με -1 και την προσθέτουμε στις υπόλοιπες $n-1$ γραμμές. Επομένως, η ορίζουσα του πίνακα L_1' μετατρέπεται ως εξής:

$$
\det(L_1') = \left|\begin{array}{cccc|cccc}
1 & -m & \cdots & -m & -m & -m & \cdots & -m \\
-1 & mn & & & & & & \\
\vdots & & \ddots & & & & & \\
-1 & & & mn & & & & \\
\hline
-1 & & & & mn-d_G(v_1) & & & \ell_G(v_jv_i) \\
-1 & & & & & mn-d_G(v_2) & & \\
\vdots & & & & & & \ddots & \\
-1 & & & & \ell_G(v_iv_j) & & & mn-d_G(v_p)
\end{array}\right|,
$$

όπου οι ποσότητες των μη-διαγωνίων θέσεων $(n-p+i,\ n-p+j)$ του πίνακα L_1' είναι ίσες με $\ell_G(v_iv_j)$, $1 \leq i,\ j \leq p$. Σημειώστε ότι, οι πρώτες $n-p$ γραμμές του πίνακα L_1' έχουν μη-μηδενικά στοιχεία στις θέσεις $(1,i)$ και (i,i), $2 \leq i \leq n-p$. Παρατηρούμε ότι το άθροισμα όλων των στοιχείων σε κάθε γραμμή του πίνακα L_1', εκτός από την πρώτη γραμμή, είναι ίσο με $mn-1$· Υπενθυμίζουμε ότι, $d_G(v_i) = \sum_{1\leq j\leq p} \ell_G(v_iv_j)$, για κάθε κορυφή $v_i \in V(G)$. Έτσι, πολλαπλασιάζουμε καθε στήλη του πίνακα L_1' με $\frac{1}{mn}$ και την προσθέτουμε στην πρώτη στήλη, και έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\det(L_1') &= \left|\begin{array}{cccc|cccc}
\frac{1}{n} & -m & \cdots & -m & -m & -m & \cdots & -m \\
0 & mn & & & & & & \\
\vdots & & \ddots & & & & & \\
0 & & & mn & & & & \\
\hline
0 & & & & mn-d_G(v_1) & & & \ell_G(v_jv_i) \\
0 & & & & & mn-d_G(v_2) & & \\
\vdots & & & & & & \ddots & \\
0 & & & & \ell_G(v_iv_j) & & & mn-d_G(v_p)
\end{array}\right| \qquad (6.1) \\
&= m \cdot (mn)^{n-p-2} \cdot \det(B),
\end{aligned}
$$

όπου $B = mnI_p - L(G)$ είναι ένας $p \times p$ πίνακας· επισημάνουμε ότι, $L(G)$ είναι ο Kirchhoff πίνακας του πολυγραφήματος G και γι' αυτό, $L(G) = D(G) - A(G)$, όπου $D(G)$ και $A(G)$ είναι ο πίνακας βαθμών και ο πίνακας γειτνίασης του γραφήματος G, αντίστοιχα. Συνοψίζοντας, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Λήμμα 6.1. *Έστω K_n^m το m-πλήρες πολυγράφημα με n κορυφές, και έστω G ένα πολυγράφημα με p κορυφές τέτοιο ώστε $E(G) \subseteq E(K_n^m)$. Τότε,*

$$\tau(K_n^m - G) = m \cdot (mn)^{n-p-2} \cdot \det(B),$$

όπου $B = mnI_p - L(G)$ είναι ένας $p \times p$ πίνακας, και $L(G)$ είναι ο Kirchhoff πίνακας του γραφήματος G.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι, για απλά γραφήματα K_n και G, το Λήμμα 6.1 είχε διατυπωθεί πρώτα από τον Moon στο βιβλίο [82] και διάφοροι συγγραφείς με ποικίλες διαφοροποιήσεις το χρησιμοποίησαν ως ένα κατασκευαστικό εργαλείο για να αποκτήσουν τύπους για το πλήθος των σκελετικών δέντρων των γραφημάτων της μορφής $K_n - G$.

6.3.2 Η Περίπτωση $K_n^m + G$

Σε αυτή την ενότητα, εξάγουμε έναν τύπο για το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος $K_n^m + G$, όπου το γράφημα G είναι ένα υπογράφημα του K_n^m. Βασιζόμενοι στο Θεώρημα 6.1, κατασκευάζουμε τον $n \times n$ Kirchhoff πίνακα $L = L(K_n^m + G)$ που σχετίζεται με το γράφημα $K_n^m + G$· μπορεί να έχει παρόμοια μορφή όπως στην προηγούμενη περίπτωση $K_n^m - G$. Η διαφορά βρίσκεται στον $p \times p$ υποπίνακα που σχηματίζεται από τις τελευταίες p γραμμές και στήλες του πίνακα L. Πιο συγκεκριμένα, ο πίνακας L έχει την ακόλουθη μορφή:

$$L = \begin{bmatrix} m(n-1) & -m & \cdots & -m & -m & -m & \cdots & -m \\ -m & m(n-1) & \cdots & -m & -m & -m & \cdots & -m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -m & -m & \cdots & m(n-1) & -m & -m & \cdots & -m \\ -m & -m & \cdots & -m & m(n-1)+d_G(v_1) & & & -m-\ell_G(v_jv_i) \\ -m & -m & \cdots & -m & & m(n-1)+d_G(v_2) & & \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & & & \ddots & \\ -m & -m & \cdots & -m & -m-\ell_G(v_iv_j) & & & m(n-1)+d_G(v_p) \end{bmatrix}, \tag{6.2}$$

όπου τα στοιχεία στις μη-διαγώνιες θέσεις $(n-p+i,\ n-p+j)$ του πίνακα L είναι ίσα με $-m-\ell_G(v_iv_j)$, $1 \leq i,\ j \leq p$.

Είναι επόμενο τώρα, να εφαρμόσουμε μια παρόμοια τεχνική με αυτή που εφαρμόσαμε για τον υπολογισμό της ορίζουσας του πίνακα L_1' στην περίπτωση του γραφήματος $K_n^m - G$. Έτσι, για την περίπτωση του γραφήματος $K_n^m + G$, η ορίζουσα του πίνακα L_1' της Εξ. (6.1) μετατρέπεται

$$\det(L_1') = \begin{vmatrix} \frac{1}{n} & -m & \cdots & -m & -m & -m & \cdots & -m \\ 0 & mn & & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & & \\ 0 & & & mn & & & & \\ 0 & & & & mn+d_G(v_1) & & & -\ell_G(v_jv_i) \\ 0 & & & & & mn+d_G(v_2) & & \\ \vdots & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & -\ell_G(v_iv_j) & & & mn+d_G(v_p) \end{vmatrix}$$

$$= m \cdot (mn)^{n-p-2} \cdot \det(B),$$

όπου τα στοιχεία στις μη-διαγώνιες θέσεις $(n-p+i, n-p+j)$ του πίνακα L'_1, είναι ίσα με $-\ell_G(v_i v_j)$, $1 \leq i,\ j \leq p$. Έτσι, καταλήγουμε στο ακόλουθο αποτέλεσμα.

Λήμμα 6.2. *Έστω ένα m-πλήρες πολυγράφημα K_n^m με n κορυφές, και έστω το γράφημα G να είναι ένα πολυγράφημα με p κορυφές τέτοιο ώστε $E(G) \subseteq E(K_n^m)$. Τότε,*

$$\tau(K_n^m + G) = m \cdot (mn)^{n-p-2} \cdot \det(B),$$

όπου $B = mnI_p + L(G)$ είναι ένας $p \times p$ πίνακας, και $L(G)$ είναι ο Kirchhoff πίνακας του γραφήματος G.

6.3.3 Η Γενική Περίπτωση $K_n^m \pm G$

Στη συνέχεια εξάγουμε έναν γενικό τύπο και για τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις των γραφημάτων $K_n^m + G$ και $K_n^m - G$. Για τον σκοπό αυτό, ορίζουμε μια παράμετρο α ως εξής: (i) $\alpha = 1$, για την περίπτωση $K_n^m + G$, και (ii) $\alpha = -1$, για την περίπτωση $K_n^m - G$. Με άλλα λόγια, $\alpha = \pm 1$, σύμφωνα με το γράφημα $K_n^m \pm G$. Βασιζόμενοι στην τιμή της παραμέτρου α συμπεραίνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 6.2. *Έστω ένα m-πλήρες πολυγράφημα K_n^m με n κορυφές, και έστω ένα πολυγράφημα G με p κορυφές τέτοιο ώστε $V(G) \subseteq V(K_n^m)$ και $E(G) \subseteq E(K_n^m)$. Τότε,*

$$\tau(K_n^m \pm G) = m \cdot (mn)^{n-p-2} \det(B),$$

όπου $B = mnI_p + \alpha \cdot L(G)$ είναι ένας $p \times p$ πίνακας, $\alpha = \pm 1$ σύμφωνα με το γράφημα $K_n^m \pm G$, και $L(G)$ είναι ο Kirchhoff πίνακας του γραφήματος G.

Στο προηγούμενο θεώρημα το γράφημα G είναι ένα υπογράφημα του K_n^m, και, γι' αυτό, έχει πολλαπλότητα $\Lambda(G) \leq m$. Έπεται ότι το γράφημα $K_n^m + G$ έχει πολλαπλότητα $\Lambda(K_n^m + G) \leq 2m$. Παρ' όλα αυτά, μπορούμε να αποφύγουμε τον προηγούμενο περιορισμό για την περίπτωση του γραφήματος $K_n^m + G$. Δεν είναι δύσκολο να δει κανείς ότι ο πίνακας L της Εξίσωσης (6.2) παραμένει θετικά-ορισμένος εφόσον ισχύει $\lambda(G) \geq 0$. Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε το γράφημα G να είναι ένα πολυγράφημα με p κορυφές τέτοιο ώστε $V(G) \subseteq V(K_n^m)$. Το ακόλουθο θεώρημα ισχύει.

Θεώρημα 6.3. *Έστω ένα m-πλήρες πολυγράφημα K_n^m με n κορυφές, και έστω το γράφημα G να είναι ένα πολυγράφημα με p κορυφές τέτοιο ώστε $V(G) \subseteq V(K_n^m)$. Τότε,*

$$\tau(K_n^m + G) = m \cdot (mn)^{n-p-2} \cdot \det(B),$$

όπου $B = mnI_p + L(G)$ είναι ένας $p \times p$ πίνακας, και $L(G)$ είναι ο Kirchhoff πίνακας του γραφήματος G.

6.4 Τα $K_n^{(m)} \pm G$ Γραφήματα

Σε αυτή την ενότητα αποδεικνύουμε τύπους βασισμένους στην ορίζουσα για το πλήθος $\tau(K_n^{(m)} \pm G)$, όπου $K_n^{(m)}$ είναι ένα πλήρες πολυγράφημα και G είναι ένα υπογράφημα του $K_n^{(m)}$. Πρώτα λαμβάνουμε υπ' όψιν το γράφημα $K_n^m + G_1 - G_2$ και παίρνουμε έναν τύπο για το πλήθος $\tau(K_n^m + G_1 - G_2)$, και στη συνέχεια, αποδεικνύουμε έναν τύπο για το πλήθος $\tau(K_n^{(m)} \pm G)$ χρησιμοποιώντας το γράφημα $K_n^m + G_1 - G_2$ και ένα χαρακτηριστικό γράφημα $\mathcal{H}(K_n^{(m)})$.

6.4.1 Η Περίπτωση $K_n^m + G_1 - G_2$

Εδώ, θεωρούμε γραφήματα που προκύπτουν από το m-πλήρες πολυγράφημα K_n^m προσθέτοντας πολλαπλές ακμές ενός γραφήματος G_1 και αφαιρώντας πολλαπλές ακμές από ένα γράφημα G_2. Έστω ένα πολυγράφημα G_1 με p_1 κορυφές, τέτοιο ώστε $V(G_1) \subseteq V(K_n^m)$, και έστω G_2 ένα πολυγράφημα με p_2 κορυφές, τέτοιο ώστε $V(G_2) \subseteq V(K_n^m)$ και $E(G_2) \subseteq E(K_n^m + G_1)$. Σε αυτή την περίπτωση, επικεντρώνουμε το ενδιαφέρον μας στο γράφημα $K_n^m + G_1 - G_2$, που αποκτάται από το m-πλήρες πολυγράφημα K_n^m προσθέτοντας τις ακμές του γραφήματος G_1, και στη συνέχεια, αφαιρώντας από το προκύπτων γράφημα $K_n^m + G_1$ τις ακμές του γραφήματος G_2· δηλαδή, $K_n^m + G_1 - G_2 = (K_n^m + G_1) - G_2$.

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι, $(K_n^m+G_1)-G_2 \neq K_n^m+(G_1-G_2)$ εφόσον, στη γενική περίπτωση, το γράφημα G_2 δεν είναι ένα υπογράφημα του γραφήματος G_1. Επιπλέον, $V(G_1) \neq V(G_2)$.

Για το ζευγάρι των πολυγραφημάτων (G_1, G_2) ορίζουμε τα *union-stable* γραφήματα G_1^* και G_2^* του ζεύγους (G_1, G_2) ως εξής: G_1^* είναι το πολυγράφημα που προκύπτει από το γράφημα G_1 προσθέτοντας στο σύνολο κορυφών $V(G_1)$ τις κορυφές από το σύνολο $V(G_2) - V(G_1)$ και G_2^* είναι το πολυγράφημα που προκύπτει από το γράφημα G_2 προσθέτοντας στ σύνολο κορυφών $V(G_2)$ τις κορυφές του συνόλου $V(G_1) - V(G_2)$. Έτσι, εξ' ορισμού $V(G_1^*) = V(G_2^*)$.

Από τον ορισμό λοιπόν, και τα δύο γραφήματα G_1^* και G_2^* είναι πολυγραφήματα με $p = |V(G_1) \cup V(G_2)|$ κορυφές, με τουλάχιστον $p - p_1$ και $p - p_2$ απομονωμένες κορυφές, αντίστοιχα. Εφόσον $K_n^m + G_1^* - G_2^* = K_n^m + G_1 - G_2$, επικεντρώνουμε το ενδιαφέρον μας στο γράφημα $K_n^m + G_1^* - G_2^*$.

Βασιζόμενοι στο Θεώρημα 6.1, κατασκευάζουμε τον $n \times n$ Kirchhoff πίνακα $L = L(K_n^m + G_1^* - G_2^*)$ που σχετίζεται με το γράφημα $K_n^m + G_1^* - G_2^*$· είναι παρόμοιος με την περίπτωση του γραφήματος $K_n^m \pm G$. Η διαφορά έγκειται στον $p \times p$ υποπίνακα που σχηματίζεται από τις τελευταίες p γραμμές και στήλες του πίνακα L, όπου $p = |V(G_1) \cup V(G_2)|$. Πιο συγκεκριμένα, ο πίνακας L έχει την ακόλουθη μορφή:

$$L = \left[\begin{array}{cccc:cccc} m(n-1) & -m & \cdots & -m & -m & -m & \cdots & -m \\ -m & m(n-1) & \cdots & -m & -m & -m & \cdots & -m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -m & -m & \cdots & m(n-1) & -m & -m & \cdots & -m \\ \hdashline -m & -m & \cdots & -m & B'(G_1^*, G_2^*)[1,1] & & & B'(G_1^*, G_2^*)[j,i] \\ -m & -m & \cdots & -m & & B'(G_1^*, G_2^*)[2,2] & & \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & & & \ddots & \\ -m & -m & \cdots & -m & B'(G_1^*, G_2^*)[i,j] & & & B'(G_1^*, G_2^*)[p,p] \end{array}\right],$$

όπου ο $p \times p$ υποπίνακας $B'(G_1^*, G_2^*)$ έχει στοιχεία

$$B'(G_1^*, G_2^*)[i,j] = \begin{cases} m(n-1) + d_{G_1^*}(v_i) - d_{G_2^*}(v_i) & \text{εάν } i = j, \\ -m - \ell_{G_1^*}(v_i v_j) + \ell_{G_2^*}(v_i v_j) & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Σημειώνουμε ότι τα $\ell_{G_1^*}(v_i v_j)$ και $\ell_{G_2^*}(v_i v_j)$ είναι τα πλήθη των ακμών μεταξύ των κορυφών v_i και v_j στο γράφημα G_1^* και στο γράφημα G_2^*, αντίστοιχα. Οι ποσότητες $d_{G_1^*}(v_i)$ και $d_{G_2^*}(v_i)$, $1 \leq i \leq p$, εκφράζουν τον βαθμό της κορυφής v_i στο γράφημα G_1^* και στο γράφημα G_2^*, αντίστοιχα. Αξίζει να σημειωθεί ότι, $V(G_1^*) = V(G_2^*)$.

Είναι επόμενο τώρα να εφαρμόσουμε μια παρόμοια τεχνική με αυτή που εφαρμόσαμε για τον υπολογισμό της ορίζουσας του πίνακα L_1' στην περίπτωση που είχαμε το γράφημα $K_n^m - G$. Έτσι, για την περίπτωση του γραφήματος $K_n^m + G_1^* - G_2^*$, η ορίζουσα του πίνακα L_1' της Εξ. (6.1) μετατρέπεται

$$
\det\left(L_1'\right) = \begin{vmatrix}
\frac{1}{n} & -m & \cdots & -m & -m & -m & \cdots & -m \\
0 & mn & & & & & & \\
\vdots & & \ddots & & & & & \\
0 & & & mn & & & & \\
0 & & & & B(G_1^*,G_2^*)[1,1] & & & B(G_1^*,G_2^*)[j,i] \\
0 & & & & & B(G_1^*,G_2^*)[2,2] & & \\
\vdots & & & & & & \ddots & \\
0 & & & & B(G_1^*,G_2^*)[i,j] & & & B(G_1^*,G_2^*)[p,p]
\end{vmatrix}
$$

$$
= m \cdot (mn)^{n-p-2} \cdot \det\left(B(G_1^*, G_2^*)\right),
$$

όπου ο $p \times p$ υποπίνακας $B(G_1^*, G_2^*)$ έχει στοιχεία

$$
B(G_1^*, G_2^*)[i,j] = \begin{cases} mn + d_{G_1^*}(v_i) - d_{G_2^*}(v_i) & \text{εάν } i = j, \\ -\ell_{G_1^*}(v_i v_j) + \ell_{G_2^*}(v_i v_j) & \text{αλλιώς.} \end{cases}
$$

Εφόσον $B(G_1^*, G_2^*) = mnI_p + L(G_1^*) - L(G_2^*)$, θέτουμε με $B = B(G_1^*, G_2^*)$ και αποκτούμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 6.4. *Έστω ένα m-πλήρες πολυγράφημα K_n^m με n κορυφές, και έστω G_1, G_2 δύο πολυγραφήματα τέτοια ώστε $V(G_1) \subseteq V(K_n^m)$ και $E(G_2) \subseteq E(K_n^m + G_1)$. Τότε,*

$$
\tau(K_n^m + G_1 - G_2) = m \cdot (mn)^{n-p-2} \det(B),
$$

όπου $p = |V(G_1) \cup V(G_2)|$, $B = mnI_p + L(G_1^*) - L(G_2^*)$ είναι ένας $p \times p$ πίνακας, $L(G_1^*)$ και $L(G_2^*)$ είναι οι Kirchhoff πίνακες των union-stable γραφημάτων G_1^* και G_2^* του ζεύγους (G_1, G_2), αντίστοιχα.

6.4.2 Η Γενική Περίπτωση $K_n^{(m)} \pm G$

Έστω $K_n^{(m)}$ ένα πλήρες πολυγράφημα με n κορυφές και έστω G ένα υπογράφημα του γραφήματος $K_n^{(m)}$. Θα δείξουμε ότι το προηγούμενο θεώρημα παρέχει την βασική ιδέα και αποτελεί το κλειδί για τον υπολογισμό του πλήθους $\tau(K_n^{(m)} \pm G)$, όπου $K_n^{(m)} \pm G$ είναι το γράφημα που προκύπτει από το γράφημα $K_n^{(m)}$ προσθέτοντας ή αφαιρώντας τις ακμές του γραφήματος G. Εφόσον $\lambda(K_n^{(m)}) > 0$, έχουμε ότι $K_n^{(m)} = K_n^m + \mathcal{H}(K_n^{(m)})$, όπου $\mathcal{H}(K_n^{(m)})$ είναι ένα χαρακτηριστικό γράφημα του $K_n^{(m)}$. Τότε, έχουμε ότι

$$
K_n^{(m)} \pm G = K_n^m + \mathcal{H}(K_n^{(m)}) \pm G.
$$

Η πρόσθεση των ακμών του γραφήματος G στο γράφημα $K_n^{(m)}$, επάγει ότι $K_n^{(m)} + G = K_n^m + G'$, όπου το γράφημα $G' = \mathcal{H}(K_n^{(m)}) + G$. Έτσι, για τον υπολογισμό του πλήθους $\tau(K_n^{(m)} + G)$ μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 6.3. Από την άλλη, για την περίπτωση της αφαίρεσης των ακμών του γραφήματος G από το γράφημα $K_n^{(m)}$, για τον υπολογισμό του πλήθους $\tau(K_n^{(m)} - G)$ μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 6.4, αφού $K_n^{(m)} - G = K_n^m + \mathcal{H}(K_n^{(m)}) - G$. Συνοψίζοντας έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Λήμμα 6.3. *Έστω ένα πλήρες πολυγράφημα $K_n^{(m)}$ με n κορυφές και $\mathcal{H}(K_n^{(m)})$ ένα χαρακτηριστικό γράφημα του $K_n^{(m)}$, και έστω G ένα υπογράφημα του $K_n^{(m)}$. Τότε,*

$$
\tau(K_n^{(m)} \pm G) = m \cdot (mn)^{n-p-2} \det(B),
$$

όπου $p = |V(\mathcal{H}(K_n^{(m)})) \cup V(G)|$, $B = mnI_p + L(\mathcal{H}(K_n^{(m)})^*) \pm L(G^*)$ είναι ένας $p \times p$ πίνακας και $L(\mathcal{H}(K_n^{(m)})^*)$ και $L(G^*)$ είναι οι Kirchhoff πίνακες των union-stable γραφημάτων $\mathcal{H}(K_n^{(m)})^*$ και G^* του ζεύγους $(\mathcal{H}(K_n^{(m)}), G)$, αντίστοιχα.

Σημειώστε ότι θεωρούμε τα γραφήματα $K_n^{(m)} \pm G$ και γι' αυτό τον λόγο το γράφημα G πρέπει να είναι ένα υπογράφημα του $K_n^{(m)}$. Παρ' όλα αυτά όμως στην περίπτωση που έχουμε το γράφημα $K_n^{(m)} + G$ graph, παρόμοια με το Θεώρημα 6.3, είναι προφανής ότι το γράφημα G μπορεί να είναι ένα γράφημα που επάγεται από οποιοδήποτε σύνολο των ακμών που ενώνουν τις κορυφές του γραφήματος $K_n^{(m)}$.

6.5 Κλάσεις Γραφημάτων

Σε αυτή την ενότητα, γενικεύουμε γνωστούς κλειστούς τύπους για το πλήθος των σκελετικών δέντρων για οικογένειες γραφημάτων της μορφής $K_n - G$. Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή του κεφαλαίου υπάρχουν πολλές περιπτώσεις για το πλήθος $\tau(K_n - G)$, που εξερτάται από την επιλογή του γραφήματος G. Ο σκοπός αυτής της ενότητας είναι να αποδείξει κλειστούς τύπους για το πλήθος $\tau(K_n^m \pm G)$, εφαρμόζοντας παρόμοιες τεχνικές με αυτές γι την περίπτωση του γραφήματος $K_n - G$. Έτσι εξάγουμε κλειστούς τύπους για το πλήθος των σκελετικών δέντρων $\tau(K_n^m \pm G)$, για τις περιπτώσεις όπου το γράφημα G είναι (i) ένα πλήρες πολυμερή γράφημα, και (ii) ένα multi-star γράφημα.

6.5.1 Πλήρες Πολυμερή Γραφήματα

Ένα γράφημα λέγεται ότι είναι ένα *πλήρες πολυμερή* (complete multipartite) (ή πλήρη k-μερές) εάν υπάρχει μια διαμέριση του συνόλου κορυφών του έτσι ώστε να μην υπάρχουν γειτονικές κορυφές του ίδιου συνόλου και κάθε ζεύγος κορυφών από διαφορετικά σύνολα να είναι γειτονικά. Συμβολίζουμε ένα πλήρες πολυμερή γράφημα με p κορυφές ως $K_{m_1,m_2,\ldots,m_k}$, όπου $p = m_1 + m_2 + \cdots + m_k$.

Έστω ένα πολυμερή γράφημα $G = K_{m_1,m_2,\ldots,m_k}$ με p κορυφές. Στην εργασία [95] έχει αποδειχτεί ότι το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος $K_n - G$ δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$\tau(K_n - G) = n^{n-p-1}(n-p)^{k-1}\prod_{i=1}^{k}(n-(p-m_i))^{m_i-1},$$

όπου p είναι το πλήθος των κορυφών του γραφήματος G.

Σε αυτή την ενότητα, επεκτείνουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα δείχνοντας έναν κλειστό τύπο για το πλήθος των σκελετικών δέντρων των γραφημάτων της μορφής $K_n^m \pm G$, όπου το γράφημα G είναι ένα πλήρες πολυμερές γράφημα με $p \le n$ κορυφές. Από το Θεώρημα 6.2, κατασκευάζουμε τον $p \times p$ πίνακα $B(G)$ και προσθέτουμε μια γραμμή και μια στήλη στον πίνακα $B(G)$· ο τελικός $(p+1) \times (p+1)$ πίνακας $B'(G)$ έχει 1 στην θέση $(1,1)$, α στις θέσεις $(1,j)$, $2 \le j \le p+1$, και 0 στις θέσεις $(i,1)$, $2 \le i \le p+1$· θυμίζουμε ότι, $\alpha = \pm 1$. Έτσι, ο τελικός πίνακας $B'(G)$ έχει τη ακόλουθη μορφή:

$$B'(G) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha \\ & M_1 & -\alpha & \cdots & -\alpha \\ & -\alpha & M_2 & \cdots & -\alpha \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & -\alpha & -\alpha & \cdots & M_k \end{bmatrix},$$

όπου οι διαγώνιοι $m_i \times m_i$ υποπίνακες M_i έχουν διαγώνια στοιχεία $mn + \alpha \cdot (p - m_i)$, $1 \le i \le k$. Σημειώστε ότι, $\det(B(G)) = \det(B'(G))$.

Με σκοπό να υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα $B'(G)$ προσθέτουμε την πρώτη γραμμή στις επόμενες p γραμμές. Πολλαπλασιάζουμε τις $2, 3, \ldots, p+1$ στήλες του πίνακα $B'(G)$ με $-1/(mn+\alpha\cdot p)$ και τις προσθέτουμε στην πρώτη στήλη. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι, το άθροισμα σε κάθε γραμμή του πίνακα $B'(G)$ είναι ίσο με $mn+\alpha\cdot p$. Επομένως, η ορίζουσα του πίνακα $B'(G)$ μετατρέπεται:

$$\det(B'(G)) = \begin{vmatrix} 1-\frac{\alpha\cdot p}{mn+\alpha\cdot p} & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha \\ & M'_1 & & & \\ & & M'_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & M'_k \end{vmatrix}$$
$$= \tfrac{mn}{mn+\alpha\cdot p}\cdot\det(M'_1)\cdot\det(M'_2)\cdot\dots\cdot\det(M'_k), \tag{6.3}$$

όπου οι $m_i \times m_i$ υποπίνακες M'_i, $1 \le i \le k$, έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$M'_i = \begin{vmatrix} mn+\alpha\cdot(p-m_i)+\alpha & \alpha & \cdots & \alpha \\ \alpha & mn+\alpha\cdot(p-m_i)+\alpha & \cdots & \alpha \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha & \alpha & \cdots & mn+\alpha\cdot(p-m_i)+\alpha \end{vmatrix}.$$

Για την ορίζουσα του πίνακα M'_i πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με -1 και την προσθέτουμε στις επόμενες m_i-1 γραμμές. Στην συνέχεια, προσθέτουμε τις στήλες του πίνακα M'_i στην πρώτη στήλη. Παρατηρώντας ότι $mn+\alpha\cdot(p-m_i)+\alpha\cdot m_i = mn+\alpha\cdot p$, έχουμε

$$\det(M'_i) = (mn+\alpha\cdot p)\cdot(mn+\alpha\cdot(p-m_i))^{m_i-1}.$$

Επομένως, από την Εξίσωση (6.3) έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 6.5. *Έστω ένα πλήρες πολυμερή γράφημα $G = K_{m_1,m_2,\ldots,m_k}$ με $p = m_1+m_2+\cdots+m_k$ κορυφές. Τότε,*

$$\tau(K_n^m \pm G) = m\cdot(mn)^{n-p-1}(mn+\alpha\cdot p)^{k-1}\prod_{i=1}^{k}(mn+\alpha\cdot(p-m_i))^{m_i-1},$$

όπου $p \le n$ και $\alpha = \pm 1$ σύμφωνα με $K_n^m \pm G$.

Σημείωση 6.1. Η κλάση των πλήρες πολυμερή γραφημάτων περιέχει την κλάση των c-split γραφημάτων (πλήρη διχοτομίσιμα γραφήματα–complete split graphs)· ένα γράφημα ορίζεται ως c-split γράφημα εάν υπάρχει μια διαμέριση του συνόλου κορυφών σε ένα ευσταθές σύνολο (ανεξάρτητο) S και σε ένα πλήρη σύνολο K και κάθε κορυφή στο σύνολο S είναι γειτονική με όλες τις κορυφές του συνόλου K [43].

Έτσι, ένα c-split γράφημα G με p κορυφές και $V(G) = K + S$ είναι ένα πλήρες πολυμερές γράφημα $K_{m_1,m_2,\ldots,m_k}$ με $m_1 = |S|$, $m_2 = m_3 = \cdots = m_k = 1$ και $k = |K|+1$. Ένας κλειστός τύπος για το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος $K_n - G$ είχε προταθεί στην εργασία [91], όπου το γράφημα G είναι ένα c-split γράφημα.

Έστω ένα c-split γράφημα G με p κορυφές και έστω $V(G) = K + S$ να είναι η διαμέριση του συνόλου κορυφών του. Τότε, από το Θεώρημα 6.5 παίρνουμε ότι το πλήθος των σκελετικών δέντρων των γραφημάτων της μορφής $K_n^m \pm G$ δίνεται από τον ακόλουθο κλειστό τύπο:

$$\tau(K_n^m \pm G) = m\cdot(mn)^{n-p-1}(mn+\alpha\cdot|K|)^{|S|-1}(mn+\alpha\cdot p)^{|K|},$$

όπου $p = |K|+|S|$ και $p \le n$. □

6.5.2 Multi-star Γραφήματα

Ένα *multi-star* γράφημα, που συμβολίζεται ως $K_r(b_1, b_2, \ldots, b_r)$, αποτελείται από ένα πλήρες γράφημα K_r με κορυφές με επιγραφές $v_1, v_2, \ldots, v_r$, και b_i κορυφές βαθμού ένα, που η κάθε μια είναι γειτονική με την κορυφή v_i, $1 \leq i \leq r$ [24, 93, 107].

Έστω ένα multi-star γράφημα $G = K_r(b_1, b_2, \ldots, b_r)$ με $p = r + b_1 + b_2 + \cdots + b_r$ κορυφές. Στις εργασίες [24, 93, 107], είχε αποδειχτεί ότι το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος $K_n - G$ δίνεται από τον ακόλουθο κλειστό τύπο:

$$\tau(K_n - G) = n^{n-p-2}(n-1)^{p-r} \left(1 + \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{q_i - 1}\right) \cdot \prod_{i=1}^{r} (q_i - 1),$$

όπου $q_i = n - (r - 1 + b_i) - \frac{b_i}{n-1}$.

Σε αυτή την ενότητα, βασιζόμενοι στο Θεώρημα 6.2, γενικεύουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα παράγοντας έναν κλειστό τύπο για το πλήθος των σκελετικών δέντρων των γραφημάτων της μορφής $K_n^m \pm G$, όπου το γράφημα G είναι ένα multi-star γράφημα με $p \leq n$ κορυφές. Έστω το K_r να είναι το πλήρες γράφημα του multi-star γραφήματος G και έστω $v_1, v_2, \ldots, v_r$ να είναι οι κορυφές του. Το σύνολο κορυφών που αποτελείται από την κορυφή v_i και τις b_i κορυφές βαθμού ένα που είναι όλες γειτονικές με την κορυφή v_i επάγει ένα γράφημα αστέρα με $b_i + 1$ κορυφές, $1 \leq i \leq r$. Κατασκευάζουμε έναν $(b_i + 1) \times (b_i + 1)$ πίνακα M_i που αντιστοιχεί στο γράφημα αστέρα με κεντρική κορυφή την v_i· έχει την ακόλουθη μορφή:

$$M_i = \begin{bmatrix} mn+\alpha & & & -\alpha \\ & mn+\alpha & & -\alpha \\ & & & \vdots \\ -\alpha & -\alpha & \cdots & mn+\alpha\cdot(r-1+b_i) \end{bmatrix},$$

όπου $\alpha = \pm 1$.

Για να υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα M_i πρώτα πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με -1 και την προσθέτουμε στις επόμενες $b_i - 1$ γραμμές. Τότε, προσθέτουμε τις b_i στήλες στην πρώτη στήλη. Τελικά, πολλαπλασιάζουμε την πρώτη στήλη με $\frac{\alpha}{mn+\alpha}$ και την προσθέτουμε στην τελευταία στήλη. Έτσι, παρατηρώντας ότι $\alpha^2 = 1$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \det(M_i) &= (mn+\alpha)^{b_i} \cdot \left(mn + \alpha\cdot(r-1+b_i) - \tfrac{\alpha^2 b_i}{mn+\alpha}\right) \\ &= (mn+\alpha)^{b_i} \cdot \left(mn + \alpha\cdot(r-1+b_i) - \tfrac{b_i}{mn+\alpha}\right) \\ &= (mn+\alpha)^{b_i} \cdot q_i, \end{aligned}$$

όπου

$$q_i = mn + \alpha\cdot(r-1+b_i) - \tfrac{b_i}{mn+\alpha}, \quad 1 \leq i \leq r. \tag{6.4}$$

Τώρα είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε το πλήθος των σκελετικών δέντρων $\tau(K_n^m \pm G)$ χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 6.2. Έτσι, έχουμε

$$\tau(K_n^m \pm G) = m \cdot (mn)^{n-p-2} \cdot \det(B(G)) \tag{6.5}$$

όπου ο πίνακας

$$B(G) = \begin{bmatrix} M_{1,1} & & & & -\alpha & & & \\ & M_{2,2} & & & & -\alpha & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & M_{r,r} & & & & -\alpha \\ -\alpha & & & & mn+\alpha\cdot d_G(v_1) & -\alpha & \cdots & -\alpha \\ & -\alpha & & & -\alpha & mn+\alpha\cdot d_G(v_2) & \cdots & -\alpha \\ & & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & -\alpha & -\alpha & -\alpha & \cdots & mn+\alpha\cdot d_G(v_r) \end{bmatrix}$$

είναι ένας $p \times p$ πίνακας και ο $M_{i,i}$ είναι ένας υποπίνακας που αποκτάται από τον πίνακα M_i διαγράφοντας την τελευταία γραμμή και την τελευταία στήλη του, $1 \leq i \leq r$. Ο βαθμός της κορυφής v_i του γραφήματος K_r είναι ίσος με $d_G(v_i) = r - 1 + b_i$, $1 \leq i \leq r$. Επομένως, τώρα επαρκεί να υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα $B(G)$. Ακολουθώντας μια διαδικασία παρόμοια με αυτή που εφαρμόσαμε στον πίνακα M_i, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \det(B(G)) &= (mn+\alpha)^{p-r} \cdot \begin{vmatrix} q_1 & -\alpha & \cdots & -\alpha \\ -\alpha & q_2 & \cdots & -\alpha \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha & -\alpha & \cdots & q_r \end{vmatrix} \\ &= (mn+\alpha)^{p-r} \cdot \det(D). \end{aligned}$$

Φέρνουμε στην μνήμη μας ότι, $q_i = mn + \alpha \cdot (r - 1 + b_i) - \frac{b_i}{mn+\alpha}\cdot$ δείτε την Εξίσωση (6.4). Για να υπολογίσουμε την ορίζουσα του $r \times r$ πίνακα D πρώτα πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή του πίνακα D με -1 και την προσθέτουμε στις $r-1$ υπόλοιπες γραμμές. Τότε, πολλαπλασιάζουμε την στήλη i με $\frac{q_1+\alpha}{q_i+\alpha}$, $2 \leq i \leq r$, και την προσθέτουμε στην πρώτη στήλη. Αναπτύσσοντας ως προς τις γραμμές του πίνακα D, έχουμε ότι

$$\det(D) = \left(1 - \alpha \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{q_i + \alpha}\right) \cdot \prod_{i=1}^{r} (q_i + \alpha).$$

Επομένως, αντικαθιστώντας την τιμή της $\det(D)$ στη Εξίσωση (6.5), έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 6.6. *Έστω ένα multi-star γράφημα $G = K_r(b_1, b_2, \ldots, b_r)$ με $p = r + b_1 + b_2 + \cdots + b_r$ κορυφές. Τότε,*

$$\tau(K_n^m \pm G) = m \cdot (mn)^{n-p-2}(mn+\alpha)^{p-r} \left(1 - \alpha \cdot \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{q_i + \alpha}\right) \cdot \prod_{i=1}^{r} (q_i + \alpha),$$

όπου $p \leq n$, $q_i = mn + \alpha \cdot (r - 1 + b_i) - \frac{b_i}{mn+\alpha}$ και $\alpha = \pm 1$ σύμφωνα με $K_n^m \pm G$.

6.6 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο αποδείξαμε τύπους που βασίζονται στον υπολογισμό ορίζουσας για το πλήθος των σκελετικών δέντρων για μια οικογένεια γραφημάτων της μορφής $K_n^m \pm G$, και επίσης για την πιο γενική οικογένεια γραφημάτων $K_n^{(m)} \pm G$, όπου το γράφημα K_n^m (αντίστ. $K_n^{(m)}$) είναι το πλήρες πολυγράφημα με n κορυφές και ακριβώς (αντίστ. τουλάχιστον) m ακμές να ενώνουν κάθε ζεύγος κουφών και το γράφημα G είναι ένα πολυγράφημα που επάγεται από ένα σύνολο ακμών του γραφήματος K_n^m (αντίστ. $K_n^{(m)}$). Βασιζόμενοι σε αυτούς τους τύπους, αποδείξαμε κλειστούς τύπους για το πλήθος των σκελετικών δέντρων $\tau(K_n^m \pm G)$, για την περίπτωσησ που το γράφημα G είναι (i) ένα πλήρες πολυμερές γράφημα, και (ii) ένα multi-star γράφημα.

Με βάση τα αποτελέσματά μας, θα ήταν ενδιαφέρον να θεωρήσει κανείς το πρόβλημα της απόδειξης τύπων για το πλήθος των σκελετικών δέντρων $\tau(K_n^m \pm G)$ στις περιπτώσεις που το γράφημα G ανήκει σε άλλες κλάσεις απλών γραφημάτων ή πολυγραφημάτων. Το παραθέτουμε ως ένα ανοιχτό πρόβλημα.

Το πρόβλημα της μεγιστοποίησης του πλήθους των σκελετικών δέντρων έχει επιλυθεί για αρκετές οικογένειες γραφημάτων της μορφής $K_n - G$, όπου το γράφημα G είναι ένα multi-star γράφημα, η ένωση μονοπατιών και κύκλων, κτλ. (δείτε [24, 41, 93, 99]). Έτσι, ένα ενδιαφέρον ανοιχτό πρόβλημα είναι της μεγιστοποίησης του πλήθους των σκελετικών δέντρων γραφημάτων της μορφής $K_n^m \pm G$.

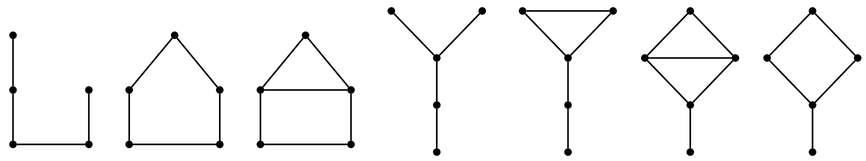
Κεφαλαιο 7

Πληρως Δυναμικος Αλγοριθμος Αναγνωρισης των P_4-sparse Γραφηματων

7.1 Introduction

Σε ένα δυναμικά μεταβαλλόμενο γράφημα πρέπει κανείς να διατηρήσει μια αναπαράσταση του γραφήματος μέσα από μια ακολουθία άμεσων μεταβολών (on-line modifications), δηλαδή εισαγωγές και διαγραφές κορυφών ή ακμών. Η αναπαράσταση πρέπει να επιτρέπει να απαντηθούν ερωτήσεις που απασχολούν συγκεκριμένες ιδιότητες του δυναμικού γραφήματος, για παράδειγμα, 'είναι συνεκτικό το γράφημα· '. Τέτοιου είδους αλγόριθμοι που ασχολούνται με αυτά τα προβλήματα ονομάζονται *δυναμικοί αλγόριθμοι* (dynamic algorithms) και κατηγοριοποιούνται ανάλογα με την διαδικασία μεταβολών που υποστηρίζουν. Ένας *αυξητικός* (αντίστ. *μειωτικός*) (incremental και αντίστ. decremental)) αλγόριθμος υποστηρίζει μόνο προσθήκη (αντίστ. αφαίρεση) κορυφών. Ένας μονο-προσθήκης (αντίστ. μόνο-αφαίρεσης) αλγόριθμος υποστηρίζει μόνο προσθήκη (αντίστ. αφαίρεση) ακμών. Ένας *μόνο-ακμές πλήρως δυναμικός αλγόριθμος* (edges-only fully dynamic algorithm) υποστηρίζει προσθήκες και διαγραφές ακμών. Ένας *πλήρως δυναμικός αλγόριθμος* (fully dynamic algorithm) υποστηρίζει τροποποιήσεις ακμών όπως επίσης και τροποποιήσεις κορυφών.

Αρκετοί ερευνητές μελέτησαν το πρόβλημα της δυναμικής αναγνώρισης για γραφήματα συγκεκριμένων οικογενειών. Αυξητικοί αλγόριθμοι αναγνώρισης έχουν προταθεί από τον Hsu [54] για interval γραφήματα και από τους Deng *et al.* [34] για συνεκτικά κατάλληλα interval γραφήματα. Ο Ibarra [56] έδωσε έναν μόνο-ακμές πλήρη δυναμικό αλγόριθμο αναγνώρισης για chordal γραφήματα που υποστηρίζει κάθε πράξη ακμής σε $O(n)$ χρόνο και έναν μόνο-ακμές πλήρη δυναμικό αλγόριθμο αναγνώρισης για διχοτομίσιμα (split) γραφήματα που υποστηρίζει κάθε πράξη ακμής



P_5 C_5 $\overline{P_5}$ F_1 F_2 $\overline{F_1}$ $\overline{F_2}$

Σχήμα 7.1: Τα επτά απαγορευμένα υπογραφήματα για την κλάση των P_4-sparse γραφημάτων.

σε $O(1)$ χρόνο. Πιο πρόσφατα, οι Hell *et al.* [50] έδωσαν έναν πλήρη δυναμικό αλγόριθμο για την αναγνώριση κατάλληλων interval γραφημάτων που δουλεύει σε $O(d + \log n)$ χρόνο για κάθε τροποποίηση του γραφήματος, όπου d είναι ο βαθμός μιας κορυφής στην περίπτωση τροποποίησης κορυφής. Οι Shamir και Sharan [101] σχεδίασαν έναν πλήρη δυναμικό αλγόριθμο για την αναγνώριση των cographs, threshold γραφημάτων και trivially perfect γραφημάτων που υποστηρίζει κάθε τροποποίηση ακμής σε $O(1)$ χρόνο και κάθε τροποποίηση κορυφής σε $O(d)$ χρόνο. Για την κλάση των P_4-sparse γραφημάτων, ένας αυξητικός αλγόριθμος για την αναγνώριση ενός P_4-sparse γραφήματος έχει προταθεί από τους Jamison και Olariu [61] που υποστηρίζει την εισαγωγή μιας κορυφής βαθμού d σε $O(d)$ χρόνο. Σε ένα διαφορετικό πρόβλημα, οι Henzinger και Fredman [51] απέδειξαν κάτω όρια για την πολυπλοκότητα της διατήρησης της πλήρης δυναμικής k-ακμών ή k-κορυφών συνεκτικότητας σε επίπεδα γραφήματα.

Πολλοί ερευνητές επίσης θεώρησαν το πρόβλημα της δυναμικής διατήρησης του md-δέντρου ενός δυναμικά μεταβαλλόμενου γραφήματος (το md-δέντρο ενός γραφήματος G είναι μοναδικό (ως προς τον ισομορφισμό) επιγραφόμενο δέντρο που αποθηκεύει όλες τις διαμερίσεις του συνόλου κορυφών ενός γραφήματος G σε αυτοτελείς-μονάδες και μπορεί να κατασκευαστεί σε χρόνο γραμμικό ως προς το μέγεθος του γραφήματος [30, 33, 80]). Για το πρόβλημα αυτό, μόνο δύο μερικά αποτελέσματα είναι γνωστά: οι Muller και Spinrad [83] έδωσαν έναν αυξητικό αλγόριθμο για την m-αποσύνθεση, που υποστηρίζει κάθε εισαγωγή κορυφής σε $O(n)$ χρόνο· οι Corneil *et al.* [29] έδωσαν έναν βέλτιστο αυξητικό αλγόριθμο για την αναγνώριση και την m-αποσύνθεση των cographs, που υποστηρίζει την εισαγωγή μιας κορυφής βαθμού d σε $O(d)$ χρόνο.

Η εργασία μας σε αυτό το κεφάλαιο επικεντρώνεται στα P_4-sparse γραφήματα· τα *P_4-sparse γραφήματα* ορίζονται ως τα γραφήματα εκείνα για τα οποία κάθε σύνολο πέντε κορυφών επάγει το πολύ ένα άχορδο μονοπάτι τεσσάρων κορυφών [52] (στο Σχήμα 7.1 παρουσιάζουμε τα επτά απαγορευμένα υπογραφήματα για την κλάση των P_4-sparse γραφημάτων). Τα γραφήματα αυτά είναι τέλεια και επίσης τέλεια διατάξιμα (perfectly orderable) perfectly orderable [52], και περιέχουν πολλές κλάσεις γραφημάτων, όπως είναι, τα cographs, τα P_4-reducible γραφληματα, κτλ. (δείτε [18, 61, 62]). Τα P_4-sparse γραφήματα έχουν μελετηθεί εκτεταμένα τα περασμένα χρόνια και βρίσκουν ένα πλήθος εφαρμογών στα εφαρμοσμένα μαθηματικά και στη επιστήμη της πληροφορικής (π.χ., επικοινωνίες, μεταφορικά μέσα, χρονοδρομολόγηση, θεωρία υπολογισμού) σε προβλήματα που σχετίζονται με γραφήματα που τα χαρακτηρίζει μια "τοπική πυκνότητα" ιδιότητα. Πράγματι, η δομή των P_4-sparse γραφημάτων ενσωματώνει μια τέτοια τοπική πυκνότητα αφού είναι εκείνα τα γραφήματα στα οποία είναι σχετικά απίθανο να βρεθούν περισσότερα από λίγα P_4· σημειώνουμε ότι πολλοί ερευνητές τείνουν να εξισώσουν την έννοια της τοπικής πυκνότητας με την απουσία των P_4 από ένα γράφημα.

Σε αυτό το κεφάλαιο, περιγράφουμε έναν πλήρη δυναμικό αλγόριθμο αναγνώρισης των P_4-sparse γραφημάτων στον οποίο οι εισαγωγές ακμών/κορυφών και οι διαγραφές τους εκτελούνται με την προϋπόθεση ότι το τροποποιημένο γράφημα είναι ένα P_4-sparse γράφημα. Ο αλγόριθμός μας διατηρεί το md-δέντρο του γραφήματος· ελέγχει πότε η αίτηση της ακμής/κορυφής μεταβολής επιφέρει ένα P_4-sparse γράφημα, και σε περίπτωση θετικής απάντησης, ενημερώνει κατάλληλα το md-δέντρο.

Κάθε πράξη ακμής υποστηρίζεται σε $O(1)$ χρόνο, ενώ κάθε πράξη κορυφής υποστηρίζεται σε $O(d)$ χρόνο για κάθε d-βαθμού κορυφής.

7.2 Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

Αυτή η εργασία ασχολείται και διερευνά δυναμικά προβλήματα αναγνώρισης στα οποία οι ερωτήσεις είναι της μορφής: 'το γράφημα ανήκει σε μια συγκεκριμένη κλάση Π· ', όπου Π είναι μια κλάση γραφημάτων. Ένας αλγόριθμος για το πρόβλημα είναι αναγκασμένος να διατηρεί μια αναπαράσταση του δυναμικού γραφήματος ενόσω το γράφημα ανήκει στην κλάση Π, και να εντοπίζει πότε το γράφημα παύει να ανήκει στην κλάση Π.

Πιο συγκεκριμένα, ένας πλήρως δυναμικός για μια Π-αναγνώριση διατηρεί μια δομή δεδομένων για το συγκεκριμένο γράφημα $G \in \Pi$ και υποστηρίζει τις ακόλουθες λειτουργίες.

- *προσθήκη-ακμής*(edge-insertion): δοθέντος δύο κορυφών $u, v \in V(G)$ που δεν είναι γειτονικές στο γράφημα G, ενημέρωσε την κατάλληλη δομή δεδομένων εάν το γράφημα $G \cup \{uv\} \in \Pi$, ειδάλλως εκτύπωσε *false*·

- *διαγραφή-ακμής*(edge-deletion): δοθέντος μιας ακμής $uv \in E(G)$, ενημέρωσε την κατάλληλη δομή δεδομένων εάν το γράφημα $G - \{uv\} \in \Pi$, ειδάλλως εκτύπωσε *false*·

- *προσθήκη-κορυφής*(vertex-insertion): δοθέντος μιας νέας κορυφής $v \notin V(G)$ που γειτνιάζει με 0, μερικές, ή όλες τις κορυφές του γραφήματος G, ενημέρωσε την κατάλληλη δομή δεδομένων εάν το γράφημα $G \cup v \in \Pi$, ειδάλλως εκτύπωσε *false*·

- *διαγραφή-κορυφής*(vertex-deletion): δοθέντος μιας κορυφής $v \in V(G)$, ενημέρωσε την κατάλληλη δομή δεδομένων εάν το γράφημα $G - v \in \Pi$, ειδάλλως εκτύπωσε *false*.

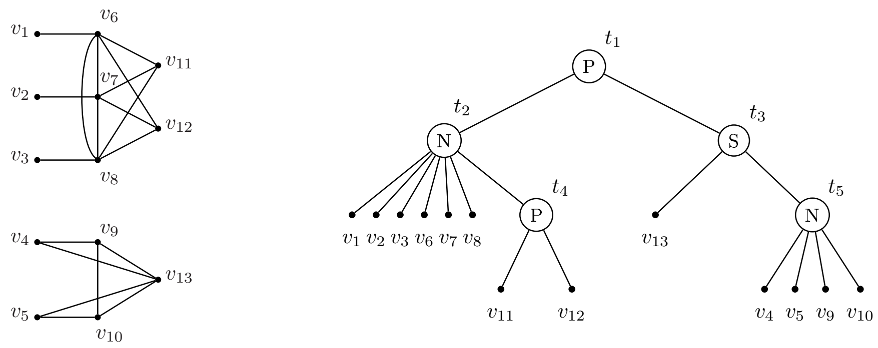
Μετά την εκτέλεση από οποιαδήποτε τέτοια λειτουργία, ο αλγόριθμος είναι έτοιμος να εκτελέσει την επόμενη λειτουργία. Προφανώς (δείτε επίσης [101]), η προσθήκη (διαγραφή) μιας κορυφής δεν ανάγεται στο πρόβλημα της προσθήκης (διαγραφής) των προσκείμενων, σε αυτής, ακμών. Έτσι, οι τροποποιήσεις κορυφών πρέπει να χειρίζονται ξεχωριστά από τις τροποποιήσεις ακμών από τον δυναμικό αλγόριθμο.

Μια κλάση γραφημάτων Π καλείται *αυτοσυμπληρωματική* (complement-invariant) εάν το $G \in \Pi$ επιφέρει $\overline{G} \in \Pi$. Σημειώνουμε ότι για τα P_4-sparse γραφήματα τα ακόλουθα ισχύουν:

Λήμμα 7.1. *Έστω ένα P_4-sparse γράφημα G. Τότε (i) το γράφημα G είναι αυτοσυμπληρωματικό (complement-invariant property), και (ii) για κάθε $v \in G$, $G' = G - v$ είναι ένα P_4-sparse γράφημα.*

7.2.1 m-Αποσύνθεση και P_4-sparse Γραφήματα

Ένα υποσύνολο M των κορυφών ενός γραφήματος G αναφέρεται ως *αυτοτελή-μονάδα* (module) του γραφήματος G, εάν κάθε κορυφή εκτός του συνόλου M είναι, είτε γειτονική σε όλες τις κορυφές του M, είτε σε καμία από αυτές. Το κενό σύνολο, τα μονοσύνολα και το σύνολο κορυφών V λέγονται *τετριμμένες* αυτοτελείς-μονάδες και όταν το γράφημα G έχει μόνο τετριμμένες αυτοτελείς-μονάδες τότε αναφέρεται ως *πρώτο γράφημα* (prime graph ή indecomposable). Μια μη-τετριμμένη αυτοτελή-μονάδα ονομάζεται επίσης και *ομογενές* σύνολο (homogeneous set). Επιπλέον, μια αυτοτελή-μονάδα M του γραφήματος G ονομάζεται *ισχυρή αυτοτελή-μονάδα* (strong module) εάν για κάθε μία αυτοτελή-μονάδα $M' \neq M$ του γραφήματος G, είτε ισχύει $M' \cap M = \emptyset$ είτε ισχύει $M' \subset M$.



Σχήμα 7.2: Ένα μη-συνεκτικό P_4-sparse γράφημα με 13 κορυφές και το md-δέντρο του.

Η m-αποσύνθεση (modular decomposition) ενός γραφήματος G αναπαρίσταται από ένα δέντρο $T(G)$ το οποίο ονομάζουμε *md-δένδρο* του γραφήματος G (modular decomposition tree)· τα φύλλα του δέντρου $T(G)$ είναι οι κορυφές του γραφήματος G ενώ κάθε εσωτερικός κόμβος t αντιστοιχεί σε μια ισχυρή αυτοτελή-μονάδα που συμβολίζεται $M(t)$ και επάγεται από το σύνολο των κορυφών/φύλλων του υποδέντρου με ρίζα τον t. Έτσι το δέντρο $T(G)$ αναπαριστά όλα τις ισχυρές αυτοτελείς-μονάδες του γραφήματος G. Κάθε εσωτερικός κόμβος επιγράφεται με P για *παράλληλη* αυτοτελή-μονάδα (parallel module), ή με S για *σειριακή* αυτοτελή-μονάδα (series module), ή με N για *γειτονική* αυτοτελή-μονάδα (neighborhood module). Η αυτοτελή-μονάδα που αντιστοιχεί σε έναν P-κόμβο επάγει ένα μη-συνδεδεμένο υπογράφημα του γραφήματος G, αυτή του S-κόμβου επάγει ένα συνδεδεμένο υπογράφημα του γραφήματος G που το συμπλήρωμά του είναι ένα μη-συνδεδεμένο υπογράφημα και αυτή του N-κόμβου επάγει ένα συνδεδεμένο υπογράφημα του γραφήματος G που το συμπλήρωμά του είναι επίσης ένα συνδεδεμένο υπογράφημα. Το Σχήμα 7.2 δείχνει ένα γράφημα και το md-δέντρο του.

Έστω t ένας εσωτερικός κόμβος του md-δέντρου $T(G)$. Εάν ο κόμβος t έχει παιδιά $t_1, t_2, \ldots, t_p$, τότε ορίζουμε το *αντιπροσωπευτικό γράφημα* $G(t)$ (representative graph) ως ακολούθως:

- $V(G(t)) = \{t_1, t_2, \ldots, t_p\}$, and
- $E(G(t)) = \{t_i t_j \mid v_i v_j \in E(G),\ v_i \in M(t_i) \text{ και } v_j \in M(t_j)\}$.

Σημειώνουμε ότι εξ' ορισμού της αυτοτελούς-μονάδας, εάν μια κορυφή της αυτοτελούς-μονάδας $M(t_i)$ είναι γειτονική με μια άλλη κορυφή της αυτοτελούς-μονάδας $M(t_j)$ τότε κάθε κορυφή της αυτοτελούς-μονάδας $M(t_i)$ είναι γειτονική με κάθε κορυφή της αυτοτελούς-μονάδας $M(t_j)$. Έτσι, το γράφημα $G(t)$ είναι ισόμορφο με το γράφημα που επάγεται από ένα υποσύνολο της αυτοτελής-μονάδας $M(t)$ συρρικνώνοντας σε μια κορυφή κάθε μέγιστη αυτοτελή-υπομονάδα της $M(t)$ στο δέντρο $T(G)$. Για τους P-, S-, και N-κόμβους, το ακόλουθο λήμμα ισχύει (δείτε επίσης [18, 40]):

Λήμμα 7.2. *Έστω G ένα γράφημα, $T(G)$ το md-δέντρο του, και t ένας εσωτερικός κόμβος του $T(G)$. Τότε,*

(M.i) το γράφημα $G(t)$ είναι ένα χωρίς-ακμές γράφημα εάν t είναι ένας P-κόμβος,

(M.ii) το γράφημα $G(t)$ είναι ένα πλήρες γράφημα εάν t είναι ένας S-κόμβος, και

(M.iii) το γράφημα $G(t)$ είναι ένα πρώτο γράφημα εάν t είναι ένας N-κόμβος.

Πιο συγκεκριμένα, για την κλάση των P_4-sparse γραφημάτων, οι Giakoumakis και Vanherpe [40] έδειξαν ότι:

Λήμμα 7.3. *Έστω G ένα γράφημα και έστω $T(G)$ το md-δέντρο του. Το γράφημα G είναι P_4-sparse εάν και μόνο εάν για κάθε N-κόμβο t του δέντρου $T(G)$, το γράφημα $G(t)$ είναι ένα αραχνοειδές γράφημα με διαμέριση (S, K, R) και καμία κορυφή του συνόλου $S \cup K$ δεν είναι εσωτερικός κόμβος στο δέντρο $T(G)$.*

7.3 Πλήρης-Δυναμικός Αλγόριθμος

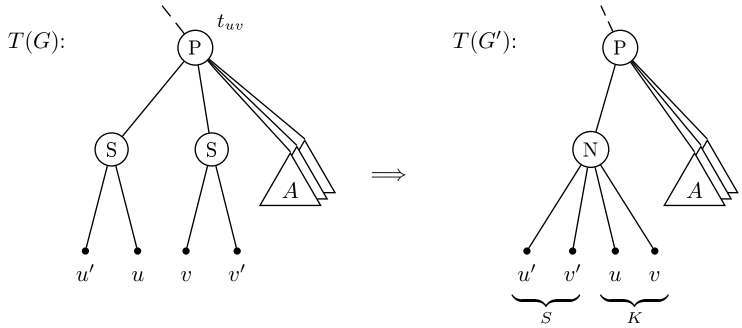
Όπως αναφέρθηκε, ο αλγόριθμός μας διατηρεί το md-δέντρο $T(G)$ του P_4-sparse γραφήματος. Με σκοπό την διευκόλυνση του προβλήματος, αποθηκεύουμε σε κάθε κόμβο του δέντρου $T(G)$ επιπρόσθετες πληροφορίες σταθερού μεγέθους για κάθε κόμβο. Πιο συγκεκριμένα, κάθε κόμβος αποθηκεύει τον τύπο του (P, S, ή N), το πλήθος των παιδιών του, έναν δείκτη για καθένα από τα παιδιά του, και βοηθητικά πεδία *counter* και *mark* αρχικοποιημένα στο 0. Επιπρόσθετα, κάθε N-κόμβος αποθηκεύει την περίπτωση που αντιστοιχεί σε ένα αραχνοειδές γράφημα εάν είναι αραιό ή πυκνό· το ανεξάρτητο σύνολο S και η κλίκα K του αραχνοειδές γραφήματος αποθηκεύονται σε ζευγάρια που αντιστοιχούν (μέσα από την συνάρτηση f) οι κορυφές, ενώ υπάρχει ένας ξεχωριστός δείκτης στο σύνολο R που είναι null εάν $R = \emptyset$ (δεν υπάρχει λόγος να αποθηκευτεί το μέγεθος $|S| = |K|$ αφού είναι ίσο με $\lfloor c/2 \rfloor$, όπου c είναι το πλήθος των παιδιών ενός N-κόμβου).

7.3.1 Πρόσθεση μιας Ακμής

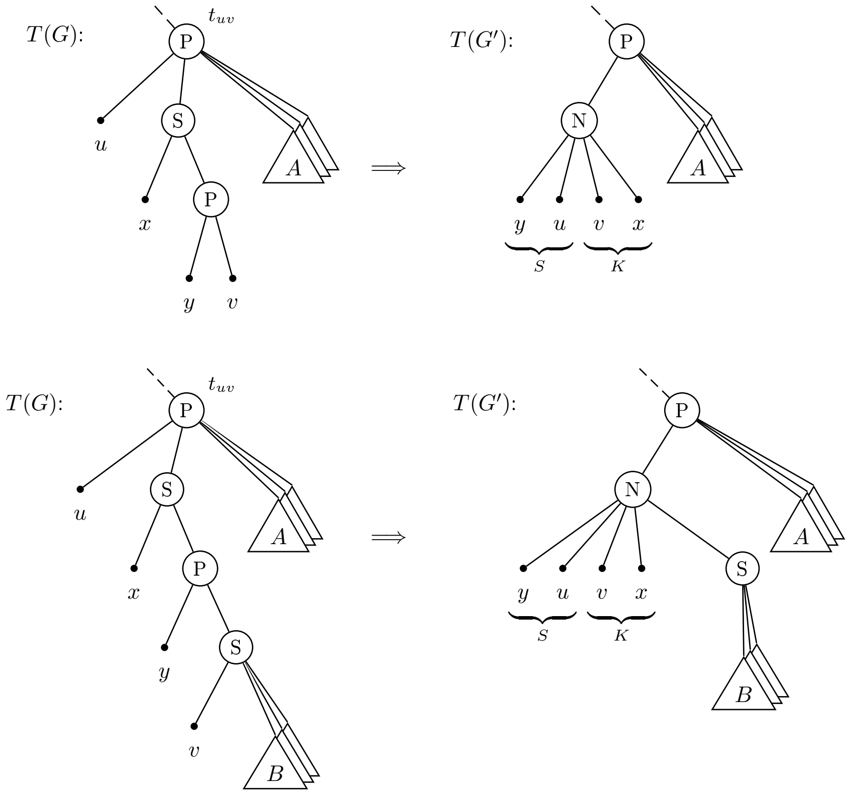
Έστω η ακμή uv που θα προστεθεί και έστω το τροποποιημένο γράφημα $G' = G \cup \{uv\}$. Για τις δύο κορυφές u, $v \in G$ συμβολίζουμε με t_{uv} τον ελάχιστο κοινό προκάτοχο των κορυφών u και v στο δέντρο $T(G)$. Εφόσον οι κορυφές u, v είναι μη-γειτονικές στο γράφημα G, ο κόμβος t_{uv} είναι είτε ένας P-κόμβος είτε ένας N-κόμβος. Έστω τα παιδιά t_u και t_v του κόμβου t_{uv} τέτοια ώστε τα σύνολα $M(t_u)$ και $M(t_v)$ περιέχουν τις κορυφές u και v αντίστοιχα. Σημειώστε ότι, εάν $|M(t_u)| = 1$ (αντίστ. $|M(t_v)| = 1$) τότε $t_u = u$ (αντίστ. $t_v = v$). Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι $|M(t_u)| \leq |M(t_v)|$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις όπου $|M(t)u)| \geq 2$, $|M(t_u)| = 1$ και t_{uv} είναι ένας P-κόμβος, και $|M(t_u)| = 1$ και t_{uv} είναι ένας N-κόμβος, και αποδεικνύουμε τα ακόλουθα λήμματα.

Λήμμα 7.4. *Έστω $|M(t_u)| \geq 2$. Τότε το γράφημα G' είναι ένα P_4-sparse γράφημα εάν και μόνο εάν ο κόμβος t_{uv} είναι ένας P-κόμβος και $|M(t_u)| = |M(t_v)| = 2$.*

Απόδειξη. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι ο κόμβος t_{uv} είναι ένας P-κόμβος· εάν ο κόμβος t_{uv} ήταν ένας N-κόμβος τότε $|M(t_u)| = 1$, εφόσον το πολύ ένα παιδί του κόμβου t_{uv} είναι ένας εσωτερικός κόμβος (όχι φύλλο) στο δέντρο $T(G)$ (δείτε Σχήμα 7.2). Τότε έπεται ότι τα υπογραφήματα $G[M(t_u)]$ και $G[M(t_v)]$ είναι και τα δύο συνεκτικά.



Σχήμα 7.3: Εικονογράφηση της περίπτωσης του Λήμματος 7.4 και οι ανάλογες ενημερώσεις στο md-δέντρο.



Σχήμα 7.4: Εικονογράφηση της περίπτωσης (ii) του Λήμματος 7.5 και οι ανάλογες ενημερώσεις στο md-δέντρο.

($\Longrightarrow$) Έστω ότι τουλάχιστον ένα από τα σύνολα $M(t_u), M(T_v)$ έχει 3 στοιχεία· χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω $|M(t_v)| \geq 3$. Η συνεκτικότητα των γραφημάτων $G[M(t_u)]$, $G[M(t_v)]$ επάγει ότι υπάρχουν κορυφές $u' \in M(t_u)$ και $v' \in M(t_v)$ τέτοιες ώστε $uu', vv' \in E(G)$. Τότε, προσθέτοντας την ακμή uv στο γράφημα G, το τελικό γράφημα G' περιέχει το P_4 $u'uvv'$. Εφόσον το γράφημα $G[M(t_v)]$ είναι συνεκτικό και $|M(t_v)| \geq 3$, υπάρχει μια κορυφή x στο $M(t_v)$ τέτοια ώστε η x βλέπει τουλάχιστον μια από τις κορυφές v, v'. Αλλά τότε, οι πέντε κορυφές u', u, v, v', x επάγουν στο γράφημα G' ένα από τα ακόλουθα γραφήματα: P_5, F_1, και F_2· επομένως, το γράφημα G' δεν είναι P_4-sparse.

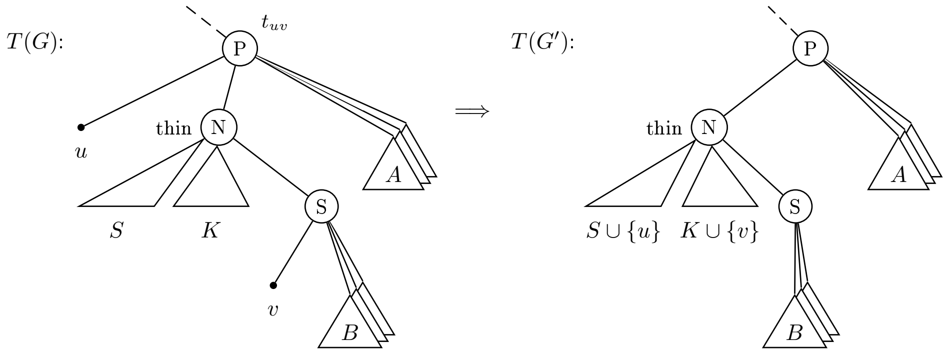
($\Longleftarrow$) Έστω τώρα ότι το γράφημα G' δεν είναι ένα P_4-sparse γράφημα. Τότε, υπάρχουν πέντε κορυφές στο γράφημα G' που επάγουν δύο P_4. Εφόσον το γράφημα G είναι ένα P_4-sparse γράφημα και ο κόμβος t_{uv} είναι ένας P-κόμβος, οι πέντε κορυφές ανήκουν στο $M(t_u) \cup M(t_v)$. Αλλά τότε, είτε $|M(t_u)| \geq 3$, είτε $|M(t_v)| \geq 3$. ∎

Λήμμα 7.5. *Έστω ο κόμβος t_{uv} να είναι ένας P-κόμβος και έστω $|M(t_u)| = 1$. Τότε, το γράφημα G' είναι ένα P_4-sparse γράφημα εάν και μόνο εάν μια από τις ακόλουθες (αμοιβαία αποκλειόμενες) περιπτώσεις ισχύει:*

(i) η κορυφή v βλέπει όλες τις κορυφές από το σύνολο $M(t_v)$·

(ii) η κορυφή v χάνει ακριβώς μια κορυφή $y \in M(t_v)$ τέτοια ώστε η κορυφή y βλέπει μόνο την κορυφή $x \in M(t_v)$, και μόνο η κορυφή x βλέπει κάθε κορυφή από το σύνολο $M(t_v)$·

(iii) η κορυφή v χάνει $\ell > 1$ κορυφές από το σύνολο $M(t_v)$ έτσι ώστε το γράφημα $G(t_v)$ να είναι ένα αραχνοειδές γράφημα (S, K, R) με $|S| = |K| = \ell$, $R = \{r\}$ και η κορυφή v ανήκει στο σύνολο $M(r)$ και βλέπει όλες τις κορυφές από το σύνολο $M(r)$.



Σχήμα 7.5: Εικονογράφηση της περίπτωσης (iii) του Λήμματος 7.5 και οι ανάλογες ενημερώσεις στο md-δέντρο.

Απόδειξη. Η απόδειξη του λήμματος βασίζεται στα ακόλουθα γεγονότα.

Γεγονός 7.1. *Έστω ο κόμβος t_{uv} ένας P-κόμβος, $|M(t_u)| = 1$, και έστω το μονοπάτι από την κορυφή t_v στην κορυφή $p(v)$ να μην περιέχει κανέναν N-κόμβο στο δέντρο $T(G)$. Εάν δεν υπάρχει καμία κορυφή $x \in M(t_v)$ έτσι ώστε η κορυφή x να βλέπει κάθε κορυφή από το σύνολο $M(t_v)$ τότε το γράφημα G' δεν είναι ένα P_4-sparse γράφημα.*

Απόδειξη. Εφόσον ο κόμβος t_{uv} είναι ένας P-κόμβος, το γράφημα $G[M(t_v)]$ είναι συνεκτικό. Επιπλέον, εφόσον δεν υπάρχει κανένας N-κόμβος στο μονοπάτι από τον κόμβο t_v στον κόμβο $p(v)$ στο δέντρο $T(G)$, η κορυφή v δεν συμμετέχει σε κανένα P_4 στο γράφημα $G[M(t_v)]$. Εάν δεν υπάρχει κορυφή $x \in M(t_v)$ τέτοια ώστε η κορυφή x να βλέπει κάθε κορυφή από το σύνολο $M(t_v)$ τότε θα δείξουμε ότι είτε η κορυφή v συμμετέχει σε ένα C_4 ή η κορυφή v βλέπει ακριβώς δύο κορυφές ενός K_3 στο γράφημα $G[M(t_v)]$.

Έστω, για αντίφαση, ότι δεν ισχύει αυτή η περίπτωση. Τότε, εφόσον η κορυφή v δεν συμμετέχει σε κανένα P_4 στο γράφημα $G[M(t_v)]$, το σύνολο κορυφών του γραφήματος $G[M(t_v)]$ είναι διαμερίσιμο σε τρία σύνολα A, B, και C, όπου $A = \{v\}$, το σύνολο B περιέχει τους γείτονες της κορυφής v, και το σύνολο κορυφών C περιέχει μια κορυφή, έστω, y, που χάνει την κορυφή v. Έστω μια κορυφή x που βρίσκεται στο σύνολο B έτσι ώστε η κορυφή y βλέπει την x. Τότε, η κορυφή y χάνει κάθε άλλη κορυφή από το σύνολο B· γιατί ειδάλλως, το γράφημα G' θα περιείχε είτε ένα $\overline{F_1}$, είτε ένα $\overline{F_2}$ ως ένα επαγώμενο υπογράφημα. Εφόσον η κορυφή v δεν συμμετέχει σε κανένα P_4, η κορυφή x βλέπει κάθε κορυφή του συνόλου B. Αλλά τότε, η x χάνει μια κορυφή από το σύνολο C, έστω, y'. Η κορυφή y' χάνει την y· ειδάλλως, η κορυφή v θα ήταν ένα άκρο του P_4 $vxyy'$. Έτσι, η κορυφή y' βλέπει μια κορυφή x' από το σύνολο B. Αλλά τότε, η v βλέπει τις μέσες-κορυφές και χάνει τα άκρα του P_4 $yxx'y'$ (σημειώστε ότι η κορυφή v είτε βλέπει ή χάνει ένα P_4 στο γράφημα $G[M(t_v)]$, αφού το μονοπάτι από τον κόμβο t_v στον κόμβο $p(v)$ δεν περιέχει κανένα N-κόμβο στο δέντρο $T(G)$).

Προσθέτοντας την ακμή uv στο γράφημα G, τα επαγώμενα υπογραφήματα $\overline{F_1}$ ή $\overline{F_2}$ εμφανίζονται στο γράφημα G', και, γι' αυτό, το γράφημα G' δεν είναι ένα P_4-sparse γράφημα. □

Γεγονός 7.2. *Έστω ο κόμβος t_{uv} να είναι ένας P-node, έστω $|M(t_u)| = 1$, και έστω το μονοπάτι από τον κόμβο t_v στον κόμβο $p(v)$ να μην περιέχει κανένα N-κόμβο στο δέντρο $T(G)$. Εάν η κορυφή v χάνει μια κορυφή y από το σύνολο $M(t_v)$ τότε το γράφημα G' είναι ένα P_4-sparse γράφημα εάν και μόνο εάν υπάρχει ακριβώς μια κορυφή $x \in M(t_v)$ τέτοια ώστε η x να βλέπει κάθε κορυφή από το σύνολο $M(t_v)$ και η κορυφή y να βλέπει μόνο την κορυφή x από το σύνολο $M(t_v)$.*

Απόδειξη. ($\Longrightarrow$) Έστω ότι υπάρχει μια ακόμα κορυφή $x' \neq x \in M(t_v)$ έτσι ώστε η x' να βλέπει κάθε κορυφή του συνόλου $M(t_v)$. Τότε, οι πέντε κορυφές u, v, x, y, και y' επάγουν στο γράφημα G' είτε το γράφημα $\overline{F_1}$ είτε το γράφημα $\overline{F_2}$. Έστω τώρα ότι υπάρχει ακριβώς μια κορυφή $x \in M(t_v)$ έτσι ώστε η x να βλέπει κάθε κορυφή του συνόλου $M(t_v)$, δηλαδή, η y να βλέπει την κορυφή x, και έστω η κορυφή y να βλέπει μια επιπλέον κορυφή, έστω, z, από το σύνολο $M(t_v)$. Τότε, οι πέντε κορυφές u, v, x, y, και z επάγουν στο γράφημα G' ένα από τα ακόλουθα γραφήματα: P_5, F_2, $\overline{F_1}$, και $\overline{F_2}$.

($\Longleftarrow$) Έστω τώρα ότι το γράφημα G' είναι ένα P_4-sparse γράφημα. Η κορυφή v χάνει μια κορυφή y από το σύνολο $M(t_v)$. Έστω ότι η κορυφή v χάνει επιπλέον μια κορυφή y' από το σύνολο $M(t_v)$. Από το Γεγονός 7.1 υπάρχει μια κορυφή $x \in M(t_v)$ που βλέπει τις κορυφές y, y' και v. Αλλά τότε, οι πέντε κορυφές u, v, x, y, και y' επάγουν είτε το γράφημα F_1 είτε το γράφημα F_2· άτοπο. Έτσι, η κορυφή v χάνει μόνο την κορυφή y από το σύνολο $M(t_v)$. Εφόσον το γράφημα $G[M(t_v)]$ είναι ένα συνεκτικό γράφημα και η κορυφή v βλέπει όλες τις κορυφές από το σύνολο $M(t_v) - \{y\}$, το σύνολο κορυφών του μπορεί να διαμεριστεί σε τρία σύνολα A, B, και C, όπου $A = \{v\}$, το σύνολο B περιέχει τους γείτονες της κορυφής v, και $C = \{y\}$. Θεωρούμε τις ακόλουθες περιπτώσεις: (i) υπάρχουν τουλάχιστον δύο κορυφές $x, x' \in M(t_v)$ έτσι ώστε να βλέπουν κάθε κορυφή από το σύνολο $M(t_v)$. Τότε, $x, x' \in B$ και, επομένως, οι πέντε κορυφές u, v, x, x', και y επάγουν στο γράφημα G' είτε το γράφημα $\overline{F_1}$ είτε το γράφημα $\overline{F_2}$. (ii) Η κορυφή y βλέπει τουλάχιστον δύο κορυφές z, z' από το σύνολο $M(t_v)$. Τότε, $z, z' \in B$ και, επομένως, οι πέντε κορυφές u, v, z, z', και y επάγουν στο γράφημα G' είτε το γράφημα $\overline{F_1}$ είτε το γράφημα $\overline{F_2}$. □

Έστω τώρα ότι το μονοπάτι από την κορυφή v στον κόμβο t_{uv} περιέχει τουλάχιστον έναν N-κόμβο t στο δέντρο $T(G)$. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, ο N-κόμβος t του δέντρου $T(G)$ επάγει ένα αντιπροσωπευτικό γράφημα $G(t)$ που είναι ένα αραχνοειδές γράφημα και (S, K, R) να είναι η διαμέρισή του. Σημειώστε ότι $v \in M(t)$ και επομένως, η κορυφή v ανήκει σε ένα από τα σύνολα S, ή K, ή, $M(r)$ όπου $R = \{r\}$.

Γεγονός 7.3. *Έστω t_{uv} ένας P-κόμβος, $|M(t_u)| = 1$, και έστω το μονοπάτι από τον κόμβο t_v στον κόμβο $p(v)$ περιέχει τουλάχιστον έναν N-κόμβο t στο δέντρο $T(G)$. Έστω (S, K, R) να είναι η διαμέριση του ένα αραχνοειδούς γραφήματος $G(t)$. Εάν $v \in S \cup K$ ή $v \in M(r)$ και η κορυφή v χάνει μια κορυφή από το σύνολο $M(r)$, τότε το γράφημα G' δεν είναι ένα P_4-sparse γράφημα.*

Απόδειξη. Έστω t να είναι ο πρώτος N-κόμβος στο μονοπάτι από τον κόμβο $p(v)$ στον t_v. Έστω ότι η κορυφή v ανήκει στο σύνολο S του αραχνοειδούς γραφήματος $G(t)$. Εφόσον $|S| = |K| \geq 2$, υπάρχει μια κορυφή $v' \in S$, $v' \neq v$. Προσθέτωντας την ακμή uv στο γράφημα G, το P_5 $uvf(v)f(v')v'$ εμφανίζεται στο G'. Έστω τώρα $v \in K$ και έστω let $v' \in K$, $v' \neq v$. Τότε, οι πέντε κορυφές $f^{-1}(v)$, v, v', $f^{-1}(v')$, και u επάγουν στο γράφημα G' το γράφημα F_1. Επομένως, στην περίπτωση που $v \in S \cup K$, το γράφημα G' δεν είναι ένα P_4-sparse.

Έστω ότι $v \in R$ και μια κορυφή $z \in M(r)$. Έστω $x \in S$ και $y \in K$ να είναι δύο κορυφές του αραχνοειδούς γραφήματος $G(t) = (S, K, R)$. Προσθέτοντας την ακμή uv στο γράφημα G, οι πέντε κορυφές u, v, x, y και z του γραφήματος G' επάγουν το γράφημα F_1 στο G'. □

Γεγονός 7.4. *Έστω ότι ο κόμβος t_{uv} είναι ένας P-κόμβος, έστω $|M(t_u)| = 1$, και έστω το μονοπάτι από τον κόμβο t_v στον $p(v)$ να περιέχει τουλάχιστον έναν N-κόμβο t στο δέντρο $T(G)$. Έστω (S, K, R) η διαμέριση του αραχνοειδούς γραφήματος $G(t)$ με $R = \{r\}$. Εάν, είτε το μονοπάτι από τον κόμβο t_v στον $p(v)$ περιέχει παραπάνω από έναν N-κόμβους ή $t \neq t_v$, τότε το γράφημα G' δεν είναι ένα P_4-sparse γράφημα.*

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει ακόμη ένας N-κόμβος, έστω, t', στο μονοπάτι και έστω (S', K', R') να είναι η διαμέριση του αραχνοειδούς γραφήματος $G(t')$ με $R' = \{r'\}$. Τότε, η κορυφή v χάνει τουλάχιστον μια κορυφή από το σύνολο $M(r')$ εάν $M(r) \subset M(r')$ ή μια κορυφή από το $M(r)$ εάν $M(r') \subset M(r)$. Επομένως, το G' δεν είναι ένα P_4-sparse γράφημα (δείτε Γεγονός 7.3). Έστω τώρα ότι $t \neq t_v$. Εφόσον t_{uv} είναι ένας P-κόμβος και $t \neq t_v$, έπεται ότι ο κόμβος t_v είναι ένας S-κόμβος (εάν t_v ήταν ένας N-κόμβος, τότε το μονοπάτι θα περιείχε δύο N-κόμβους). Τότε, τουλάχιστον μια κορυφή $z \in M(t_v)$ βλέπει όλες τις κορυφές του συνόλου $M(t)$. Έστω $x, y \in S$ οι δύο κορυφές του αραχνοειδούς γραφήματος $G(t)$. Προσθέτοντας την ακμή uv στο γράφημα G, οι πέντε κορυφές u, v, x, y και z του G' επάγουν το γράφημα F_1 στο G'. □

Γεγονός 7.5. *Έστω ο κόμβος t_{uv} να είναι ένας P-κόμβος, έστω $|M(t_u)| = 1$, και έστω ο κόμβος t_v να είναι ο N-κόμβος στο μονοπάτι από τον t_v στον $p(v)$ στο δέντρο $T(G)$. Έστω (S, K, R) η διαμέριση του αραχνοειδούς γραφήματος $G(t_v)$ με $R = \{r\}$. Εάν το γράφημα $G(t_v)$ είναι ένα πυκνό αραχνοειδές γράφημα, τότε το γράφημα G' δεν είναι ένα P_4-sparse γράφημα.*

Απόδειξη. Έστω $x_1, x_2 \in S$ και $y \in K$ τρεις κορυφές του πυκνού αραχνοειδούς γραφήματος $G(t_v)$ έτσι ώστε η y βλέπει και τις δυο κορυφές x_1 και x_2. Προσθέτοντας την ακμή uv στο γράφημα G, το τελικό γράφημα G' περιέχει το γράφημα F_1 ως ένα επαγώμενο υπογράφημα. □

Το Λήμμα 7.5 συνεπάγεται απ' ευθείας από τα Γεγονότα 7.1–7.5. ∎

Λήμμα 7.6. *Έστω ότι ο κόμβος t_{uv} είναι ένας N-κόμβος, (S, K, R) είναι η διαμέριση του αραχνοειδούς γραφήματος $G(t_{uv})$, και $|M(t_u)| = 1$. Τότε το γράφημα G' είναι ένα P_4-sparse γράφημα εάν και μόνο εάν είτε $S = \{u, v\}$ και $R = \emptyset$ ή $u \in S$, $v \in K$, και το γράφημα $G(t_{uv})$ είναι ένα πυκνό αραχνοειδές γράφημα.*

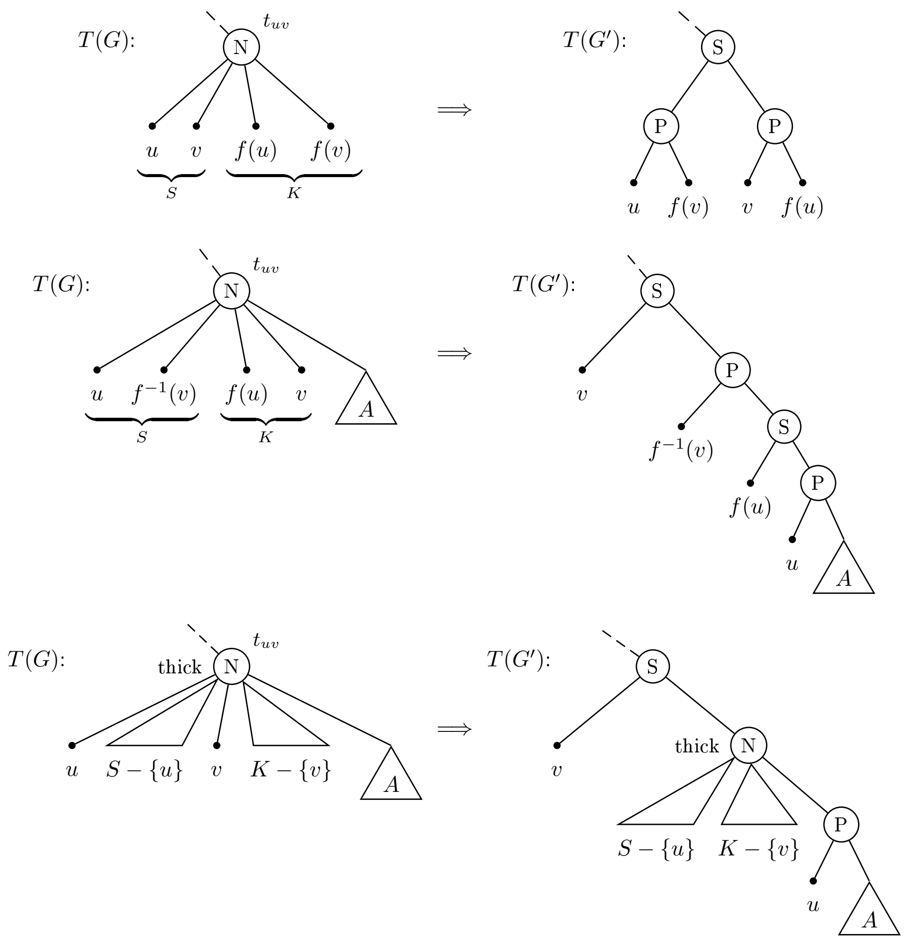
Απόδειξη. Έστω $R = \{r\}$. Εξ' ορισμού του αραχνοειδούς γραφήματος έχουμε να θεωρήσουμε τις περιπτώσεις για τις κορυφές u, v να ανήκουν στο σύνολο S και $M(r)$, και οι δύο στο S, και στο S και στο K. Έστω τώρα $u \in S$ και $v \in M(r)$, και έστω $x \in S - \{u\}$. Εάν $z, z' \in K$ είνα κορυφές έτσι ώστε $uzz'x$ είναι ένα P_4 στο γράφημα $G(t_{uv})$ (και στο G), τότε οι κορυφές u, v, z, z, z' επάγουν ένα $\overline{F_1}$ στο G', και γι'αυτό δεν είναι P_4-sparse.

Τώρα υποθέστε ότι $u, v \in S$ και έστω u' και v' να ανήκουν στο σύνολο K έτσι ώστε $uu'v'v$ να είναι ένα P_4 του γραφήματος G· τότε, το γράφημα G' περιέχει ένα C_4 $uu'v'v$. Έστω τώρα ότι $R \neq \emptyset$ και έστω $R = \{r\}$ να είναι ένας κόμβος (εσωτερικός ή φύλλο) του δέντρου $T(G)$. Τότε, το γράφημα G' περιέχει ένα $\overline{P_5}$ (δηλαδή, ένα house). Επομένως, $R = \emptyset$. Εάν $|S| = |K| > 2$, τότε αν το αραχνοειδές γράφημα είναι αραιό, οι κορυφές u, v, u', v', y, όπου $y \in K - \{u', v'\}$ επάγει ένα $\overline{P_5}$, ενώ αν το του αραχνοειδές γράφημα είναι πυκνό, οι κορυφές u, v, u', v', z, όπου $z \in S - \{u, v\}$ επάγουν ένα $\overline{P_5}$.

Τελικά, υποθέστε ότι $u \in S$, η κορυφή $v \in K$ και το γράφημα $G(t_{uv})$ είναι ένα αραιό αραχνοειδές γράφημα έτσι ώστε $|S| > 2$ (σημειώστε ότι τα αραχνοειδή γραφήματα με $|S| = 2$ θεωρούνται επίσης πυκνά). Τότε, $v \neq f(u)$. Θεωρούμε μια κορυφή $z \in K$ έτσι ώστε $z \neq v$ και $z \neq f(u)$. Τότε, το γράφημα G' περιέχει το γράφημα F_2 ως ένα επαγώμενο υπογράφημα. ∎

Τα Λήμματα 7.4–7.6 και τα Σχήματα 7.3–7.6 δείχνουν ότι ο έλεγχος των περιπτώσεων μέσα στα λήμματα απαιτεί να ανέβει κανείς από τις κορυφές v, u στο δέντρο $T(G)$ το πολύ 4 επίπεδα που μπορεί να επιτευχθεί σε $O(1)$ χρόνο χρησιμοποιώντας τους δείκτες για τον πατέρα σε κάθε κόμβο. Επιπρόσθετα, δεν είναι δύσκολο να δει κανείς ότι η ενημέρωση του md-δέντρου μπορεί να γίνει σε $O(1)$ χρόνο. Έτσι, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 7.1. *Υπάρχει ένας βέλτιστος μόνο-προσθήκης αλγόριθμος αναγνώρισης για τα P_4-sparse γραφήματα και διατήρησης των md-δέντρων τους, που υποστηρίζει κάθε εισαγωγή ακμής σε $O(1)$ χρόνο.*



Σχήμα 7.6: Εικονογράφηση των περιπτώσεων του Λήμματος 7.6 και οι ανάλογες ενημερώσεις στο md-δέντρο.

7.3.2 Αφαίρεση μιας Ακμής

Στην εργασία [101] το ακόλουθο θεώρημα έχει αποδειχτεί.

Θεώρημα 7.2 (Shamir και Sharan [101]). *Έστω Π μια αυτοσυμπληρωματική κλάση γραφημάτων. Έστω Alg ένας δυναμικός αλγόριθμος για Π-αναγνώριση, που υποστηρίζει είτε προσθήκες ακμών μόνο είτε διαγραφές ακμών μόνο, και βασίζεται στην m-αποσύνθεση. Τότε ο αλγόριθμος Alg μπορεί να επεκταθεί για να υποστηρίζει και τις δύο πράξεις με την ίδια πολυπλοκότητα χρόνου.*

Εφόσον τα P_4-sparse γραφήματα είναι αυτοσυμπληρωματικά (δείτε Λήμμα 7.1), το Θεώρημα 7.1 επιφέρει και το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 7.3. *Υπάρχει ένας βέλτιστος μόνο-ακμές πλήρως δυναμικός αλγόριθμος αναγνώρισης για τα P_4-sparse γραφήματα και διατήρησης του md-δέντρου τους, που υποστηρίζει κάθε τροποποίηση ακμής σε $O(1)$ χρόνο.*

7.3.3 Εισαγωγή μιας Κορυφής

Έστω ένα P_4-sparse γράφημα G και μια κορυφή $x \notin V(G)$ που είναι γειτονική με 0, με μερικές, ή με όλες τις κορυφές του $V(G)$. Σε αυτήν την ενότητα δείχνουμε πώς να αναγνωρίσουμε εάν το γράφημα G' με σύνολο κορυφών $V(G) \cup \{x\}$ είναι ένα P_4-sparse γράφημα, και εάν είναι, δείχνουμε πως θα αποκτήσουμε το md-δέντρο $T(G')$ του γραφήματος G' από το md-δέντρο $T(G)$ σε $O(d)$ χρόνο, όπου d είναι το πλήθος των κορυφών του γραφήματος G που είναι γειτονικές με την κορυφή x. Αξίζει να σημειωθεί ότι στην εργασία [61] ένας αυξητικός αλγόριθμος $O(d)$-χρόνου παρουσιάστηκε για το πρόβλημα αυτό· ο αλγόριθμος όμως βασίζεται σε δύο δομές δεδομένων, έναν πίνακα και ένα cotree (δηλαδή, ένα md-δέντρο με μόνο P- και S-κόμβος), και γι' αυτό δεν μπορούμε εύκολα να βασιστούμε πάνω του. Επιπρόσθετα, στην εργασία [83] ένας αυξητικός αλγόριθμος για την κατασκευή του md-δέντρου ενός γραφήματος έχει δοθεί, που απαιτεί $O(V(G))$ χρόνο για να προσθέσει μια κορυφή στο γράφημα G· έτσι, $O(V(G))$ είναι ένα άνω όριο για την προσθήκη μιας κορυφής x.

Ας κατηγοριοποιήσουμε τους εσωτερικούς κόμβους του δέντρου $T(G)$ ως προς την κορυφή x στις ακόλουθες τρεις κατηγορίες: ένας εσωτερικός κόμβος t είναι

x-πλήρη-γειτονικός (x-fully-adjacent),

x-μερικώς-γειτονικός (x-partly-adjacent),

x-μη-γειτονικός (x-non-adjacent)

εάν και μόνο εάν η κορυφή x είναι γειτονική σε όλες, μόνο σε μερικές, και σε καμία, αντίστοιχα, των κορυφών στην αυτοτελή-μονάδα $M(t)$. Η παραπάνω κατηγοριοποίηση επεκτείνεται στα φύλλα-κόμβους: ένα φύλλο-κόμβος a είναι *x-πλήρη-γειτονικός* ή *x-μη-γειτονικός* εάν και μόνο εάν το φύλλο a είναι γειτονικό ή μη-γειτονικό αντίστοιχα στην κορυφή x. Για το πλήθος των x-πλήρη-γειτονικών κόμβων του δέντρου $T(G)$, μπορούμε να δείξουμε την ακόλουθη παρατήρηση:

Παρατήρηση 7.1. *Το πλήθος των x-πλήρη-γειτονικών κόμβων του δέντρου $T(G)$ είναι μικρότερο από $d-1$, όπου d το πλήθος των κορυφών στο γράφημα G που είναι γειτονικές με την κορυφή x.*

Απόδειξη. Οι x-πλήρη-γειτονικοί κόμβοι σχηματίζουν ένα δάσος από υποδέντρα του $T(G)$ στα οποία ο συνολικός αριθμός των φύλλων είναι d. Η παρατήρηση έπεται από το γεγονός ότι κάθε εσωτερικός κόμβος στο δέντρο $T(G)$ και σε αυτά τα υποδέντρα έχουν τουλάχιστον δύο παιδιά. ∎

Από την άλλη, για τους x-μερικώς-γειτονικούς κόμβους, είναι σημαντικό να επισημάνουμε ότι:

P1: εάν ένας εσωτερικός κόμβος t του md-δέντρου $T(G)$ είναι x-μερικώς-γειτονικός, τότε όλοι οι πρόγονοί του στο δέντρο $T(G)$ είναι x-μερικώς-γειτονικοί·

P2: για κάθε x-μερικώς-γειτονικό P-κόμβο t_P του δέντρου $T(G)$, το υπογράφημα του G που επάγεται από την αυτοτελή-μονάδα $M(t_P)$ περιέχει δυο μη-γειτονικές κορυφές a, b έτσι ώστε η κορυφή a είναι γειτονική και η κορυφή b είναι μη γειτονική με την κορυφή x·

P3: για κάθε x-μερικώς-γειτονικό S-κόμβο t_S του δέντρου $T(G)$, το υπογράφημα του G που επάγεται από την αυτοτελή-μονάδα $M(t_S)$ περιέχει μια ακμή ab έτσι ώστε η κορυφή a είναι γειτονική και η κορυφή b είναι μη γειτονική με την x·

P4: για κάθε x-μερικώς-γειτονικό N-κόμβο t_N του δέντρου $T(G)$, το υπογράφημα του G που επάγεται από την αυτοτελή-μονάδα $M(t_N)$ περιέχει και μια ακμή ab έτσι ώστε η κορυφή a είναι γειτονική και η κορυφή b είναι μη γειτονική με την x αλλά και ένα ζεύγος από μη-γειτονικές κορυφές a', b' έτσι ώστε η κορυφή a' είναι γειτονική και η κορυφή b' είναι μη γειτονική με την κορυφή x.

Οι ιδιότητες P2-P4 έπονται από το γεγονός ότι η αυτοτελή-μονάδα ενός S-κόμβου επάγει ένα συνεκτικό γράφημα, η αυτοτελή-μονάδα ενός P-κόμβου επάγει ένα γράφημα που το συμπλήρωμά του είναι συνεκτικό, και η αυτοτελή-μονάδα ενός N-κόμβου επάγει ένα γράφημα που είναι συνεκτικό και το συμπλήρωμά του είναι επίσης συνεκτικό. Επιπρόσθετα:

Λήμμα 7.7. *Για κάθε δυο x-μερικώς-γειτονικούς κόμβους του δέντρου $T(G)$, το γράφημα G' είναι P_4-sparse μόνο εάν ένας από αυτούς είναι ο πρόγονος του άλλου.*

Απόδειξη. Υποθέστε ότι το δέντρο $T(G)$ περιέχει δυο x-μερικώς-γειτονικούς κόμβους t, t' έτσι ώστε κανένας να μην είναι ο πρόγονος του άλλου. Τότε, t, t' είναι οι εσωτερικοί κόμβοι του δέντρου $T(G)$ και έστω ο κόμβος t_i να είναι ο ελάχιστος κοινός προκάτοχος των t, t', και t_j και t_k να είναι παιδιά του κόμβου t_i που είναι απόγονοι των t και t' αντίστοιχα. Επομένως, από την ιδιότητα P1, οι κόμβοι t_j και t_k είναι x-μερικώς-γειτονικοί κόμβοι. Επιπρόσθετα, ο κόμβος t_i είναι είτε ένας P-κόμβος είτε ένας S-κόμβος (υπενθυμίζουμε ότι το πολύ ένα παιδί ενός N-κόμβου είναι ένας εσωτερικός κόμβος). Έτσι, διακρίνουμε τις ακόλουθες δύο περιπτώσεις:

- *ο κόμβος t_i είναι ένας P-κόμβος*: Τότε, οι t_j, t_k είναι είτε S- είτε N-κόμβοι· σε οποιαδήποτε περίπτωση, υπάρχουν οι κορυφές $a_j, b_j \in M(t_j)$ και $a_k, b_k \in M(t_k)$ έτσι ώστε οι a_j, b_j είναι γειτονικές και οι a_k, b_k είναι γειτονικές (δείτε τις ιδιότητες P3, P4). Αλλά τότε, το γράφημα G' θα περιέχει το P_5 $b_j a_j x a_k b_k$, και επομένως δεν θα είναι P_4-sparse.

- *ο κόμβος t_i είναι ένας S-κόμβος*: Η περίπτωση είναι συμμετρική με τη προηγούμενη. Οι κόμβοιt_j, t_k είναι είτε P- είτε N-κόμβοι· σε οποιαδήποτε περίπτωση, υπάρχουν οι κορυφές $a_j, b_j \in M(t_j)$ και $a_k, b_k \in M(t_k)$ έτσι ώστε a_j, b_j είναι μη-γειτονικές και a_k, b_k είναι μη-γειτονικές (δείτε τις ιδιότητες P2, P4). Αλλά τότε, το γράφημα G' δεν θα είναι P_4-sparse καθώς θα περιέχει ένα $\overline{P}_5$ επαγώμενο από τις κορυφές a_j, b_j, x, a_k, b_k. ∎

Έστω $\rho_x = t_0 t_1 \cdots t_k$ να συμβολίζει το μονοπάτι στο δέντρο $T(G)$ που περιέχει όλους του x-μερικώς-γειτονικούς κόμβους (Λήμμα 7.7) όπου ο κόμβος t_0 είναι η ρίζα του δέντρου $T(G)$ και t_k είναι ο x-μερικώς-γειτονικός κόμβος που βρίσκεται πιο μακριά από την ρίζα. Τότε, το Λήμμα 7.7 επάγει ότι για κάθε κόμβο t_i, $0 \leq i < k$, καθένα από τα παιδιά του t_i, εκτός από τον κόμβο t_{i+1}, είναι είτε x-πλήρη-γειτονικά ή x-μη-γειτονικά· σημειώστε ότι ο ορισμός του κόμβου t_k επάγει ότι καθένα από τα παιδιά του t_k είναι είτε x-πλήρη-γειτονικά ή x-μη-γειτονικά και υπάρχει τουλάχιστον ένα παιδί κάθε τέτοιου τύπου. Επίσης, για τους x-μερικώς-γειτονικούς N-κόμβους, ισχύει το ακόλουθο:

Λήμμα 7.8. *Έστω t ένας x-μερικώς-γειτονικός N-κόμβος του δέντρου $T(G)$ που η αντίστοιχη διαμέριση του αραχνοειδούς γραφήματος της αυτοτελούς-μονάδας $M(t)$ είναι (S, K, R), και έστω ότι η κορυφή x είναι γειτονική με μια κορυφή στο σύνολο $S \cup K$. Τότε, το γράφημα G' είναι P_4-sparse μόνο εάν η κορυφή x είναι γειτονική με όλο το σύνολο $S \cup K$, ή είναι γειτονική με το σύνολο K και μη γειτονική με το σύνολο S.*

Απόδειξη. Πρώτα, υποθέστε ότι η κορυφή x δεν βλέπει το S αλλά βλέπει κάποιες κορυφές $k_i \in K$. Τότε, η κορυφή x βλέπει κάθε κορυφή $k_j \in K$, ειδάλλως οι κορυφές x, k_i, k_j, s, s' επάγουν ένα F_1, όπου $s k_i k_j s'$ είναι το μοναδικό P_4 του αραχνοειδούς γραφήματος που έχει $k_i k_j$ ως ακμή.

Υποθέστε τώρα ότι η κορυφή x βλέπει κάποιες $s_i \in S$. Τότε, η x βλέπει κάθε $s_j \in S$, ειδάλλως οι κορυφές x, k, k', s_i, s_j επάγουν ένα $\overline{F_1}$ εάν η κορυφή x είναι γειτονική και με τις δύο κορυφές k, k', ή με ένα P_5 εάν η κορυφή x δεν είναι γειτονική ούτε με την κορυφή k, ούτε και με την k' (σημειώστε ότι με βάση το αποτέλεσμά μας για το σύνολο K, δεν χρειάζεται να θεωρήσουμε την περίπτωση όπου η κορυφή x είναι γειτονική με ακριβώς μια κορυφή από τις k, k'), όπου $s_i k k' s_j$ είναι το (μοναδικό) P_4 του αραχνοειδούς γραφήματος με τις κορυφές s_i, s_j στο σύνολο κορυφών της. Επομένως, η κορυφή x βλέπει όλο το σύνολο S. Τότε, η κορυφή x βλέπει όλο το σύνολο K επίσης. Εάν η x χάνει κάποια κορυφή $k_i \in K$ τότε θα χάνει ολόκληρο το σύνολο K· τότε, από το αποτέλεσμά μας για το σύνολο K, οι κορυφές x, k_i, k_j, s, s' θα επάγουν ένα C_5, όπου $s k_i k_j s'$ είναι το (μοναδικό) P_4 του αραχνοειδούς γραφήματος που έχει την ακμή $k_i k_j$. ∎

Ας θεωρήσουμε την διαμέριση του συνόλου κορυφών $M(t_0) - M(t_k) \subset V(G)$ στα ακόλουθα τέσσερα σύνολα:

$$
\begin{aligned}
V_P &= \bigcup_{t_i \text{ είναι ένας P-κόμβος}} \left(M(t_i) - M(t_{i+1})\right), \\
V_S &= \bigcup_{t_i \text{ είναι ένας S-κόμβος}} \left(M(t_i) - M(t_{i+1})\right), \\
V_{N_S} &= \bigcup_{t_i \text{ είναι ένας N-κόμβος}} S(t_i), \\
V_{N_K} &= \bigcup_{t_i \text{ είναι ένας N-κόμβος}} K(t_i),
\end{aligned}
$$

όπου για έναν N-κόμβο t_i, τα $S(t_i)$ και $K(t_i)$ είναι τα ανεξάρτητα σύνολα και η κλίκα του αραχνοειδούς γραφήματος που επάγεται από την αυτοτελή-μονάδα $M(t_i)$. Τότε, κάθε κορυφή από το σύνολο V_P (αντίστ. V_S) είναι μη-γειτονική (αντιστ. γειτονική) με τις κορυφές της αυτοτελούς-μονάδας $M(t_k)$ εφόσον ο ελάχιστος κοινός προκάτοχος t_i στο δέντρο $T(G)$ είναι ένας P-κόμβος (αντίστ. S-κόμβος), ενώ οι δομικές ιδιότητες του αραχνοειδούς γραφήματος υπονοούν ότι κάθε κορυφή από το σύνολο $K(t_j)$ (αντίστ. $S(t_j)$) για έναν N-κόμβο t_j είναι γειτονική (αντιστ. μη-γειτονική) με τις κορυφές της αυτοτελούς-μονάδας $M(t_k)$.

Η προσθήκη-κορυφών διαδικασία μας βασίζεται στα ακόλουθα λήμματα:

Λήμμα 7.9. *Έστω ότι οι x-μερικώς-γειτονικοί κόμβοι του md-δέντρου $T(G)$ βρίσκονται σε ένα μονοπάτι $t_0 t_1 \cdots t_k$, όπου t_k είναι ο x-μερικώς-γειτονικός κόμβος που βρίσκεται πιο μακριά από την ρίζα t_0 του δέντρου $T(G)$. Εάν ο κόμβος t_k είναι ένας P-κόμβος τότε το γράφημα G' είναι ένα P_4-sparse εάν και μόνο εάν μια από τα τέσσερις ακόλουθες (αμοιβαία αποκλειόμενες) περιπτώσεις ισχύει:*

(i) Η κορυφή x βλέπει το V_S και το V_{N_K}, και χάνει το V_P και το V_{N_S}.

(ii) Η κορυφή x βλεπει τα V_S, V_{N_K}, και ακριβώς μια κορυφή, έστω y, του V_P, και χάνει το V_{N_S} όπου

(ii.1) η κορυφή y είναι ένα παιδί του κόμβου t_{k-2} (που είναι ένας P-κόμβος),

(ii.2) ο κόμβος t_{k-1} είναι ένας S-κόμβος με δύο παιδιά, τον κόμβο t_k και την κορυφή, έστω, u (που είναι γειτονική με την x), και

(ii.3) η κορυφή x βλέπει όλες τις κορυφές της αυτοτελούς-μονάδας $M(t_k)$ εκτός από μια μοναδική κορυφή, έστω, b, που είναι ένα παιδί του t_k.

(iii) Η κορυφή x βλέπει το V_{N_K}, ολόκληρο εκτός από μια κορυφή, έστω, z, του V_S, και χάνει τα V_P και V_{N_S} όπου

(iii.1) η κορυφή z είναι ένα παιδί του κόμβου t_{k-1} (που είναι ένας S-κόμβος), και

(iii.2) ο κόμβος t_k έχει δύο παιδιά a, b, που είναι φύλλα έτσι ώστε η a, που είναι γειτονική με την b, είναι μη-γειτονική με την x.

(iv) Ο κόμβος t_{k-1} είναι ένας N-κόμβος που αντιστοιχεί σε ένα πυκνό αραχνοειδές γράφημα με ανεξάρτητο σύνολο $S(t_{k-1})$, η κορυφή x βλέπει τα V_S, V_{N_K}, $S(t_{k-1})$, και όλες εκτός από μια κορυφή, έστω, b, στην αυτοτελή-μονάδα $M(t_k)$, και χάνει τα V_P και $V_{N_S} - S(t_{k-1})$.

Απόδειξη. Δεν είναι δύσκολο να δει κανείς ότι το γράφημα G' είναι P_4-sparse εάν η περίπτωση (i) του λήμματος ισχύει: στο md-δέντρο του γραφήματος G', η κορυφή x και τα x-πλήρη-γειτονικά παιδιά του κόμβου t_k στο δέντρο $T(G)$ είναι παιδιά ενός S-κόμβου που είναι παιδί του t_k. Για τις υπόλοιπες περιπτώσεις, το Σχήμα 7.7 δείχνει το md-δέντρο $T(G')$ (είναι εύκολο να ελέγξει τις αντίστοιχες γειτνιάσεις), που επιβεβαιώνουν ότι το γράφημα G' είναι P_4-sparse και σε αυτές επίσης. Έτσι, χρειάζεται να δείξουμε ότι εάν το G' είναι P_4-sparse ακριβώς μια από τις περιπτώσεις (i)–(iv) ισχύει.

Εφόσον ο κόμβος t_k είναι ένας x-μερικώς-γειτονικός P-κόμβος τότε από την ιδιότητα P2 υπάρχουν ακριβώς δυο κορυφές $a, b \in M(t_k)$ που είναι μη-γειτονικές στο γράφημα G και έτσι ώστε η x είναι γειτονική με την a και μη-γειτονική με την b (στο Σχήμα 7.7, το A δηλώνει όλα τα υποδέντρα με ρίζα τα παιδιά του κόμβου t_k που είναι x-πλήρη-γειτονικά).

Πρώτα, σημειώνουμε ότι, για να είναι το G' ένα P_4-sparse:

A1: *η x πρέπει να είναι γειτονική με όλες εκτός από μια κορυφή στο $V_S \cup V_{N_K}$:* εάν η x δεν ήταν γειτονική με τις κορυφές $y, y' \in V_S \cup V_{N_K}$, τότε οι κορυφές x, a, b, y, y' επάγουν στο G' είτε το $\overline{F}_1$ είτε το $\overline{F}_2$ (δείτε Σχήμα 7.1) που εξαρτάται από το πότε οι κορυφές y, y' είναι γειτονικές ή όχι, και έτσι το G' δεν θα ήταν P_4-sparse. Επιπρόσθετα, το Λήμμα 7.8 και το γεγονός ότι η κλίκα του αραχνοειδούς γραφήματος έχει πληθικότητα τουλάχιστον 2, που επάγει ότι η x βλέπει ολόκληρο το V_{N_K}· έτσι, εάν η x δεν βλέπει μια κορυφή $y \in V_S \cup V_{N_K}$, τότε $y \in V_S$.

A2: *η κορυφή x πρέπει να είναι γειτονική με το πολύ μια κορυφή του V_P:* υποθέστε ότι η x ήταν γειτονική με τις κορυφές $z, z' \in V_P$· εφόσον ο πατέρας του t_k είναι είτε ένας S- είτε ένας N-κόμβος, θα υπάρχει μια κορυφή y που είναι γειτονική με τις a, b και μη-γειτονική με τις z, z'· τότε, εάν η y είναι γειτονική με την x, οι κορυφές x, y, b, z, z' επάγουν ένα F_1, ενώ εάν η κορυφή y είναι μη-γειτονική με την x, οι κορυφές x, y, a, b, z επάγουν ένα P_5.

A3: *η κορυφή x πρέπει να χάνει όλα τα ανεξάρτητα σύνολα από όλους τους N-κόμβους στο υπομονοπάτι $t_0 t_1 \cdots t_{k-2}$:* υποθέστε ότι η κορυφή x ήταν γειτονική με μια κορυφή z που ανήκει στο ανεξάρτητο σύνολο $S(t_i)$ του αραχνοειδούς γραφήματος που σχετίζεται με τον κόμβο t_i $(0 \leq i \leq k-2)$· τότε, υπάρχει μια κορυφή $k \in K(t_i)$ τέτοια ώστε η κορυφή k να είναι γειτονική με την z, και αφού η x βλέπει το V_{N_K}, η k είναι γειτονική με την x επίσης· επιπλέον, άσχετα με το εάν ο κόμβος t_{k-1} είναι ένας S- ή ένας N-κόμβος, υπάρχει μια κορυφή $u \in M(t_{k-1}) - M(t_k)$ τέτοια ώστε η u είναι γειτονική και στις δύο κορυφές a, b· τότε, εάν η x είναι γειτονική με την u, οι κορυφές x, z, k, u, b επάγουν ένα $\overline{F}_1$, ειδάλλως, οι κορυφές x, z, k, u, a επάγουν ένα $\overline{P}_5$.

Από τις ιδιότητες A1–A3, έπεται ότι εάν ο κόμβος t_k είναι η ρίζα του δέντρου $T(G)$, ή εάν η x βλέπει το V_S και χάνει το V_P και ο κόμβος t_{k-1} δεν είναι ένας N-κόμβος, τότε εφαρμόζεται η περίπτωση (i). Υποθέστε στην συνέχεια ότι ο κόμβος t_k δεν είναι η ρίζα και ότι η κορυφή x βλέπει την $y \in V_P$, ή χάνει την $z \in V_S$, ή ο κόμβος t_{k-1} είναι ένας N-κόμβος, και ότι το γράφημα G' είναι P_4-sparse· εφόσον ο κόμβος t_k είναι ένας P-κόμβος, διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(a) *ο κόμβος t_{k-1} είναι ένας S-κόμβος:* τότε, υπάρχει μια κορυφή $u \in M(t_{k-1}) - M(t_k)$ τέτοια ώστε η u είναι γειτονική και στις δύο a, b.

- Υποθέστε ότι η x βλέπει την $y \in V_P$. Τότε, η κορυφή x βλέπει την u, ειδάλλως οι κορυφές x, y, u, a, b επάγουν ένα P_5. Επίσης, η y είναι ένα παιδί του κόμβου t_{k-2}: εάν η y ήταν ένα παιδί του t_i, όπου $i < k-2$, τότε ο κόμβος t_{i+1} θα ήταν ένας S- ή ένας N-κόμβος και γι' αυτό θα υπάρχει μια κορυφή v έτσι ώστε η v να βλέπει τις u, a, b· τότε, οι κορυφές x, y, u, v, b ή οι x, y, u, v, a θα επάγουν ένα $\overline{F}_1$ που εξαρτάται από το πότε η x είναι γειτονική με την v ή όχι. Στη συνέχεια, η κορυφή u είναι το μοναδικό παιδί του t_{k-1} εκτός από τον κόμβο t_k · εάν υπήρχαν οι κορυφές $u, u' \in M(t_{k-1}) - M(t_k)$, τότε οι κορυφές x, y, u, u', b θα επάγουν $\overline{F}_1$ ή ένα $\overline{F}_2$ που εξαρτάται από το εάν οι u, u' είναι γειτονικές ή όχι. Τελικά, η κορυφή x δεν μπορεί να χάνει τις κορυφές $b, b' \in M(t_k)$, αφού τότε οι κορυφές x, y, u, b, b' θα επάγουν ένα F_1 ή ένα F_2. Αυτή ακριβώς είναι η περίπτωση (ii).

- Υποθέστε ότι η x χάνει την $z \in V_S$. Επειδή η $z \in V_S$, η κορυφή z είναι γειτονική με τις κορυφές u, a, b. Εάν η z δεν ήταν ένα παιδί του t_{k-1}, τότε η x είναι γειτονική με την u (σημειώστε ότι $u \in V_S$), και επειδή ο κόμβος t_{k-2} είναι ένας P- ή N-κόμβος, υπάρχει μια κορυφή $v \in M(t_{k-2})$ τέτοια ώστε η v να χάνει τις a, b, ενώ η κορυφή v είναι γειτονική με την z· τότε, εάν η x είναι γειτονική με την v, οι κορυφές x, z, u, v, b επάγουν ένα $\overline{P_5}$ ειδάλλως οι κορυφές x, z, u, v, a επάγουν ένα $\overline{F_1}$. Έτσι, η z είναι ένα παιδί του κόμβου t_{k-1}. Επιπλέον, η x χάνει ακριβώς ένα παιδί στην αυτοτελή-μονάδα $M(t_k)$· εάν έχανε δύο $b, b' \in M(t_k)$, τότε οι κορυφές x, z, a, b, b' θα επάγουν ένα F_1 ή ένα F_2. Τελικά, εάν η x έβλεπε τις $a, a' \in M(t_k)$, τότε οι κορυφές x, z, a, a', b θα επάγουν ένα $\overline{F_1}$ ή ένα $\overline{F_2}$. Αυτή ακριβώς είναι η περίπτωση (iii).

(b) *ο κόμβος t_{k-1} είναι ένας N-κόμβος*: τότε, από την ιδιότητα A1, η x βλέπει την κλίκα $K(t_{k-1})$ του αραχνοειδούς γραφήματος $G(t_{k-1})$. Έστω $k \in K(t_{k-1})$· επομένως, η κορυφή k είναι γειτονική με τις x, a, b.

- Υποθέστε ότι η x δεν βλεπει τον ανεξάρτητο σύνολο $S(t_{k-1})$ του $G(t_{k-1})$. Τότε η x χάνει τοV_{N_S}. Η κορυφή x χάνει επίσης το V_P: εάν έβλεπε την $y \in V_P$, τότε οι κορυφές x, y, k, s, b θα επάγουν ένα F_1, όπου $s \in S(t_{k-1})$ είναι ένας γείτονας της k. Επιπρόσθετα, η x βλέπει το V_S: εάν έχανε την $z \in V_S$, τότε οι κορυφές x, y, k, s', b θα επάγουν ένα $\overline{F_1}$, όπου $s' \in S(t_{k-1})$ είναι μια μη-γειτονική κορυφή της k. Αυτό καλύπτεται από την περίπτωση (i).

- Υποθέστε ότι η x βλέπει το $S(t_{k-1})$. Τότε, η κορυφή x βλέπει το V_S: εάν έχανε την $z \in V_S$, τότε οι κορυφές x, z, s, a, b θα επάγουν ένα $\overline{F_2}$, όπου η $s \in S(t_{k-1})$. Επιπρόσθετα, η κορυφή x χάνει το V_P: εάν έβλεπε την $y \in V_P$, τότε οι κορυφές x, y, s, k, b επάγουν ένα F_1, όπου οι κορυφές $s \in S(t_{k-1})$ και $k \in K(t_{k-1})$ είναι μη-γειτονικές. Αυτή ακριβώς είναι η περίπτωση (iv). ∎

Λήμμα 7.10. *Έστω ότι οι x-μερικώς-γειτονικοί κόμβοι του md-δέντρου $T(G)$ βρίσκονται σε ένα μονοπάτι $t_0 t_1 \cdots t_k$, όπου ο κόμβος t_k είναι ο x-μερικώς-γειτονικός κόμβος που βρίσκεται πιο μακριά από την ρίζα t_0 του δέντρου $T(G)$. Εάν ο κόμβος t_k είναι ένας S-κόμβος τότε το G' είναι P_4-sparse εάν και μόνο εάν μια από τις ακόλουθες τέσσερις περιπτώσεις (αμοιβαία αποκλειόμενες) ισχύουν:*

(i) Η κορυφή x βλέπει τα V_S και V_{N_K}, και χάνει τα V_P και V_{N_S}.

(ii) Η κορυφή x βλέπει το V_{N_K}, ολόκληρο εκτός από μια κορυφή, έστω, y, του V_S, και χάνει τα V_P και V_{N_S} όπου

(ii.1) η κορυφή y είναι ένα παιδί του κόμβου t_{k-2} (που είναι ένας S-κόμβος),

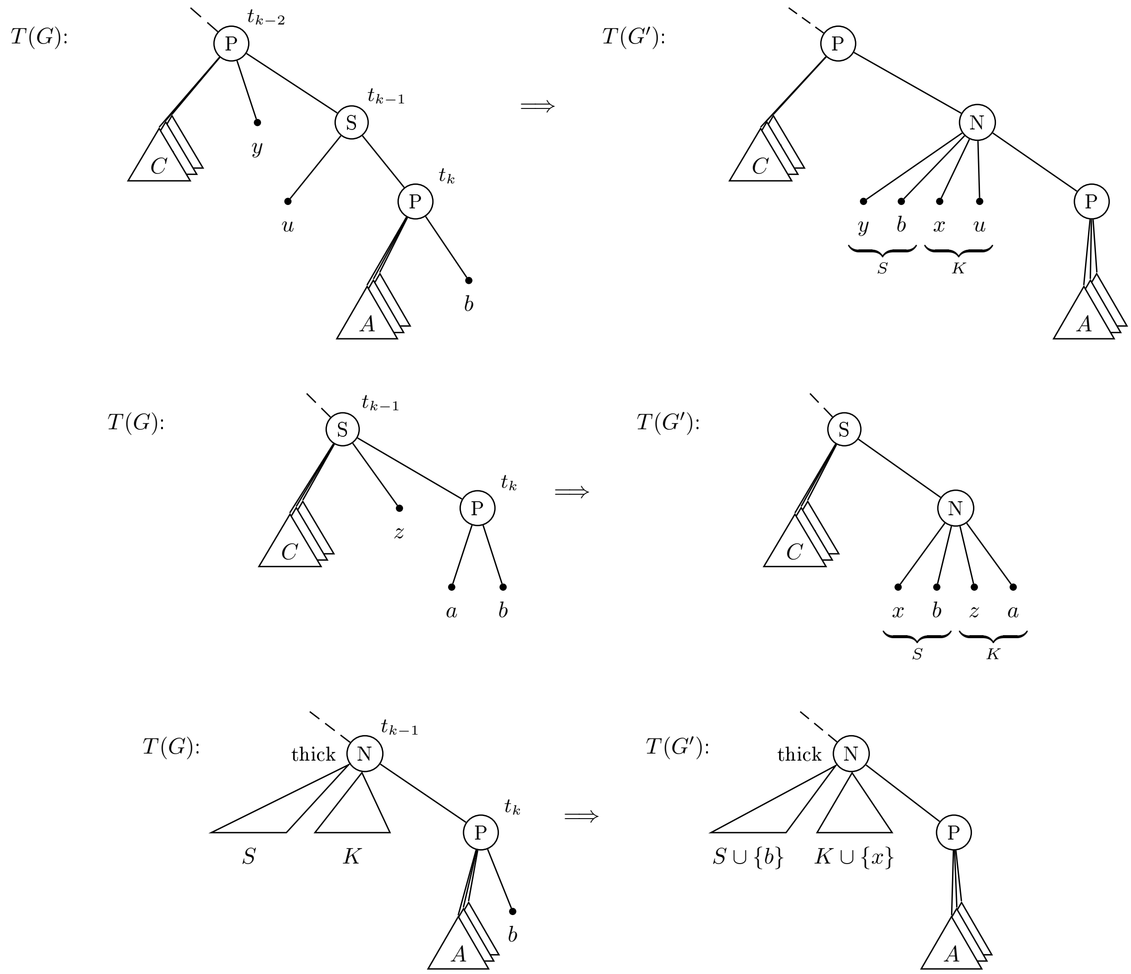
(ii.2) ο κόμβος t_{k-1} είναι ένας P-κόμβος με δύο παιδιά, τον κόμβο t_k και μια κορυφή, έστω, u (που είναι μη-γειτονική με την x), και

(ii.3) η κορυφή x βλέπει μόνο μια κορυφή της αυτοτελούς-μονάδας $M(t_k)$, που είναι ένα παιδί του t_k.

(iii) Η κορυφή x βλέπει τα V_S, V_{N_K}, και ακριβώς μια κορυφή, έστω, z, του V_P, και χάνει το V_{N_S} όπου

(iii.1) η κορυφή z είναι ένα παιδί του κόμβου t_{k-1} (που είναι ένας P-κόμβος), και

(iii.2) ο κόμβος t_k έχει δύο παιδιά a, b, που είναι φύλλα έτσι ώστε η a είναι γειτονική και η b είναι μη-γειτονική με την x.

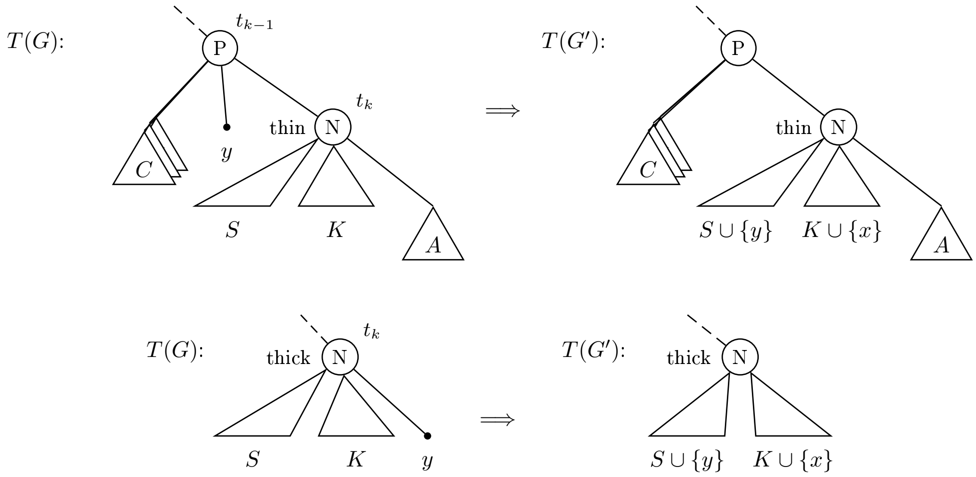


Σχήμα 7.7: Εικονογράφηση των περιπτώσεων (ii), (iii), (iv) του Λήμματος 7.9 και οι ανάλογες ενημερώσεις του md-δέντρου.

(iv) Ο κόμβος t_{k-1} είναι ένας N-κόμβος που αντιστοιχεί σε ένα αραιό αραχνοειδές γράφημα με κλίκα $K(t_{k-1})$, η κορυφή x χάνει τα V_P, V_{N_S}, $K(t_{k-1})$, ολόκληρα εκτός από μια κορυφή, έστω, $b \in M(t_k)$, και βλέπει το V_S και $V_{N_K} - K(t_{k-1})$.

Απόδειξη. Εφόσον τα P_4-sparse γραφήματα είναι αυτοσυμπληρωματικά (complement-invariant) (Λήμμα 7.1), θεωρούμε το γράφημα $\overline{G}$: το md-δέντρο του $T(\overline{G})$ είναι πανομοιότυπο στην δομή με το δέντρο $T(G)$ εκτός του ότι οι P-κόμβοι μετατράπηκαν σε S-κόμβους και αντίστροφα, τα αραιά αραχνοειδή γραφήματα μετατράπηκαν σε πυκνά και αντίστροφα, καθώς οι κλίκες και τα ανεξάρτητα σύνολα εναλλάσσονται. Εφόσον ένας κόμβος στο δέντρο $T(\overline{G})$ είναι x-μερικώς-γειτονικός εάν και μόνο εάν ο αντίστοιχος κόμβος στο δέντρο $T(G)$ είναι x-μερικώς-γειτονικός, το Λήμμα 7.9 εφαρμόζεται και μας δίνει τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να είναι το $\overline{G}'$ ένα P_4-sparse. Μετατρέποντας τους P- και S-κόμβους, τα αραιά και πυκνά αραχνοειδή γραφήματα, τις κλίκες τους και τα ανεξάρτητα σύνολα, και με τις γειτονικές κορυφές της x σε αυτές τις συνθήκες, αποκτούμε τις συνθήκες του λήμματος, που είναι οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες για το γράφημα G' να είναι ένα P_4-sparse. ∎

Λήμμα 7.11. *Έστω ότι οι x-μερικώς-γειτονικοί κόμβοι του md-δέντρου $T(G)$ βρίσκονται σε ένα μονοπάτι $t_0 t_1 \cdots t_k$, όπου ο κόμβος t_k είναι ο x-μερικώς-γειτονικός κόμβος που βρίσκεται πιο*



Σχήμα 7.8: Εικονογράφηση των περιπτώσεων (i) και (ii.2) του Λήμματος 7.11 και οι ανάλογες ενημερώσεις στο md-δέντρο.

μακριά από την ρίζα t_0 του δέντρου $T(G)$. Εάν ο κόμβος t_k είναι ένας N-κόμβος και η διαμέριση του αραχνοειδούς γραφήματος $G(t_k)$ είναι (S, K, R), τότε το γράφημα G' είναι ένα P_4-sparse εάν και μόνο εάν οι συνθήκες από τις ακόλουθες τρεις (αμοιβαία αποκλειόμενες) περιπτώσεις ισχύουν:

(i) Η κορυφή x βλέπει το $S \cup K$ (και χάνει το $M(r)$ όπου $R = \{r\}$): η κορυφή x βλέπει το V_S και V_{N_K}, και χάνει τα V_P και V_{N_S}, το αραχνοειδές γράφημα που αντιστοιχεί στον κόμβο t_k είναι πυκνό, και ο κόμβος r είναι φύλλο.

(ii) Η κορυφή x βλέπει το K (και χάνει το S): μια από τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις ισχύουν:

(ii.1) η κορυφή x βλέπει τα V_S και V_{K_N}, και χάνει τα V_P και V_{N_S}·

(ii.2) η κορυφή x βλέπει τα V_S, V_{N_K}, και ακριβώς μια κορυφή, έστω, y, του V_P, και χάνει το V_{N_S} όπου y είναι ένα παιδί του t_{k-1}, το αραχνοειδές γράφημα που αντιστοιχεί στον κόμβο t_k είναι αραιό, και όλα τα στοιχεία του $M(r)$ (εάν $R = \{r\}$) είναι γειτονικά με την κορυφή x·

(ii.3) η κορυφή x βλέπει το V_{N_K}, ολόκληρο εκτός από μια κορυφή, έστω, y, του V_S, και χάνει τα V_P και V_{N_S} όπου η y είναι ένα παιδί του κόμβου t_{k-1}, το αραχνοειδές γράφημα που αντιστοιχεί στον κόμβο t_k είναι πυκνό, και όλα τα στοιχεία του $M(r)$ (εάν $R = \{r\}$) είναι μη-γειτονικά με την κορυφή x.

(iii) Η κορυφή x χάνει το $S \cup K$ (και βέπει το $M(r)$ όπου $R = \{r\}$): η κορυφή x βλέπει τα V_S και V_{N_K}, και χάνει τα V_P και V_{N_S}, το αραχνοειδές γράφημα που αντιστοιχεί στον κόμβο t_k είναι αραιό, και ο κόμβος r είναι φύλλο.

Η διαδικασία που χειρίζεται την προσθήκη μιας κορυφής x βρίσκει τον κόμβο t_k και εκμεταλλεύεται τα Λήμματα 7.9–7.11 για να ελέγξει και να τροποποιήσει κατάλληλα το δέντρο $T(G)$. Δουλεύει όπως φαίνεται στον Αλγόριθμο 11.

Η ορθότητα της διαδικασίας έπεται από τα Λήμματα 7.9–7.11 και τις ακόλουθες παρατηρήσεις:

Παρατήρηση 7.2. *Όταν ολοκληρώνεται το Βήμα 2,*

- *το σύνολο των κόμβων του δέντρου $T(G)$ που δείχνονται από τα στοιχεία του συνόλου Full είναι ακριβώς το σύνολο των x-πλήρη-γειτονικών κόμβων·*

Διαδικασία $\textsc{Add\_Vertex}$(vertex x)

1. $Partial \leftarrow \emptyset$;
   κατασκεύασε μια ουρά Q που τα στοιχεία της είναι δείκτες σε καθένα από τα φύλλα του $T(G)$ που αντιστοιχούν στις γειτονικές κορυφές της x;
   `while` η ουρά Q είναι μη-κενή `do`
       αφαίρεσε από την Q ένα στοιχείο (δηλαδή, έναν δείκτη σε έναν κόμβο, έστω, t, του δέντρου $T(G)$);
       αύξησε το *counter*-πεδίο του πατέρα $p(t)$ του t κατά 1 και έστω η νέα τιμή του val;
       `if` val είναι ίση με 1
       `then` εισήγαγε στο $Partial$ έναν δείκτη στον $p(t)$;
       `if` val είναι ίση με το πλήθος των παιδιών του $p(t)$
       `then` εισήγαγε στην Q έναν δείκτη στον πατέρα $p(t)$;
           {*ο κόμβος t είναι x-πλήρη-γειτονικός*}
2. $Full \leftarrow$ σύνολο από δείκτες σε καθένα από τα φύλλα του $T(G)$ που αντιστοιχούν στις γειτονικές κορυφές της x;
   `for` κάθε στοιχείο a του συνόλου $Partial$ `do`
       έστω t ο κόμβος του $T(G)$ που τον δείχνει ο a;
       `if` η τιμή του *counter*-πεδίου του t είναι ίση με το πλήθος των παιδιών του t
       `then` αφαίρεσε το a από το $Partial$ και εισήγαγέ το στο $Full$;
           {*ο κόμβος t είναι x-πλήρη-γειτονικός*}
           θέσε το *counter*-πεδίο του t ίσο με 0;
       `else` μάρκαρε τον t ως "partial;"
3. `for` κάθε στοιχείο a του συνόλου $Partial$ `do`
       έστω t ένας κόμβος του $T(G)$ που δείχνεται από το a;
       `if` κανένας πατέρας, παππούς και προπαππούς του t, (εάν υπάρχουν) είναι "partial"
       `then` εκτύπωσε *false* (δηλαδή, το G' δεν είναι P_4-sparse); `return`;
       μάρκαρε τον πατέρα, παππού και τον προπαππού του t, (εάν υπάρχουν) ως "covered;"
   διέσχισε το σύνολο $Partial$ και έλεγξε τα ακόλουθα:
   `if` υπάρχουν δύο ή περισσότερα στοιχεία του $Partial$ που δείχνουν σε κόμβους που δεν είναι "covered"
   `then` εκτύπωσε *false* (δηλαδή, το G' δεν είναι P_4-sparse); `return`;
   έστω ο μοναδικός κόμβος στο $Partial$ που δεν είναι "covered", t';
4. Με βάση το εάν ο κόμβος t' είναι ένας P-κόμβος, S-κόμβος, ή N-κόμβος, έλεγξε ποια από τις περιπτώσεις του Λήμμα 7.9, 7.10, και 7.11, αντίστοιχα, ισχύει, και τροποποίησε κατάλληλα το δέντρο $T(G)$;
   `if` καμία από τις περιπτώσεις των αντίστοιχων λημμάτων δεν ισχύουν
   `then` εκτύπωσε *false* (δηλαδή, το G' δεν είναι P_4-sparse); `return`;
5. `for` κάθε στοιχείο a του συνόλου $Partial$ `do`
       απομάκρυνε το μαρκάρισμα του κόμβου του $T(G)$ που δείχνει το a και
       θέσε το *counter*-πεδίο του ίσο με 0;

Αλγόριθμος 11: Add_Vertex

- *το σύνολο των κόμβων του δέντρου $T(G)$ που δείχνονται από τα στοιχεία του συνόλου $Partial$ είναι ένα υποσύνολο του συνόλου των x-μερικώς-γειτονικών κόμβων.*

Επιπρόσθετα, ο κόμβος t' που βρίσκεται στο Βήμα 3 είναι ακριβώς ο x-μερικώς-γειτονικός κόμβος t_k που βρίσκεται πιο μακριά από τη ρίζα.

Παρατήρηση 7.3. *Για κάθε "partial" κόμβο t σε απόσταση τουλάχιστον 3 από την ρίζα του δέντρου $T(G)$, εάν κανένας από τους πατέρα, παππού, προπάππου του t είναι "partial", τότε το γράφημα G' δεν είναι P_4-sparse.*

Απόδειξη. Έπεται από τις περιπτώσεις στα Λήμματα 7.9–7.11 (έτσι ώστε το G' είναι P_4-sparse) και από το γεγονός ότι ο πατέρας ενός P-κόμβου (αντίστ. S-κόμβου) δε μπορεί να είναι ένας P-κόμβος (αντίστ. S-κόμβος)· σημειώστε ότι εφόσον και στα τρία λήμματα, η κορυφή x βλέπει το V_{N_K} και ολόκληρο εκτός από ένα στοιχείο του V_S, τότε όλοι οι S-κόμβοι, εκτός το πολύ από έναν, και όλοι οι N-κόμβοι είναι "partial." ∎

Για την πολυπλοκότητα χρόνου της διαδικασίας, χρειαζόμαστε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Παρατήρηση 7.4. *Το μέγεθος του συνόλου Partial όταν ολοκληρώνεται το Βήμα 1 είναι λιγότερο από $2d$, όπου d είναι το πλήθος των κορυφών του G που είναι γειτονικές με την x.*

Απόδειξη. Σημειώστε ότι η πληθικότητα του συνόλου *Partial* είναι μικρότερη από την πληθικότητα του συνόλου *Full* και το πλήθος των "partial" κόμβων (δείτε Βήμα 2). Οι Παρατηρήσεις 7.1 και 7.2 υπονοούν ότι η πληθικότητα του συνόλου *Full* είναι μικρότερη από d. Επιπρόσθετα, κάθε "partial" κόμβος έχει τουλάχιστον ένα παιδί στο σύνολο *Full*· εφόσον ένας κόμβος του $T(G)$ έχει ακριβώς έναν πατέρα-κόμβο, το πλήθος των "partial" κόμβων είναι επίσης μικρότερο από d. Έπεται η παρατήρηση. ∎

Η Παρατήρηση 7.4 επάγει ότι το Βήμα 1 χρειάζεται $O(d)$ χρόνο, αφού ένας κόμβος του δέντρου $T(G)$ εισάγεται το πολύ μια φορά στην ουρά Q (και στο *Partial*), η εισαγωγή και η διαγραφή στοιχείων μπορούν να γίνουν σε σταθερό χρόνο, και μπορούμε να προσπελάσουμε τον πατέρα ενός κόμβου σε σταθερό χρόνο. Παρόμοια, το Βήμα 2 χρειάζεται $O(d)$ χρόνο όπως επίσης και το Βήμα 3· σημειώστε ότι οι πατέρες, οι παππούδες και οι προπαππούδες ενός κόμβου προσπελούνται σε σταθερό χρόνο ακολουθώντας τους 3 δείκτες από τους πατέρας-παιδιών. Ένας εξαντλητικός έλεγχος των περιπτώσεων στα Λήμματα 7.9–7.11 επιβεβαιώνει ότι το Βήμα 4 μπορεί επίσης να γίνει σε $O(d)$ χρόνο: μετακινούμαστε από τον κόμβο t' στην ρίζα (ένα μονοπάτι μήκους $O(d)$ με βάση τις Παρατηρήσεις 7.2 και 7.3) και ελέγχουμε εάν η x βλέπει το V_{N_K} και εάν βλέπει το V_S ή χάνει ένα από τα στοιχεία τους (για την τελευταία περίπτωση, επεξεργαζόμαστε ανάλογα τις περιπτώσεις) · από τους υπόλοιπους γείτονες της x και τον τύπο του κόμβου t_k, μπορούμε να ελέγξουμε και να χειριστούμε τις υπόλοιπες περιπτώσεις. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο έλεγχος εάν η κορυφή x χάνει ένα σύνολο X επιτυγχάνεται είτε κοιτάζοντας εάν ο κόμβος t βρίσκεται στο σύνολο *Full* (εάν $X = M(t)$) είτε εφοδιάζοντας κατάλληλα όλες τις γειτονικές κορυφές της x (π.χ., εάν $X = V_{N_S}$). Εκμεταλλευόμενοι τους δείκτες-πατέρα και το γεγονός ότι η τιμή του *counter*-πεδίο ενός κόμβου είναι ίση με το πλήθος των παιδιών του που είναι x-πλήρη-γειτονικά, μπορούμε να δούμε ο συνολικός υπολογισμός στο Βήμα 4 μπορεί να εκτελεστεί σε $O(d)$ χρόνο. Τελικώς, το Βήμα 5 φαίνεται ότι χρειάζεται $O(d)$ χρόνο. Επομένως, έχουμε ότι:

Θεώρημα 7.4. *Έστω ένα P_4-sparse γράφημα G. Η προσθήκη μιας κορυφής $x \notin G$ βαθμού d στο γράφημα G' μπορεί να εκτελεστεί σε $O(d)$ χρόνο.*

7.3.4 Διαγραφή μιας Κορυφής

Έστω $v \in V(G)$ μια κορυφή με d προσκείμενες ακμές στο γράφημα G που πρόκειται να διαγραφεί. Επομένως, το γράφημα G' που προκύπτει μετά την διαγραφή της κορυφής v είναι ένα P_4-sparse γράφημα ως ένα επαγώμενο υπογράφημα του G (δείτε Λήμμα 7.1). Επομένως επικεντρωνόμαστε στην κατάλληλη ενημέρωση του md-δέντρου $T(G)$ έτσι ώστε να αποκτήσουμε το md-δέντρο $T(G')$.

Πρώτα ας θεωρήσουμε την περίπτωση που $v \in S \cup K$ για κάποιον N-κόμβο t έτσι ώστε η διαμέριση του αραχνοειδούς γραφήματος $G(t)$ είναι (S, K, R). Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(i) $v \in S$: Πρώτα υποθέστε ότι $S = \{v, v'\}$, $K = \{k, k'\}$, και έστω η v να είναι γειτονική με την k: τότε, το αραχνοειδές γράφημα αντικαθίσταται από έναν S-κόμβο με παιδιά την κορυφή k' και έναν P-κόμβο· εάν $R = \emptyset$, τότε αυτός ο P-κόμβος έχει ως παιδιά τις κορυφές v' και k, αλλιώς εάν $R = \{r\}$, έχει παιδιά την κορυφή v' και έναν S-κόμβο με παιδιά την κορυφή k και τον κόμβο r. Τώρα υποθέστε ότι $|S| = |K| \geq 3$ και έστω $f(v) = k \in K$. Εάν το αραχνοειδές γράφημα είναι αραιό τότε: εάν $R = \emptyset$, τότε μετά την διαγραφή της κορυφής v, η k διαγράφεται από το σύνολο K και συνδέεται με έναν δείκτη για το σύνολο R· εάν $R = \{r\}$, τότε η k διαγράφεται από το K και εάν ο κόμβος r είναι ένας S-κόμβος τότε η k γίνεται παιδί, αλλιώς την θέση του κόμβου r την αντικαθιστά ένας νέος S-κόμβος με παιδιά την k και τον κόμβο r. Εάν το αραχνοειδές γράφημα είναι πυκνό, τότε μετά την αφαίρεση της v, η κορυφή k βλέπει όλες τις υπόλοιπες κορυφές στην αυτοτελή-μονάδα $M(t)$· έτσι, ο N-κόμβος t αντικαθίσταται από έναν S-κόμβο με παιδιά την κορυφή k και τον κόμβο t αφού είχαμε αφαιρέσει τις κορυφές v, k.

(ii) $v \in K$: Εφόσον το συμπλήρωμα ενός αραιού αραχνοειδούς γραφήματος είναι ένα πυκνό αραχνοειδές γράφημα (και αντίστροφα) με την κλίκα και το ανεξάρτητο σύνολο αντίστροφα (και εάν $R = \{r\}$, οι P- και S-κόμβοι στο υποδέντρο με ρίζα τον κόμβο r αντιστραμένοι επίσης), η περίπτωση είναι συμμετρική με την προηγούμενη και χρειάζεται την ίδια πολυπλοκότητα χρόνου για να χειριστεί.

(iii) $R = \{v\}$: Σε αυτή την περίπτωση, η κορυφή v διαγράφεται, και αποκτάμε ένα αραχνοειδές γράφημα με $R = \emptyset$.

Στη συνέχεια θεωρούμε την περίπτωση όπου ο πατέρας-κόμβος $p(v)$ της v στο δέντρο $T(G)$ είναι ένας P- ή S-κόμβος· εάν ο $p(v)$ έχει παραπάνω από δύο παιδιά, επαρκεί να διαγράψουμε την κορυφή v. Παρ' όλα αυτά, προσοχή χρειάζεται εάν ο $p(v)$ έχει μόνο δύο παιδιά, στην περίπτωση της οποίας ο αδερφός u της v χρειάζεται να συνδεθεί με τον παππού $p(p(v))$ της v· επιπλέον, εάν ο u και ο $p(p(v))$ είναι και οι δύο P- ή S-κόμβοι, τότε τα παιδιά του u γίνονται παιδιά του $p(p(v))$. Στην εργασία [101], έχει δειχτεί πώς η τελευταία περίπτωση μπορεί να χειριστεί σε $O(d)$ χρόνο όπου οι κόμβοι που συμμετέχουν είναι P- ή S-κόμβοι· η τεχνική αυτή μπορεί εύκολα να χρησιμοποιηθεί από τον αλγόριθμό μας με τη ίδια πολυπλοκότητα χρόνου. Επιπρόσθετα, σε οποιαδήποτε από τις υπόλοιπες δύο περιπτώσεις όταν ο πατέρας-κόμβος $p(v)$ έχει 2 παιδιά, δηλαδή, εάν ο αδερφός u της v είναι ένας N-κόμβος ή εάν ο παππούς $p(p(v))$ είναι ένας N-κόμβος, τότε ο κόμβος u συνδέεται ως παιδί του $p(p(v))$ (δεν υπάρχει πρόβλημα έχοντας έναν N-κόμβο με $R = \{r\}$ όπου ο r είναι επίσης ένας N-κόμβος).

Δεν είναι δύσκολο να δει κανείς ότι όλες οι παραπάνω περιπτώσεις υποστηρίζονται σε $O(d)$ χρόνο. Επομένως, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Λήμμα 7.12. *Η διαγραφή μιας κορυφής v ενός P_4-sparse γραφήματος G μπορεί να εκτελεστεί σε $O(d)$ χρόνο, όπου d είναι ο βαθμός της κορυφής v στο γράφημα G.*

Συγκεντρώνοντας όλες τις περιπτώσεις έχουμε το ακόλουθο βασικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 7.5. *Υπάρχει ένας πλήρως δυναμικός αλγόριθμος αναγνώρισης για τα P_4-sparse γραφήματα και διατήρησης του md-δέντρου τους, που υποστηρίζει εισαγωγές και διαγραφές κορυφών και ακμών και εκτελείται σε $O(d)$ χρόνο για κάθε πράξη που εμπλέκει d ακμές.*

7.4 Συμπεράσματα

Σε αυτή την ενότητα επιλύουμε το δυναμικό πρόβλημα αναγνώρισης για την κλάση των P_4-sparse γραφημάτων: ο σκοπός μας είναι να χειριστούμε πρόσθεση και διαγραφή ακμών/κορυφών, να ανακαλύψουμε πότε τέτοιες τροποποιήσεις επιφέρουν ένα P_4-sparse γράφημα και σε περίπτωση που αληθεύει, να ενημερώσει κατάλληλα την αναπαράσταση του γραφήματος. Η αντιμετώπισή μας βασίζεται στην διατήρηση του md-δέντρου του γραφήματος το οποίο χρησιμοποιούμε για την επίλυση του προβλήματος αναγνώρισης. Αποδεικνύουμε δομικές ιδιότητες του δέντρου και πετυχαίνουμε έναν πλήρη δυναμικό αλγόριθμο αναγνώρισης που υποστηρίζει τροποποιήσεις ακμών (εισαγωγές και διαγραφές) σε $O(1)$ χρόνο και τροποποιήσεις κορυφών (εισαγωγές και διαγραφές) σε $O(d)$ χρόνο για κορυφή βαθμού d.

Σε σχέση με την βελτιστότητα, είναι ενδιαφέρον να κατορθώσει κανείς έναν αλγόριθμο σταθερού χρόνου για την ενημέρωση του κομματιασμένου αποσυνθετικού δέντρου στην περίπτωση διαγραφής κορυφής ενός P_4-sparse γραφήματος. Επιπλέον, δυναμικοί αλγόριθμοι έχουν προταθεί που υποστηρίζουν ακμές και κορυφές τροποποιήσεις σε $O(n)$ χρόνο κατά ακμής τροποποίησης και σε $O(nm)$ χρόνο κατά κορυφής τροποποίησης για τριγωνικά (chordal) γραφήματα. Βάση αυτών των αποτελεσμάτων, ένας μπορεί να εξετάσει προς την κατεύθυνση έρευνας εάν υπάρχει πιο αποτελεσματικός δυναμικός αλγόριθμος για την κλάση των τριγωνικών (chordal) και διαστημάτων (interval) γραφημάτων (ένας ακμές-μόνο δυναμικός αλγόριθμος είναι γνωστός για τα διαστήματα (interval) γραφήματα που υποστηρίζει κάθε τροποποίηση ακμής σε $O(n \log n)$ χρόνο) και, ακόμα περισσότερο, για άλλες κλάσεις γραφημάτων.

Κεφαλαιο 8

Βελτιστος Παραλληλος Αλγοριθμος για το Προβλημα της Επικαλυψης με Μονοπατια σε P_4-sparse Γραφηματα

8.1 Εισαγωγή

Ένα πολύ γνωστό πρόβλημα με πλειάδα πρακτικών εφαρμογών στην θεωρία γραφημάτων είναι η εύρεση και η αναφορά του ελάχιστου πλήθους μονοπατιών με μη-κοινές κορυφές έτσι ώστε όλα τα μονοπάτια να επικαλύπτουν τις κορυφές ενός γραφήματος (path cover problem). Το πρόβλημα αυτό, γνωστό ως το πρόβλημα επικάλυψης με μονοπάτια, βρίσκει εφαρμογές, μεταξύ πολλών άλλων, στις περιοχές της σχεδίαδης βάσης δεδομένων, δικτύων, βελτιστοποίησης κώδικα (δείτε [2, 38]) και είναι γνωστό ότι η επικάλυψη με μονοπάτια καθώς και πολλές διαφοροποιήσεις του προβλήματος είναι NP-complete [38]. Ένα γράφημα που επιτρέπει ένα μονοπάτι επικάλυψης μεγέθους ένα αναφέρεται ως Hamiltonian. Έτσι, το πρόβλημα της επικάλυψης με μονοπάτια είναι τουλάχιστον ίσο με δυσκολία όσο το πρόβλημα της απόφασης εάν ένα γράφημα έχει ένα Hamiltonian μονοπάτι (Hamiltonian path).

Η μελέτη γραφημάτων με λίγα P_4 έχει πρακτικές εφαρμογές που σχετίζονται με την χρονοδρομολόγηση εξετάσεων και την σημασιολογία ομαδοποίησης [29, 70]. Αυτές οι εφαρμογές κίνησαν τις θεωρητικές και αλγοριθμικές μελέτες προβλημάτων για την κλάση των cographs, που δεν περιέχουν κανένα P_4. Επεκτείνοντας την έννοια ενός P_4-free γραφήματος, πολλές κλάσεις γραφημάτων, όπως η κλάση των P_4-sparse γραφημάτων, αποκτήθηκαν αποκλείοντας με διάφορους τρόπους την απουσία των P_4.

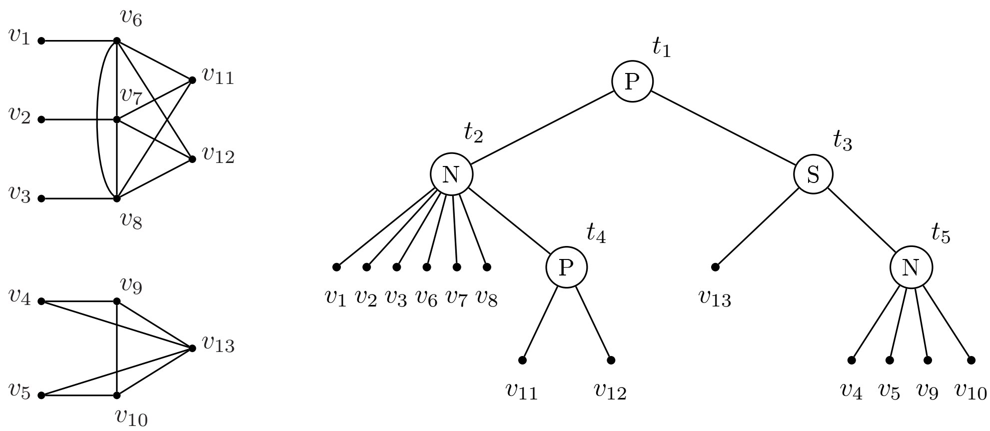
Πιο συγκεκριμένα, η κλάση των P_4-*sparse* γραφημάτων, ορίζεται ως η κλάση που περιέχει τα γραφήματα εκείνα για τα οποία κάθε σύνολο πέντε κορυφών επάγει το πολύ ένα άχορδο μονοπάτι τεσσάρων κορυφών [52]. Αυτή η κλάση έχει μελετηθεί για πολλά και κλασικά προβλήματα βελτιστοποίησης. Ένας παράλληλος αλγόριθμος αναγνώρισης ενός P_4-sparse γραφήματος με n κορυφές έχει δοθεί στην εργασία [71] που τρέχει σε $O(\log^2 n)$ χρόνο χρησιμοποιώντας $O(\frac{n^2+nm}{\log n})$ EREW-PRAM επεξεργαστές. Οι Giakoumakis et al. στην εργασία [39] επίλυσαν, μαζί με το πρόβλημα αναγνώρισης, το πρόβλημα εύρεσης του αριθμού κλίκας, του ευσταθή αριθμού και του χρωματικού αριθμού για τέτοια γραφήματα σε γραμμικό ακολουθιακό χρόνο (γραμμικό εννοούμε σε $O(n+m)$ χρόνο, όπου n και m είναι το πλήθος κορυφών και ακμών του γραφήματος, αντίστοιχα). Επιπλέον, στην ίδια εργασία μελέτησαν την hamiltonicity για την κλάση των P_4-tidy γραφημάτων (μια κατάλληλη υπερκλάση των P_4-sparse γραφημάτων). Σε ένα παράλληλο περιβάλλον, το πρόβλημα του μέγιστου ταιριάσματος (maximum matching) για την οικογένεια των P_4-tidy γραφημάτων έχει μελετηθεί [97] και ένας βέλτιστος αλγόριθμος για το πρόβλημα αυτό προτάθηκε, δοθέντος του md-δέντρου ενός P_4-tidy γραφήματος.

Οι Nakano et al. στην εργασία [85] στο τέλος της εργασίας τους άφησαν ανοιχτό το πρόβλημα της εφαρμογής της τεχνικής τους σε άλλες κλάσεις γραφημάτων, εκτός από τα cographs. Κινούμενοι από το θέμα αυτό γενικεύουμε την τεχνική τους σε μια κατάλληλη υπερκλάση των cographs. Σε αυτό το κεφάλαιο επεκτείνουμε την οικογένεια τέλειων γραφημάτων που κατέχουν βέλτιστες λύσεις για το πρόβλημα της επικάλυψης με μονοπάτια. Έτσι, προτείνουμε μια βέλτιστη λύση για το πρόβλημα προτείνοντας έναν παράλληλο αλγόριθμο που τρέχει σε $O(\log n)$ χρόνο με $O(n/\log n)$ επεξεργαστές στο EREW PRAM μοντέλο.

Το κεφάλαιο είναι οργανωμένο ως εξής. Στην δεύτερη ενότητα εδραιώνουμε την σημειογραφία και την ορολογία μας και παρουσιάζουμε προηγούμενα αποτελέσματα. Πιο συγκεκριμένα, δείχνουμε δομικές ιδιότητες για την κλάση των P_4-sparse γραφημάτων, και την μοναδική τους δενδρική αναπαράσταση. Αναφερόμαστε επίσης στα δέντρα μονοπατιών (μια κατάλληλη δομή για την αναπαράσταση των μονοπατιών επικάλυψης) και σε μια κλασική τεχνική ταιριάσματος αγκυλών που χρησιμοποιούνται στον αλγόριθμό μας. Στην τρίτη ενότητα παρουσιάζουμε τα μονοπάτια που εμφανίζονται στην επικάλυψη με μονοπάτια για ένα P_4-sparse γράφημα, ενώ στην τέταρτη ενότητα περιγράφουμε τα αντίστοιχα δέντρα μονοπατιών που πρέπει να κατασκευάσουμε έτσι ώστε να αποκτήσουμε τα επιθυμητά μονοπάτια. Στην πέμπτη ενότητα περιγράφουμε την ακολουθία αγκυλών που πρέπει να προκύψει σε έναν συγκεκριμένο τύπου κόμβου του md-δέντρου και στην έκτη ενότητα προτείνουμε έναν βέλτιστο παράλληλο αλγόριθμο για το πρόβλημα της επικάλυψης με μονοπάτια για ένα P_4-sparse γράφημα. Τέλος, στην έβδομη ενότητα, συνοψίζουμε το κεφάλαιο και παραθέτουμε πιθανές επεκτάσεις.

8.2 Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

Θεωρούμε πεπερασμένα μη-κατευθυνόμενα γραφήματα χωρίς πολλαπλές ακμές. Έστω ένα γράφημα G με σύνολο κορυφών $V(G)$ και σύνολο ακμών $E(G)$. Το υπογράφημα ενός γραφήματος G που επάγεται από ένα υποσύνολο S του συνόλου κορυφών $V(G)$ αναφέρεται ως $G[S]$. Για ένα υποσύνολο κορυφών S του γραφήματος G, ορίζουμε το γράφημα $G-S := G[V(G)-S]$ και γράφουμε με $G-v$ το γράφημα $G[V(G)-\{v\}]$. Μια *κλίκα* (clique) είναι ένα σύνολο από όλα τα ζεύγη γειτονικών



Σχήμα 8.1: Ένα μη-συνεκτικό P_4-sparse γράφημα και το αντίστοιχο md-δέντρο του.

κορυφών· ένα *ανεξάρτητο σύνολο* (stable set) είναι ένα σύνολο από όλα τα ζεύγη μη-γειτονικών κορυφών.

Η *γειτονιά* (neighborhood) $N(x)$ μιας κορυφής $x \in V(G)$ είναι το σύνολο όλων των κορυφών του γραφήματος G που είναι γειτονικές με την κορυφή x. Η *κλειστή γειτονιά* (closed neighborhood) της κορυφής x ορίζεται ως $N[x] := \{x\} \cup N(x)$. Ο *βαθμός* (degree) μιας κορυφής x στο γράφημα G, που συμβολίζεται με $d(x)$, είναι το πλήθος των προσκείμενων ακμών στην κορυφή x· δηλαδή $d(x) = |N(x)|$. Εάν δύο κορυφές x και y είναι γειτονικές σε ένα γράφημα G, θα λέμε ότι η κορυφή x *βλέπει* (sees) την κορυφή y· ειδάλλως θα λέμε ότι η κορυφή x *χάνει* (misses) την κορυφή y. Επεκτείνουμε αυτήν την έννοια σε σύνολα κορυφών: το σύνολο κορυφών $V_i \subseteq V(G)$ βλέπει (χάνει) το σύνολο κορυφών $V_j \subseteq V(G)$ εάν και μόνο εάν κάθε κορυφή $x \in V_i$ βλέπει (χάνει) κάθε κορυφή $y \in V_j$.

8.2.1 P_4-sparse Γραφήματα

Παρακάτω, γίνεται μια ανασκόπηση των χαρακτηρισμών και των δομικών ιδιοτήτων των P_4-sparse γραφημάτων και αποδεικνύονται αποτελέσματα που χρησιμοποιούνται από τον αλγόριθμό μας για την επίλυση του προβλήματος της επικάλυψης με μονοπάτια ενός P_4-sparse γραφήματος. Πιο συγκεκριμένα, για την κλάση των P_4-sparse γραφημάτων, οι Giakoumakis και Vanherpe [40] έδειξαν ότι:

Λήμμα 8.1. *Έστω G ένα γράφημα και έστω $T(G)$ το md-δέντρο του. Το γράφημα G είναι P_4-sparse εάν και μόνο εάν για κάθε N-κόμβο t του δέντρου $T(G)$, το γράφημα $G(t)$ είναι ένα αραχνοειδές γράφημα με διαμέριση (S, K, R) και καμία κορυφή του συνόλου $S \cup K$ δεν είναι εσωτερικός κόμβος στο δέντρο $T(G)$.*

Το παραπάνω λήμμα επάγει ότι κάθε N-κόμβος t του md-δέντρου $T(G)$ ενός P_4-sparse γραφήματος G έχει $2k$ ή $2k+1$ παιδιά, όπου $|S| = |K| = k \geq 2$ και $|R| \leq 1$· τα σύνολα S, K, και R σχηματίζουν την διαμέριση του αραχνοειδούς γραφήματος $G(t)$. Πιο συγκεκριμένα, ο N-κόμβος t έχει k παιδιά που αντιστοιχούν στο σύνολο S, k παιδιά που αντιστοιχούν στο σύνολο K, και είτε κανένα άλλο παιδί εάν $R = \emptyset$ ή ένα ακριβώς επιπλέον παιδί εάν $R \neq \emptyset$ (σε αυτή την περίπτωση, $|R| = 1$ και αυτό το παιδί είναι η ρίζα ενός υποδέντρου του $T(G)$). Τα παιδιά που αντιστοιχούν στο σύνολο S και στο K είναι φύλλα στο δέντρο $T(G)$ και, επομένως, είναι κορυφές του G, ενώ το παιδί που αντιστοιχεί στο σύνολο R, εάν $R \neq \emptyset$, είναι είτε ένα φύλλο (δηλαδή, μια κορυφή του G) είτε ένας εσωτερικός κόμβος με επιγραφή P, S, ή N.

Το md-δέντρο $T(G)$ που παρουσιάζεται στο Σχήμα 8.1 περιέχει δύο N-κόμβους, δηλαδή, τους κόμβους t_2 και t_5. Το γράφημα $G(t_2)$ είναι ένα πρώτο αραχνοειδές γράφημα με επτά κορυφές και με διαμέριση $S = \{v_1, v_2, v_3\}$, $K = \{v_6, v_7, v_8\}$, και $R = \{t_4\}$, ενώ το γράφημα $G(t_5)$ είναι επίσης ένα πρώτο αραχνοειδές γράφημα τεσσάρων κορυφών με διαμέριση $S = \{v_4, v_5\}$, $K = \{v_9, v_{10}\}$, και $R = \emptyset$. Το γράφημα $G[M(t_2)]$ είναι ένα αραχνοειδές γράφημα (όχι πρώτο αραχνοειδές γράφημα) με $R = \{v_{11}, v_{12}\}$, και το γράφημα $G[M(t_5)]$ είναι επίσης ένα αραχνοειδές γράφημα (πρώτο αραχνοειδές γράφημα) με $R = \emptyset$.

Βασιζόμενοι σε τεχνικές που περιγράφηκαν στα [73, 85], έτσι ώστε να διευκολύνουμε και να επισπεύσουμε ορισμένες διαδικασίες του αλγορίθμου μας, τροποποιούμε το δέντρο $T(G)$: κάνουμε δυαδικό το δέντρο $T(G)$ με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε εσωτερικός κόμβος με επιγραφή P ή S να έχει ακριβώς δυο παιδιά· συμβολίζουμε με $T_b(G)$ το τροποποιημένο δέντρο. Το αριστερό και δεξί παιδί ενός εσωτερικού P-κόμβου ή S-κόμβου t του $T_b(G)$ θα συμβολίζεται με t_l και t_r, αντίστοιχα. Σημειώστε ότι εάν το δέντρο $T(G)$ έχει μόνο N-κόμβους τότε το δέντρο $T_b(G)$ συμπίπτει με το δέντρο $T(G)$.

Έστω το γράφημα $G[M(t)]$ να δηλώνει το υπογράφημα που επάγεται από τα φύλλα που είναι απόγονοι του κόμβου t στο δέντρο $T_b(G)$, και έστω $L(t)$ να δηλώνει το πλήθος των φύλλων που είναι απόγονοι του κόμβου t στο δέντρο $T_b(G)$, δηλαδή, το πλήθος των κορυφών στο γράφημα $G[M(t)]$. Λέμε ότι το δέντρο $T_b(G)$ είναι *αριστερό* (leftist), και το συμβολίζουμε με $T_{bl}(G)$, εάν για κάθε εσωτερικό κόμβο t με επιγραφή P ή S, ικανοποιείται η συνθήκη $L(t_l) \geq L(t_r)$. Για κάθε S-κόμβο t του $T_{bl}(G)$, αντικαθιστούμε το υποδέντρο με ρίζα τον κόμβο t_r (το δεξί παιδί του κόμβου t) με τα $L(t_r)$ φύλλα και καλούμε το τροποποιημένο δέντρο το *εξασθενημένο* (reduced) αριστερό δυαδικό δέντρο του $T_{bl}(G)$· το συμβολίζουμε με $T_{blr}(G)$.

Έστω $\lambda(t)$ το πλήθος των μονοπατιών στην επικάλυψη με μονοπάτια του γραφήματος $G[M(t)]$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι, για να κατασκευάσει κανείς την επικάλυψη με μονοπάτια χρησιμοποιώντας το δέντρο $T_{blr}(G)$, χρειαζόμαστε να γνωρίζουμε το πλήθος των μονοπατιών $\lambda(t)$ σε κάθε εσωτερικό κόμβο $t \in T_{blr}(G)$. Εάν ο κόμβος t είναι ένας P-κόμβος ή S-κόμβος τότε έχει ένα αριστερό παιδί t_l και ένα δεξί παιδί t_r· ειδάλλως, ο κόμβος t είναι ένας N-κόμβος και έχει τουλάχιστον 4 παιδιά που επάγουν ένα πρώτο αραχνοειδές γράφημα $G(t) = (S, K, R)$ με είτε $R = \emptyset$, είτε $R = \{r\}$, όπου $r \in T_{blr}(G)$. Βασιζόμενοι στα αποτελέσματα των [73] και [53], αποκτούμε τον ακόλουθο τύπο για το πλήθος των μονοπατιών στην επικάλυψη με μονοπάτια ενός P_4-sparse γραφήματος.

$$\lambda(t) = \begin{cases} \lambda(t_l) + \lambda(t_r) & \text{εάν ο } t \text{ είναι ένας P-κόμβος,} \\ \max\{1,\ \lambda(t_l) - L(t_r)\} & \text{εάν ο } t \text{ is an S-κόμβος,} \\ \lambda(r) + \left\lceil \max\left\{0,\ \frac{|K|-2\lambda(r)}{2}\right\}\right\rceil & \text{εάν το } G(t) \text{ είναι ένα αραιό αραχνοειδές γράφημα,} \\ \max\{1,\ \lambda(r)\} & \text{εάν το } G(t) \text{ είναι ένα πυκνό αραχνοειδές γράφημα.} \end{cases} \tag{8.1}$$

Συνοψίζουμε με το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Λήμμα 8.2. *Έστω ένα P_4-sparse γράφημα G με n κορυφές και έστω το md-δέντρο του $T(G)$. Το εξασθενημένο αριστερό δυαδικό δέντρο $T_{blr}(G)$ και το πλήθος των μονοπατιών στην επικάλυψη με μονοπάτια του γραφήματος G μπορούν να υπολογιστούν σε $O(\log n)$ χρόνο χρησιμοποιώντας $O(n/\log n)$ EREW-PRAM επεξεργαστές.*

Απόδειξη. Εφόσον κάνουμε δυαδικό κάθε υποδέντρο του $T(G)$ με ρίζα έναν P-κόμβο ή έναν S-κόμβο και όχι αυτά που είναι ριζωμένα σε έναν N-κόμβο, μπορούμε να εκτελέσουμε την δυαδικοποίηση του δέντρου βέλτιστα, όπως φαίνεται στο βιβλίο [1]. Για να υπολογίσουμε το αριστερό δυαδικό δέντρο $T_{bl}(G)$, χρειάζεται να καθορίσουμε το πλήθος $L(t)$ των κορυφών στο γράφημα $G(t)$ για κάθε εσωτερικό κόμβο t. Σημειώστε ότι, το πλήθος των παιδιών και το πλήθος των απογόνων που είναι φύλλα κάθε εσωτερικού κόμβου t μπορεί να υπολογιστεί σε $O(\log n)$ χρόνο χρησιμοποιώντας $O(n/\log n)$ EREW επεξεργαστές, δοθέντος της λίστας γειτνίασης του δέντρου $T_{bl}(G)$ (δείτε [58, 85]). Έτσι, το εξασθενημένο αριστερό δυαδικό δέντρο $T_{blr}(G)$ κατασκευάζεται βέλτιστα. Επιπρόσθετα, βασισμένοι στον τύπο της Εξ.8.1, το πλήθος των μονοπατιών στην επικάλυψη με μονοπάτια του γραφήματος G υπολογίζονται σε $O(\log n)$ χρόνο χρησιμοποιώντας $O(n/\log n)$ EREW επεξεργαστές. ∎

8.2.2 Δέντρα Μονοπατιών και Ταίριασμα Αγκυλών

Σε αυτή την ενότητα επισκοπούμε τα *δέντρα μονοπατιών* (path trees), που είναι το ουσιαστικό κλειδί του αλγορίθμου μας και δείχνουμε ότι χρησιμοποιώντας ταίριασμα αγκυλών (bracket matching), κατασκευάζουμε τα δέντρα μονοπατιών βέλτιστα.

Έστω ένα γράφημα G και έστω ένα μονοπάτι $P = [p, \ldots, p']$ της επικάλυψης με μονοπάτια $\mathcal{P}$ του γραφήματος G. Σημειώστε ότι, εάν το G είναι ένα hamiltonian γράφημα τότε $\mathcal{P} = \{P\}$. Ένα δέντρο μονοπατιού, που συμβολίζεται με $T(p, p')$, είναι ένα ριζωμένο δυαδικό δέντρο του οποίου οι εσωτερικοί κόμβοι είναι ακριβώς οι κορυφές ενός μονοπατιού P της επικάλυψης με μονοπάτια $\mathcal{P}$ στο γράφημα G και p, p' είναι τα άκρα του μονοπατιού P. Οι κόμβοι του δέντρου $T(p, p')$ μονοπατιού τοποθετούνται με τέτοιο τρόπο στο δέντρο $T(p, p')$, έτσι ώστε η ενδοδιατεταγμένη διάσχιση (inorder traversal) του $T(p, p')$ να επιστρέφει το μονοπάτι P. Έπεται ότι το δέντρο μονοπατιού δοθέντος ενός μονοπατιού δεν είναι μοναδικό. Σημειώστε ότι, ένα μονοπάτι P μπορεί να κατασκευαστεί από το αντίστοιχο δέντρο μονοπατιού $T(p, p')$, βέλτιστα σε παράλληλο περιβάλλον, εφαρμόζοντας την Euler διαδρομή τεχνική.

Έστω το εξασθενημένο αριστερό δυαδικό δέντρο $T_{blr}(G)$ του md-δέντρου $T(G)$ του γραφήματος G. Με σκοπό την κατασκευή των δέντρων μονοπατιών βέλτιστα σε ένα παράλληλο περιβάλλον, παράγουμε μια ακολουθία από τετράγωνες/καμπυλωτές αγκύλες (δηλαδή από παρενθέσεις και αγκύλες) για κάθε κόμβο του δέντρου $T_{blr}(G)$. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιούμε δύο τύπους από αγκύλες: τετράγωνες αγκύλες (ή αγκύλες) "[" και "]" και καμπυλωτές αγκύλες (ή παρενθέσεις) "(" και ")". Τα δέντρα μονοπατιών κατασκευάζονται βρίσκοντας ζευγάρια που ταιριάζουν από τετράγωνες αγκύλες και ζευγάρια που ταιριάζουν από καμπυλωτές αγκύλες ανεξάρτητα. Σημειώστε ότι, δοθέντος μιας ακολουθίας από αγκύλες που αντιστοιχούν στις κορυφές ενός γραφήματος G, τα δέντρα μονοπατιών και, συνεπώς, η επικάλυψη με μονοπάτια του γραφήματος G μπορεί να κατασκευαστεί βέλτιστα. Τα ταιριάσματα αυτά των αγκυλών αντιστοιχούν στις ακμές ενός δέντρου μονοπατιού. Ειδικότερα, για τις κορυφές a και b, αναγνωρίζουμε μια ακμή ως εξής:

- $\overset{a^p}{[}\ \overset{b^l}{]}$ μια ακμή που ενώνει την κορυφή a με τον πατέρα της $b = p(a)$ ως ένα αριστερό παιδί·
- $\overset{a^p}{[}\ \overset{b^r}{]}$ μια ακμή που ενώνει την κορυφή a με τον πατέρα της $b = p(a)$ ως ένα δεξί παιδί·
- $\overset{a^l}{(}\ \overset{b^p}{)}$ μια ακμή που ενώνει την κορυφή b με τον πατέρα της $a = p(b)$ ως ένα αριστερό παιδί·
- $\overset{a^r}{(}\ \overset{b^p}{)}$ μια ακμή που ενώνει την κορυφή b με τον πατέρα της $a = p(b)$ ως ένα δεξί παιδί.

8.2.3 Κάτω Όριο για την Πολυπλοκότητα Χρόνου

Στην εργασία [85] το ακόλουθο θεώρημα έχει αποδειχτεί για την κλάση των cographs.

Θεώρημα 8.1 (Nakano et al. [85]). *Κάθε αλγόριθμος που καθορίζει το πλήθος των μονοπατιών σε μια επικάλυψη με μονοπάτια ή αναφέρει την επικάλυψη με μονοπάτια σε ένα n-κορυφών cograph* *που αναπαριστάται από το cotree πρέπει να εκτελεστεί σε $\Omega(\log n)$ CREW χρόνο ακόμα και εάν ένα άπειρο πλήθος από επεξεργαστές είναι διαθέσιμο.*

Σημειώστε ότι η κλάση των P_4-sparse γραφημάτων είναι μια κατάλληλη υπερκλάση των cographs και ότι το md-δέντρο του $T(G)$ ενός P_4-sparse γραφήματος G περιέχει P-κόμβους, S-κόμβους και N-κόμβους· εάν το δέντρο $T(G)$ έχει μόνο P ή S-κόμβους τότες το δέντρο $T(G)$ συμπίπτει με τον ορισμό ενός cotree (δείτε [18]). Επομένως, λόγω του προηγούμενου θεωρήματος, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πόρισμα 8.1 (Nakano et al. [85]). *Κάθε αλγόριθμος που καθορίζει το πλήθος των μονοπατιών σε μια επικάλυψη με μονοπάτια ή αναφέρει την επικάλυψη με μονοπάτια σε ένα n-κορυφών P_4-sparse γράφημα που αναπαριστάται από το md-δέντρο του πρέπει να εκτελεστεί σε $\Omega(\log n)$ CREW χρόνο ακόμα και εάν ένα άπειρο πλήθος από επεξεργαστές είναι διαθέσιμο.*

8.3 Επικάλυψη με Μονοπάτια σε P_4-sparse Γραφήματα

Σε αυτή την ενότητα παραθέτουμε κάποιες ιδέες για τον υπολογισμό της επικάλυψης με μονοπάτια για ένα P_4-sparse γράφημα G. Υποθέτουμε ότι το εξασθενημένο αριστερό δυαδικό δέντρο $T_{blr}(G)$ του γραφήματος G είναι δεδομένο. Επικεντρώνουμε το ενδιαφέρον μας στους εσωτερικούς N-κόμβους εφόσον οι περιπτώσεις για τους P-κόμβους και S-κόμβους έχουν ήδη αποδειχτεί [72].

Έστω t ένας εσωτερικός N-κόμβος του δέντρου $T_{blr}(G)$. Έστω $\mathcal{P}$ η επικάλυψη με μονοπάτια του γραφήματος $G[M(t)]$ και έστω $\lambda(t)$ το πλήθος των μονοπατιών στο $\mathcal{P}$, δηλαδή, $\lambda(t) = |\mathcal{P}|$· Υπενθυμίζουμε ότι, το $M(t)$ είναι η αυτοτελή-μονάδα που αντιστοιχεί στον κόμβο t και αποτελείται από όλες τις κορυφές του γραφήματος G που σχετίζονται με το υποδέντρο του $T(G)$ με ρίζα τον κόμβο t.

Έστω $G(t) = (S, K, R)$ ένα πρώτο αραχνοειδές γράφημα με $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_\ell\}$ και $K = \{k_1, k_2, \ldots, k_\ell\}$, όπου $|S| = |K| = \ell$. Σημειώστε ότι, στο πρώτο αραχνοειδές γράφημα $G(t)$ υπάρχει μια συνάρτηση f τέτοια ώστε $f(s_i) = k_i, 1 \leq i \leq \ell$. Εάν το R είναι κενό, στην Εξ. (8.1) θέτουμε $\lambda(r) = 0$· αλλιώς, $R = \{r\}$ και $d = \lambda(r)$, και έστω $\mathcal{Q} = \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_d\}$ μια επικάλυψη με μονοπάτια του γραφήματος $G[M(r)]$. Για κάθε i, $1 \leq i \leq d$, έστω q_i και q_i' τα άκρα του μονοπατιού Q_i. Τότε, για τον υπολογισμό της επικάλυψης με μονοπάτια $\mathcal{P}$ του $G[M(t)]$ διακρίνουμε τις ακόλουθες δύο περιπτώσεις.

Περίπτωση 1. $G(t) = (S, K, R)$ είναι ένα αραιό αραχνοειδές γράφημα.

Εάν το σύνολο R είναι κενό, τότε το γράφημα $G[S \cup K]$ περιέχει $k = \lceil \frac{\ell}{2} \rceil$ μονοπάτια. Έτσι, για ℓ άρτιο τα $\ell/2$ μονοπάτια, στην επικάλυψη με μονοπάτια του γραφήματος $G[M(t)]$ είναι τα ακόλουθα:

$$\mathcal{P} = \{[s_1 k_1 k_2 s_2], [s_3 k_3 k_4 s_4], \ldots, [s_{\ell-1} k_{\ell-1} k_\ell s_\ell]\}. \tag{8.2}$$

Για ℓ περιττό, τα $(\ell+1)/2$ μονοπάτια στην επικάλυψη με μονοπάτια του γραφήματος $G[M(t)]$ είναι:

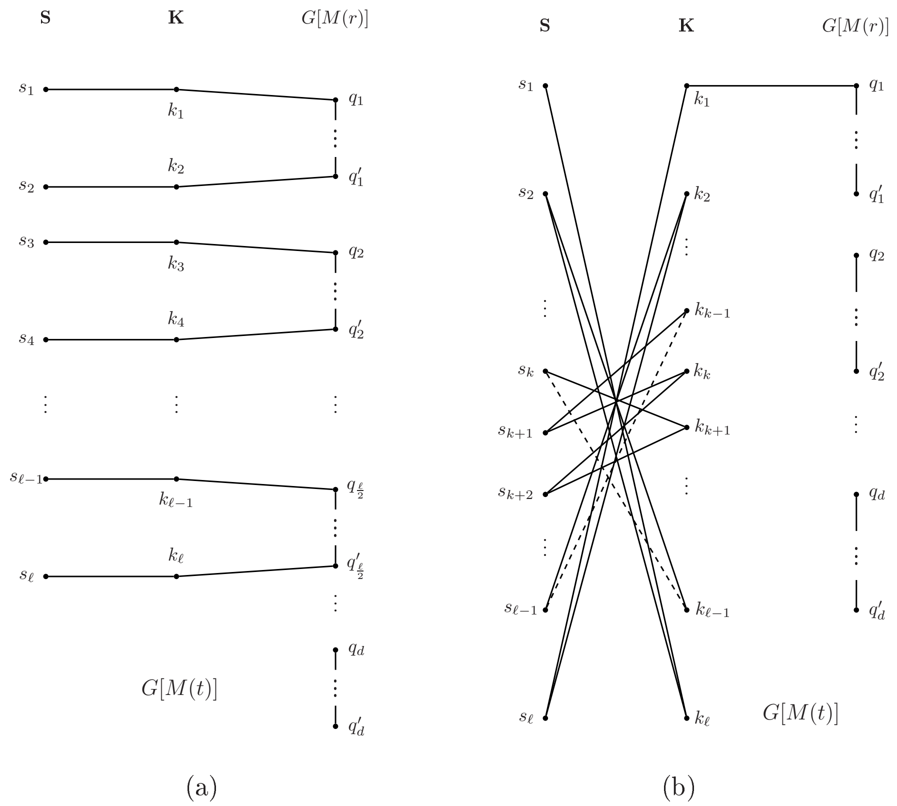
$$\mathcal{P} = \{[s_1 k_1 k_2 s_2], [s_3 k_3 k_4 s_4], \ldots, [s_{\ell-2} k_{\ell-2} k_{\ell-1} s_{\ell-1}], [s_\ell k_\ell]\}. \tag{8.3}$$

Εάν $R = \{r\}$, τότε τα μονοπάτια του $G[M(t)]$ αποκτούνται ενώνοντας τα άκρα από μερικά μονοπάτια Q_i του $G[M(r)]$ με τις κορυφές των k μονοπατιών του γραφήματος $G[S \cup K]$. Έτσι, εάν $k \leq d$ (δείτε για παράδειγμα το Σχήμα 8.2 (a)) και ℓ είναι άρτιο έχουμε:

$$\mathcal{P} = \{[s_1 k_1 q_1 \ldots q_1' k_2 s_2], \ldots, [s_{\ell-1} k_{\ell-1} q_k \ldots q_k' k_\ell s_\ell], Q_{k+1}, Q_{k+2}, \ldots, Q_d\}. \tag{8.4}$$

Εάν $k \leq d$ και ℓ είναι περιττό έχουμε:

$$\mathcal{P} = \{[s_1 k_1 q_1 \ldots q_1' k_2 s_2], \ldots, [s_{\ell-2} k_{\ell-2} q_{k-1} \ldots q_{k-1}' k_{\ell-1} s_{\ell-1}], [s_\ell k_\ell q_k \ldots q_k'], Q_{k+1}, Q_{k+2}, \ldots, Q_d\}. \tag{8.5}$$



Σχήμα 8.2: Εικονογράφηση της επικάλυψης με μονοπάτια (a) ενός αραιού αραχνοειδούς γραφήματος και (b) ενός πυκνού αραχνοειδούς γραφήματος.

Ειδάλλως, εάν $k > d$ τότε τα μονοπάτια που εμφανίζονται στην επικάλυψη με μονοπάτια του $G[M(t)]$ αποκτούνται, ενώνοντας τα d μονοπάτια του γραφήματος $G[S \cup K]$ με τα d μονοπάτια του $G[M(r)]$. Τα υπόλοιπα $k - d$ μονοπάτια του $G[S \cup K]$ παραμένουν τα ίδια. Συνεπώς, σε αυτή την περίπτωση και για ℓ άρτιο έχουμε:

$$\mathcal{P} = \{[s_1 k_1 q_1 \dots q_1' k_2 s_2], \dots, [s_{2d-1} k_{2d-1} q_d \dots q_d' k_{2d} s_{2d}], \dots, [s_{\ell-1} k_{\ell-1} k_\ell s_\ell]\}. \tag{8.6}$$

Εάν $k > d$ και ℓ είναι περιττό τα μονοπάτια στην επικάλυψη με μονοπάτια του $G[M(t)]$ είναι:

$$\mathcal{P} = \{[s_1 k_1 q_1 \dots q_1' k_2 s_2], \dots, [s_{2d-1} k_{2d-1} q_d \dots q_d' k_{2d} s_{2d}], \dots, [s_{\ell-2} k_{\ell-2} k_{\ell-1} s_{\ell-1}], [s_\ell k_\ell]\}. \tag{8.7}$$

Περίπτωση 2. $G(t) = (S, K, R)$ είναι ένα πυκνό αραχνοειδές γράφημα.

Έστω $k = \lceil \frac{\ell}{2} \rceil$. Εάν το R είναι κενό, τότε το γράφημα $G[S \cup K]$ είναι ένα hamiltonian γράφημα και κάθε ακμή στο Hamilton μονοπάτι έχει το ένα άκρο του στο σύνολο S και το άλλο άκρο στο σύνολο K (δηλαδή, δεν υπάρχει Hamilton μονοπάτι που περιέχει μια ακμή και με τα δύο άκρα στο σύνολο K, δείτε για παράδειγμα το Σχήμα 8.2 (b)). Έτσι, εάν το ℓ είναι ένας περιττός αριθμός έχουμε,

$$\mathcal{P} = \{[s_1 k_\ell s_2 k_{\ell-1} \dots s_k k_{k-1} s_{k+1} k_k s_{k+2} k_{k-2} \dots s_{\ell-1} k_2 s_\ell k_1]\}, \tag{8.8}$$

ειδάλλως, (το ℓ είναι άρτιο)

$$\mathcal{P} = \{[s_1 k_\ell s_2 k_{\ell-1} \dots s_k k_{k+1} s_{k+2} k_k s_{k+1} k_{k-1} \dots s_{\ell-1} k_2 s_\ell k_1]\}. \tag{8.9}$$

Εάν το $R = \{r\}$, τότε το Hamilton μονοπάτι του $G[S \cup K]$ συνδέεται με το μονοπάτι Q_1 από το γράφημα $G[M(r)]$. Έτσι, τα μονοπάτια που εμφανίζονται στην επικάλυψη με μονοπάτια $\mathcal{P}$ του

$G[M(t)]$ είναι:

$$\mathcal{P} = \{[s_1 k_\ell s_2 k_{\ell-1} \dots s_{\ell-1} k_2 s_\ell k_1 q_1 \dots q_1'], Q_2, Q_3, \dots, Q_d\}. \tag{8.10}$$

Και στις δύο περιπτώσεις, τα μονοπάτια του $\mathcal{P}$ σχηματίζουν μια επικάλυψη με μονοπάτια στο γράφημα $G[M(t)]$. Έπεται ότι, σε ένα ακολουθιακό περιβάλλον και δοθέντος τα μονοπάτια του $\mathcal{Q}$ από το γράφημα $G[M(r)]$, μπορούμε να περιγράψουμε μια συνάρτηση που υπολογίζει μια επικάλυψη με μονοπάτια σε έναν N-κόμβο t του δέντρου $T_{blr}(G)$· καλούμε μια τέτοια συνάρτηση *Path_Spider*$(u, \mathcal{Q})$. Αποθηκεύουμε τα μονοπάτια του $\mathcal{P}$ σε μια διπλά συνδεδεμένη λίστα που περιέχει δείκτες στο πρώτο και στο τελευταίο στοιχείο για κάθε μονοπάτι (δηλαδή, δείχνουν στα άκρα των μονοπατιών). Τότε, χρησιμοποιώντας βασικές και κλασικές πράξεις λίστας και βασιζόμενοι στις Εξισώσεις (8.2)–(8.10), μπορούμε να συγχωνεύσουμε την επικάλυψη με μονοπάτια $\mathcal{Q}$ του γραφήματος $G[M(r)]$ με την επικάλυψη με μονοπάτια του γραφήματος $G[S \cup K]$.

8.3.1 Ένας Απλός Βέλτιστος Ακολουθιακός Αλγόριθμος

Έστω ένα P_4-sparse γράφημα G με n κορυφές και m ακμές και έστω $T(G)$ το md-δέντρο του G. Σημειώνουμε ότι το δέντρο $T(G)$ μπορεί να κατασκευαστεί σε γραμμικό χρόνο, δηλαδή, σε $O(n+m)$ χρόνο, χρησιμοποιώντας έναν από τους γνωστούς αλγόριθμους των [33, 80]. Ο ακόλουθος αλγόριθμος βασίζεται στην συνάρτηση Path_Spider που εφαρμόζεται σε έναν N-κόμβο. Για έναν P-κόμβο ή έναν S-κόμβο ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί κατάλληλες συναρτήσεις που προτάθηκαν στην εργασία [72]. Ο δικός μας αλγόριθμος επικάλυψης με μονοπάτια είναι ο ακόλουθος:

Αλγόριθμος **Sequential_Minimum_Path_Cover**

1. Κατασκεύασε το md-δέντρο $T(G)$ του G και, τότε, υπολόγισε το δέντρο $T_{blr}(G)$;
2. Για κάθε εσωτερικό κόμβο t του $T_{blr}(G)$, υπολόγισε αναδρομικά την επικάλυψη με μονοπάτια του γραφήματος $G(t)$ ως εξής:
   if ο t είναι ένας P-κόμβος ή ένας S-κόμβος **then**

   εφάρμοσε την συνάρτηση που περιγράφεται στην εργασία [72] και υπολόγισε την επικάλυψη με μονοπάτια του γραφήματος $G(t)$;

   else { ο t είναι ένας N-κόμβος }

   εφάρμοσε την συνάρτηση Path_Spider$(t, \mathcal{Q})$ και συγχώνευσε τα μονοπάτια της επικάλυψης με μονοπάτια $\mathcal{Q}$ του γραφήματος $G[R]$ με τα μονοπάτια της επικάλυψης με μονοπάτια του γραφήματος $G[S \cup K]$;

Αλγόριθμος 12: Sequential_Minimum_Path_Cover

Σημειώστε ότι το πρώτο βήμα απαιτεί $O(n+m)$ χρόνο, ενώ το δεύτερο βήμα εκτελείται σε $O(n)$ χρόνο. Επιπλέον, δεν είναι δύσκολο να δει κανίς ότι ο υπολογισμός του δέντρου $T_{blr}(G)$ δοθέντος του δέντρου $T(G)$ στο Βήμα 1 μπορεί να γίνει σε $O(n)$ time. Επομένως όλα τα βήματα, εκτός από την κατασκευή του md-δέντρου $T(G)$, απαιτούν $O(n)$ χρόνο. Σημειώνουμε ότι ένα παρόμοιο αποτέλεσμα με το ακόλουθο θεώρημα έχει αποδειχτεί στην εργασία [53] χρησιμοποιώντας ένα διαφορετικό δέντρο αναπαράστασης ενός P_4-sparse γραφήματος.

Θεώρημα 8.2. *Έστω ένα P_4-sparse γράφημα G με n κορυφές και m ακμές. Η επικάλυψη με μονοπάτια του γραφήματος G μπορεί να υπολογιστεί σε $O(n+m)$ χρόνο.*

8.4 Τα Δέντρα Μονοπατιών των P_4-sparse Γραφημάτων

Παρόλο που ο ακολουθιακός αλγόριθμος είναι αρκετά απλός, ένας παραλληλισμός του αλγορίθμου χρειάζεται χρόνο ανάλογο του ύψους του δέντρου $T_{blr}(G)$, δηλαδή $O(n)$, αφού το ύψος του md-δέντρου $T(G)$ είναι $O(n)$. Για να αποκτήσουμε έναν αποτελεσματικό παράλληλο αλγόριθμο, εκμεταλλευόμαστε την δομή των δέντρων μονοπατιών και μια τεχνική ταιριάσματος αγκυλών που παρουσιάστηκε στην εργασία [85], όπως ήδη αναφέραμε στην Ενότητα 2 του κεφαλαίου.

Έστω $P_1 = [p_1, \ldots, p_1']$ και $P_2 = [p_2, \ldots, p_2']$ να είναι δύο μονοπάτια και έστω $T(p_1, p_1')$ και $T(p_2, p_2')$ τα δύο δέντρα μονοπατιών των P_1 και P_2, αντίστοιχα, ριζωμένα στους κόμβους $p_1'' \in P_1$ και $p_2'' \in P_2$. Υποθέστε ότι μια κορυφή $v \notin P_1$ χρειάζεται να ενωθεί με το μονοπάτι P_1. Για την περίπτωση αυτή, αναζητούμε για τις κατάλληλες τροποποιήσεις του δέντρου μονοπατιού $T(p_1, p_1')$. Έστω ένας κόμβος u του δέντρου μονοπατιού $T(p_1, p_1')$, δηλαδή $u \in P_1$, που έχει το πολύ ένα παιδί, αριστερό ή δεξί, στο δέντρο $T(p_1, p_1')$. Τότε η κορυφή v θα τοποθετηθεί είτε ως ένα παιδί (αριστερό ή δεξί) του κόμβου u ή ως ρίζα ενός νέου δέντρου μονοπατιού που έχει τον κόμβο p_1'' του δέντρου $T(p_1, p_1')$ ως (αριστερό ή δεξί) παιδί.

Υποθέστε τώρα ότι η κορυφή $v \notin P_1 \cup P_2$ χρειάζεται να γεφυρώσει τα δύο μονοπάτια P_1 και P_2, δηλαδή η κορυφή v συνδέεται με ένα άκρο, έστω p_1, του μονοπατιού P_1 και με ένα άλλο άκρο, έστω p_2, του μονοπατιού P_2. Σε αυτή την περίπτωση, η κορυφή v ενώνει τα δύο δέντρα μονοπατιών $T(p_1, p_1')$ και $T(p_2, p_2')$ έχοντας τον κόμβο p_1'' ως το αριστερό παιδί και τον κόμβο p_2'' ως το δεξί παιδί. Έτσι, η κορυφή v είναι η ρίζα του νέου δέντρου μονοπατιού.

Σύμφωνα με τον τρόπο με τον οποίο θα πρέπει ένα δέντρο μονοπατιού να κατασκευαστεί, που περιγράφηκε προηγουμένως, μια κορυφή μπορεί να χαρκτηριστεί ως κορυφή εισαγωγής ή κορυφή γεφύρωσης. Βασιζόμενοι σε αυτό τον χαρακτηρισμό, μια λεπτομερή περιγραφή ενός δέντρου μονοπατιού που αντιστοιχεί σε ένα υποδέντρο του $T_{blr}(G)$ με ρίζα έναν P-κόμβο ή έναν S-κόμβο έχει παρουσιαστεί στην εργασία [85]· δηλαδή κάθε κορυφή χρησιμοποιείται για να γεφυρώσει δύο δέντρα μονοπατιών ή να ενωθεί σε ένα δέντρο μονοπατιού. Ακολουθώντας την σημειολογία των [85], ένα φύλλο που δεν είναι ούτε κορυφή εισαγωγής αλλά ούτε και κορυφή γεφύρωσης και δεν ανήκει στο σύνολο $S \cup K$ του πρώτου αραχνοειδούς γραφήματος στο δέντρο $T_{blr}(G)$, αναφέρεται ως αρχική κορυφή. Εδώ περιγράφουμε την διαδικασία σύμφωνα με την οποία παράγεται ένα δέντρο μονοπατιού που αντιστοιχεί σε ένα υποδέντρο του $T_{blr}(G)$ με ρίζα έναν N-κόμβο. Γενικότερα, τα μονοπάτια της επικάλυψης με μονοπάτια ενός πρώτου αραχνοειδούς γραφήματος θεωρούνται ως δυαδικά δέντρα, που το καθένα είναι ριζωμένο σε ένα από τα άκρα του και γι' αυτό το λόγο, τα μονοπάτια αυτά (που περιγράφηκαν στη Ενότητα 3) θεωρούνται ως δέντρα μονοπατιών.

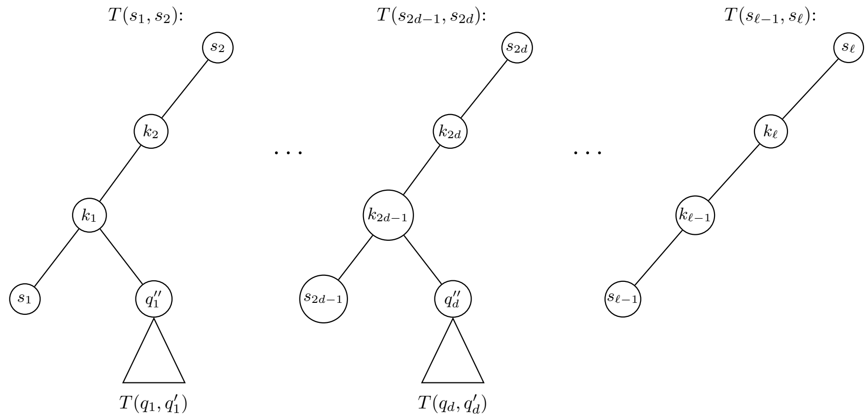
Έστω ένα P_4-sparse γράφημα G και έστω το εξασθενημένο αριστερό δυαδικό δέντρο του $T_{blr}(G)$. Έστω ένας N-κόμβος t του δέντρου $T_{blr}(G)$ και έστω το πρώτο αραχνοειδές γράφημα $G(t) = (S, K, R)$ με $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_\ell\}$ και $K = \{k_1, k_2, \ldots, k_\ell\}$, όπου $|S| = |K| = \ell$. Κάθε μονοπάτι της επικάλυψης με μονοπάτια του $G(t)$, όπως περιγράφηκε στην Ενότητα 3, θεωρείται ως δέντρο μονοπατιού με ρίζα την κορυφή x, όπου η κορυφή x είναι το πιο δεξιό άκρο του μονοπατιού έτσι ώστε $x \in S \cup K$, που έχει μόνο ένα αριστερό παιδί στο δέντρο μονοπατιού. Πιο συγκεκριμένα, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις σύμβωνα με το γράφημα $G(t)$.

Περίπτωση 1. $G(t) = (S, K, R)$ είναι ένα αραιό αραχνοειδές γράφημα.

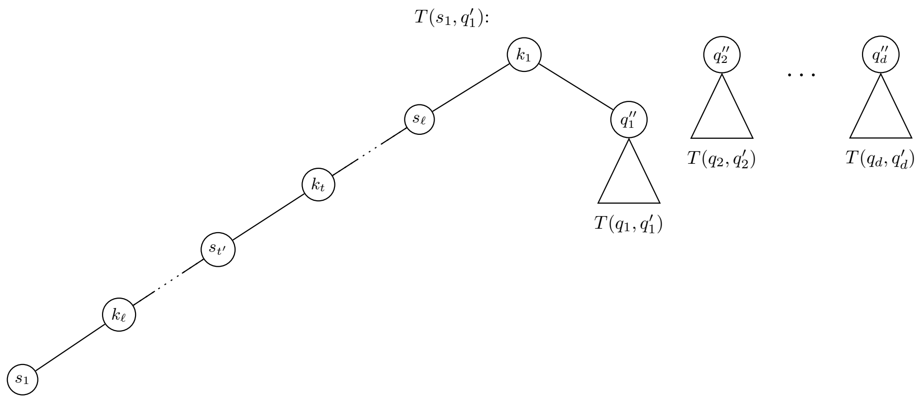
Έστω $R = \emptyset$ και $k = \lceil \frac{\ell}{2} \rceil$. Εάν ο αριθμός ℓ είναι άρτιος τότε κάθε μονοπάτι P_i, $1 \leq i \leq k$ της επικάλυψης του γραφήματος $G[S \cup K]$ έχει την ακόλουθη μορφή:

$$P_i = [s_{2i-1} k_{2i-1} k_{2i} s_{2i}], \qquad \text{για } 1 \leq i \leq k.$$

Τότε καθένα από τα $\ell/2$ δέντρα μονοπατιών $T(s_{2i-1}, s_{2i})$ είναι ριζωμένα στην κορυφή s_{2i} και καθένας από τους εσωτερικούς κόμβους των δέντρων $T(s_{2i-1}, s_{2i})$ έχει μόνο ένα αριστερό παιδί. Επιπλέον, καθένα από τα δέντρα μονοπατιών έχει την κορυφή s_{2i-1} ως το πιο αριστερό φύλλο και



Σχήμα 8.3: Τα αντίστοιχα δέντρα μονοπατιών του Σχήματος 8.2(a).



Σχήμα 8.4: Τα αντίστοιχα δέντρα μονοπατιών του Σχήματος 8.2(b).

αποτελείται από τέσσερις κορυφές. Εάν ο αριθμός ℓ είναι περιττός τότε μόνο το k-στο μονοπάτι διαφέρει από την προηγούμενη περίπτωση και έχει την ακόλουθη μορφή: $P_k = [s_\ell k_\ell]$. Το αντίστοιχο δέντρο μονοπατιού $T(s_\ell, k_\ell)$ αποτελείται από δύο κορυφές· η ρίζα του δέντρου είναι η κορυφή k_ℓ και η κορυφή s_ℓ είναι το αριστερό της παιδί.

Έστω $R = \{r\}$. Σύμφωνα με την σχέση μεταξύ του πλήθους των μονοπατιών στην επικάλυψη με μονοπάτια του γραφήματος $G[M(r)]$, $d = \lambda(r)$, και $k = \lceil \frac{\ell}{2} \rceil$ (δείτε την Ενότητα 3), η ρίζα του αντίστοιχου δέντρου μονοπατιού του $G[M(r)]$, γίνεται το δεξί παιδί της κορυφής k_{2i-1} στα δέντρα μονοπατιών όπως περιγράφηκε προηγουμένως (δείτε το Σχήμα 8.3). Σημειώστε ότι εάν ο αριθμός ℓ είναι περιττός και $d \geq k$ τότε η ρίζα των αντίστοιχων δέντρων μονοπατιών του $G[M(r)]$, μετατρέπεται σε δεξί παιδί της κορυφής k_ℓ.

Περίπτωση 2. $G(t) = (S, K, R)$ είναι ένα πυκνό αραχνοειδές γράφημα.

Έστω $R = \emptyset$. Το δέντρο μονοπατιού $T(s_1, k_1)$ είναι ένα ριζωμένο δέντρο, όπως περιγράφεται στις Εξισώσεις 8.8–8.9, με ρίζα την κορυφή k_1, που είναι η πιο δεξιά κορυφή του Hamilton μονοπατιού του $G[S \cup K]$. Κάθε εσωτερικός κόμβος του δέντρου $T(s_1, k_1)$ έχει μόνο ένα αριστερό παιδί: την κορυφή που εμφανίζεται στα αριστερά της στη ακολουθία των Εξισώσεων 8.8–8.9. Κ κορυφή s_1 είναι το πιο αριστερό φύλλο του δέντρου $T(s_1, k_1)$.

Έστω $R = \{r\}$. Τότε, όπως φαίνεται στην Εξ. 8.10 ένα μονοπάτι της επικάλυψης με μονοπάτια του $G[M(r)]$ ενώνεται με την κορυφή k_1. Έστω q_1'' η ρίζα του δέντρου μονοπατιού $T(q_1, q_1')$ του γραφήματος $G[M(r)]$. Τότε το τροποποιημένο δέντρο μονοπατιού $T(s_1, q_1')$ είναι παρόμοιο με το δέντρο $T(s_1, k_1)$· η μοναδική διαφορά είναι ότι κάνουμε την κορυφή q_1'' το πιο δεξιό παιδί της ρίζας k_1 του δέντρου $T(s_1, q_1')$ (δείτε το Σχήμα 8.4).

8.5 Ακολουθία Αγκυλών σε N-κόμβους

Σε αυτή την ενότητα περιγράφουμε τον υπολογισμό της ακολουθίας αγκυλών πιο λεπτομερώς χρησιμοποιώντας το δέντρο $T_{blr}(G)$. Έστω ένας κόμβος t του δέντρου $T_{blr}(G)$ και έστω t_l και t_r το αριστερό και δεξί παιδί του, αντίστοιχα. Συμβολίζουμε με $B(t)$ μια ακολουθία αγκυλών που αντιστοιχεί στον κόμβο t. Εάν a είναι μια κορυφή του συνόλου $M(t_r)$ τότε συσχετίζουμε μια καμπυλωτή αγκύλη $\overset{a^p}{)}$ για να βρούμε έναν πατέρα της a σε ένα δέντρο μονοπατιού που αντιστοιχεί σε ένα μονοπάτι του $G[M(t_l)]$. Καμπυλωτές αγκύλες $\overset{a^l}{(}$ ή $\overset{a^r}{(}$ χρησιμοποιούνται για να βρίσκουν ένα οποιοδήποτε αριστερό ή δεξί παιδί, αντίστοιχα, αφού αυτές θα ταιριάξουν με τις κατάλληλες αγκύλες στην ακολουθία. Κάθε μια από της τετράγωνες αγκύλες $\overset{a^l}{]}$ και $\overset{a^r}{]}$ ταιριάζει μια τετράγωνη αγκύλη στην ακολουθία που σχετίζεται με τον κόμβο t_l. Αξίζει να σημειωθεί ότι, κάθε ταίριασμα αγκύλης αντιστοιχεί σε μια ακμή του δέντρου μονοπατιού.

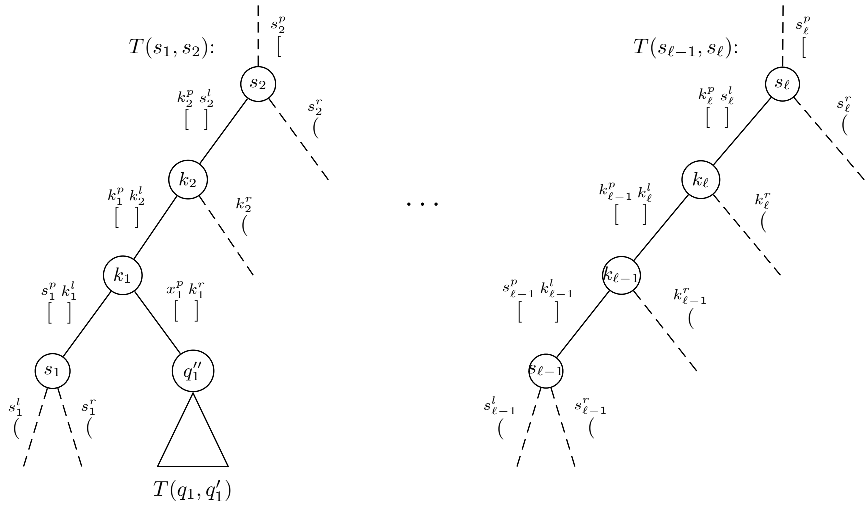
Έστω ένας εσωτερικός κόμβος t του δέντρου $T_{blr}(G)$ και έστω $B(t)$ η ακολουθία αγκυλών. Υποθέστε ότι ένα ταίριασμα αγκυλών στην $B(t)$ παράγει ένα δέντρο μονοπατιού $T(p_1, p_2)$. Εάν μια κορυφή a του δέντρου $T(p_1, p_2)$ δεν έχει αριστερό αλλά ούτε και δεξί παιδί στο δέντρο $T(p_1, p_2)$ τότε υπάρχει μια μη-ταιριασμένη αγκύλη, $\overset{a^l}{(}$ ή $\overset{a^r}{(}$, αντίστοιχα, στην ακολουθία $B(t)$. Παρόμοια, εάν η κορυφή a είναι η ρίζα του δέντρου μονοπατιού $T(p_1, p_2)$, τότε υπάρχει μια μη-ταιριασμένη αγκύλη, $\overset{a^p}{[}$, στην ακολουθία $B(t)$. Επομένως, αφού η δομή των δέντρων μονοπατιών είναι γνωστή για έναν N-κόμβο t (δείτε την Ενότητα 4), μπορεί να παραχθεί μια κατάλληλη ακολουθία αγκυλών $B(t)$, χρησιμοποιώντας τις παραπάνω παρατηρήσεις.

Έστω ένας N-κόμβος t του δέντρου $T_{blr}(G)$ και έστω $G(t) = (S, K, R)$ το αντίστοιχο πρώτο αραχνοειδές γράφημα με $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_\ell\}$ και $K = \{k_1, k_2, \ldots, k_\ell\}$, όπου $|S| = |K| = \ell$. Εάν $R = \{r\}$ τότε συμβολίζουμε με d το πλήθος των μονοπατιών σε μια επικάλυψη με μονοπάτια του γραφήματος $G[M(r)]$, δηλαδή, $d = \lambda(r)$, και με $B(r)$ την ακολουθία αγκυλών του κόμβου r. Συμβολίζουμε με $B(S \cup K)$ την ακολουθία αγκυλών που παράγονται από τις κορυφές του συνόλου $S \cup K$. Έχουμε την ακόλουθη συνέπεια για την ακολουθία αγκυλών $B(t)$.

$$B(t) = \begin{cases} B(S \cup K) & \text{if } R = \emptyset, \\ B(r) \cdot B(S \cup K) & \text{if } R = \{r\}. \end{cases} \tag{8.11}$$

Έτσι, δοθέντος της ακολουθίας $B(r)$, χρειαζόμαστε να περιγράψουμε την ακολουθία αγκυλών $B(S \cup K)$. Για να απλοποιήσουμε την περιγραφή μας, για κάθε δέντρο μονοπατιού $T(p_i, p_i')$, με $M(i)$ συμβολίζουμε την ακολουθία των αγκυλών για την οποία κάθε ζεύγος κορυφών που ταιριάζει αντιστοιχεί σε μια κμή του δέντρου $T(p_i, p_i')$. Όπως προαναφέρθηκε, χρειαζόμαστε να δηλώσουμε με $\Pi(i)$ τις μη-ταιριασμένες αγκύλες που αντιστοιχούν στην ρίζα του δέντρου $T(p_i, p_i')$ (επειδή δεν έχει πατέρα) ή σε κορυφές του δέντρου $T(p_i, p_i')$ που δεν έχουν ένα παιδί (αριστερό ή δεξί) στο $T(p_i, p_i')$. Για παράδειγμα, το i-στο δέντρο μονοπατιού που περιέχει μόνο μια κορυφή x έχει $M(i) = \emptyset$, αφού δεν υπάρχει καμία ακμή στο δέντρο μονοπατιού και $\Pi(i) = \overset{x^p}{[}\ \overset{x^l}{(}\ \overset{x^r}{(}$, αφού η κορυφή x είναι η ρίζα του δέντρου και δεν έχει ούτε αριστερό ούτε και δεξί παιδί. Όπως και προηγουμένως, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για το πρώτο αραχνοειδές γράφημα $G(t)$.

Περίπτωση 1. $G(t) = (S, K, R)$ είναι ένα αραιό αραχνοειδές γράφημα.



Σχήμα 8.5: Οι αγκύλες των δέντρων μονοπατιών του Σχήματος 8.3.

Εάν το σύνολο R είναι κενό, τότε το γράφημα $G[S \cup K]$ περιέχει $k = \lceil \frac{\ell}{2} \rceil$ μονοπάτια. Έτσι, εάν ℓ είναι άρτιος αριθμός, χρειαζόμαστε να συσχετίσουμε στον κόμβο t μια κατάλληλη ακολουθία αγκυλών που να παράγει $k = \frac{\ell}{2}$ δέντρα μονοπατιών. Πιο συγκεκριμένα, τα μονοπάτια κατασκευάζονται από ένα δάσος δέντρων μονοπατιών, που το κάθε δέντρο έχει ρίζα μια κορυφή από το σύνολο S, και με κάθε εσωτερική κορυφή του δέντρου μονοπατιού να έχει μόνο αριστερό παιδί. Επιπλέον, κάθε δέντρο έχει μια κορυφή από το σύνολο S ως το πιο αριστερό φύλλο και αποτελείται από τέσσερις κορυφές, που ικανοποιούν την Εξ. (8.2). Έστω:

$$M(i) \;=\; \overset{s^p_{2i-1}}{[} \;\; \overset{k^l_{2i-1}}{]} \;\; \overset{k^p_{2i-1}}{[} \;\; \overset{k^l_{2i}}{]} \;\; \overset{k^p_{2i}}{[} \;\; \overset{s^l_{2i}}{]}, \quad 1 \leq i \leq \frac{\ell}{2}, \quad \text{and}$$

$$\Pi(i) \;=\; \overset{s^l_{2i-1}}{(} \;\; \overset{s^r_{2i-1}}{(} \;\; \overset{k^r_{2i-1}}{(} \;\; \overset{k^r_{2i}}{(} \;\; \overset{s^p_{2i}}{[} \;\; \overset{s^r_{2i}}{(}, \quad 1 \leq i \leq \frac{\ell}{2}.$$

όπου η ακολουθία $M(i)$ παράγει τα δέντρα μονοπατιών όπως περιγράφηκαν προηγουμένως. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, ένα ζεύγος $\overset{s^p_{2i-1}}{[} \;\; \overset{k^l_{2i-1}}{]}$ κάνει την κορυφή vertex s_{2i-1} το αριστερό παιδί της κορυφής k_{2i-1}, ενώ οι αγκύλες $\overset{k^p_{2i}}{[} \; \overset{s^l_{2i}}{]}$ εννοούν ότι η κορυφή k_{2i} είναι το αριστερό παιδί της κορυφής s_{2i}. Η ακολουθία αγκυλών που παράγεται από το $\Pi(i)$ αποτελείται μόνο από αριστερές αγκύλες, καμπυλωτές ή τετράγωνες, επειδή κάθε κορυφή των $\frac{\ell}{2}$ δέντρων πρέπει να είναι ικανή να έχει δύο παιδιά καν να συνδέεται με έναν πατέρα επίσης. Πιο λεπτομερώς, οι αγκύλες $\overset{s^l_{2i-1}}{(} \;\; \overset{s^r_{2i-1}}{(}$ εννοούν ότι η κορυφή s_{2i-1} μπορεί να έχει ένα αριστερό και ένα δεξί παιδί, αντίστοιχα, καθώς είναι το πιο αριστερό φύλλο στο αντίστοιχο δέντρο. Οι κορυφές k_{2i-1} και k_{2i} ήδη έχουν ένα αριστερό παιδί και γι' αυτό χρειάζεται μόνο να προσθέσουμε τις αγκύλες $\overset{k^r_{2i-1}}{(}$ και $\overset{k^r_{2i}}{(}$. Επειδή είναι η ρίζα του δέντρου, η κορυφή s_{2i}, μπορεί να έχει ένα δεξί παιδί και/ή να γίνει η ίδια παιδί, προσθέτουμε τις αγκύλες $\overset{s^p_{2i}}{[} \; \overset{s^r_{2i}}{(}$. Επομένως, η ακολουθία αγκυλών που αντιστοιχούν στις κορυφές του συνόλου $S \cup K$ είναι η ακόλουθη:

$$B(S \cup K) = M(1) \cdot M(2) \cdots M(\frac{\ell}{2}) \cdot \Pi(1) \cdot \Pi(2) \cdots \Pi(\frac{\ell}{2}).$$

Εάν ο αριθμός ℓ είναι περιττός, υπάρχουν $k = \frac{(\ell+1)}{2}$ μονοπάτια στην επικάλυψη με μονοπάτια του γραφήματος $G[M(t)]$, και επομένως $\frac{(\ell+1)}{2}$ δέντρα μοοπατιών παράγονται, σύμφωνα με την Εξ. (8.3).

Τα $\frac{(\ell-1)}{2}$ δέντρα μονοπατιών αποτελούνται από τέσσερις κορυφές, παρόμοια με την περίπτωση όπου ο αριθμός ℓ είναι άρτιος, και ένα ακόμα δέντρο μονοπατιού, έστω T_{q_k}, που έχει την ρίζα s_ℓ, και την κορυφή k_ℓ σαν αριστερό παιδί. Έτσι, τώρα χρειάζεται να διακρίνουμε την ακολουθία αγκυλών που παράγει το δέντρο T_{q_k} από την ακολουθία που παράγει τα υπόλοιπα $\frac{(\ell-1)}{2}$ δέντρα. Επομένως, τώρα έχουμε:

$$
\begin{aligned}
M(i) &= \overset{s^p_{2i-1}}{[}\ \overset{k^l_{2i-1}}{]}\ \overset{k^p_{2i-1}}{[}\ \overset{k^l_{2i}}{]}\ \overset{k^p_{2i}}{[}\ \overset{s^l_{2i}}{]}, \ \ 1 \leq i \leq \frac{\ell-1}{2},\\
M(\frac{\ell+1}{2}) &= \overset{k^p_\ell}{[}\ \overset{s^l_\ell}{]},\\
\Pi(i) &= \overset{s^l_{2i-1}}{(}\ \overset{s^r_{2i-1}}{(}\ \overset{k^r_{2i-1}}{(}\ \overset{k^r_{2i}}{(}\ \overset{s^p_{2i}}{[}\ \overset{s^r_{2i}}{(}, \ \ 1 \leq i \leq \frac{\ell-1}{2}, \ \ \text{and}\\
\Pi(\frac{\ell+1}{2}) &= \overset{k^l_\ell}{(}\ \overset{k^r_\ell}{(}\ \overset{s^p_\ell}{[}\ \overset{s^r_\ell}{(}.
\end{aligned}
$$

Έτσι, η ακολουθία αγκυλών που σχετίζεται με τις κορυφές του $S \cup K$ είναι η ακόλουθη:

$$B(S \cup K) = M(1) \cdot M(2) \cdots M(\frac{\ell-1}{2}) \cdot M(\frac{\ell+1}{2}) \cdot \Pi(1) \cdot \Pi(2) \cdots \Pi(\frac{\ell-1}{2}) \cdot \Pi(\frac{\ell+1}{2}).$$

Εάν $R = \{r\}$, τότε τα μονοπάτια του $G[M(t)]$ αποκτούνται από την ένωση των άκρων των k μονοπατιών Q_i του γραφήματος $G[M(r)]$ με τις κορυφές των k μονοπατιών του $G[S \cup K]$ και συγκεκριμένα με τις κορυφές του συνόλου K. Με σκοπό να επιτύχουμε αυτό τον σκοπό, χρειαζόμαστε να ενώσουμε τα δέντρα μονοπατιών που αντιστοιχούν στα μονοπάτια Q_i του $G[M(r)]$ με τα δέντρα μονοπατιών που αντιστοιχούν στα μονοπάτια του $G[S \cup K]$ κατάλληλα και με τέτοιο τρόπο ώστε η ενδοδιαδεταγμένη διάσχιση του τελικού δέντρου να παρέχει τα σωστά μονοπάτια. Έτσι, εάν $k \leq d$ (δείτε για παράδειγμα το Σχήμα 8.2 (a)) και ο αριθμός ℓ είναι άρτιος έχουμε:

$$
\begin{aligned}
M(i) &= \overset{s^p_{2i-1}}{[}\ \overset{k^l_{2i-1}}{]}\ \overset{k^p_{2i-1}}{[}\ \overset{k^l_{2i}}{]}\ \overset{k^p_{2i}}{[}\ \overset{s^l_{2i}}{]}\ \overset{k^r_{2i-1}}{]}, \ \ 1 \leq i \leq \frac{\ell}{2}, \ \ \text{and}\\
\Pi(i) &= \overset{s^l_{2i-1}}{(}\ \overset{s^r_{2i-1}}{(}\ \overset{k^r_{2i}}{(}\ \overset{s^p_{2i}}{[}\ \overset{s^r_{2i}}{(}, \ \ 1 \leq i \leq \frac{\ell}{2}.
\end{aligned}
$$

Συγκρίνωντας τις ακολουθίες $M(i)$ και $\Pi(i)$ με τις αντίστοιχες εκφράσεις στην περίπτωση που το σύνολο R είναι κενό, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η αγκύλη $\overset{k^r_{2i-1}}{(}$ δε εμφανίζεται στο $\Pi(i)$ αλλά προστίθεται στην $M(i)$ ως $\overset{k^r_{2i-1}}{]}$. Αυτό γίνεται επειδή χρειαζόμαστε να συνδέσουμε ένα δέντρο μονοπατιού του $G[M(r)]$ ως δεξί παιδί της κορυφής k_{2i-1} με το i-στο δέντρο μονοπατιού. Τώρα έχουμε:

$$B(S \cup K) = M(1) \cdot M(2) \cdots M(\frac{\ell}{2}) \cdot \Pi(1) \cdot \Pi(2) \cdots \Pi(\frac{\ell}{2}). \tag{8.12}$$

Εάν ο αριθμός ℓ είναι περιττός, τότε υπάρχει ένα δέντρο μονοπατιού T_{q_k} που αποτελείται από δυο κορυφές· την ρίζα s_ℓ και το αριστερό παιδί της k_ℓ. Συνεπώς, εάν $k \leq d$, ένα δέντρο του γραφήματος $G[M(r)]$ συνδέεται ως αριστερό παιδί της κορυφής k_ℓ του δέντρου T_{q_k} και θα έχουμε:

$$
\begin{aligned}
M(i) &= \overset{s^p_{2i-1}}{[}\ \overset{k^l_{2i-1}}{]}\ \overset{k^p_{2i-1}}{[}\ \overset{k^l_{2i}}{]}\ \overset{k^p_{2i}}{[}\ \overset{s^l_{2i}}{]}\ \overset{k^r_{2i-1}}{]}, \ \ 1 \leq i \leq \frac{\ell-1}{2},\\
M(\frac{\ell+1}{2}) &= \overset{k^p_\ell}{[}\ \overset{s^l_\ell}{]}\ \overset{k^l_\ell}{]},\\
\Pi(i) &= \overset{s^l_{2i-1}}{(}\ \overset{s^r_{2i-1}}{(}\ \overset{k^r_{2i}}{(}\ \overset{s^p_{2i}}{[}\ \overset{s^r_{2i}}{(}, \ \ 1 \leq i \leq \frac{\ell-1}{2} \ \ \text{and}\\
\Pi(\frac{\ell+1}{2}) &= \overset{k^r_\ell}{(}\ \overset{s^p_\ell}{[}\ \overset{s^r_\ell}{(}.
\end{aligned}
$$

Επομένως, η ακολουθία αγκυλών που αναθέτεται στις κορυφές του συνόλου $S \cup K$ είναι η παρακάτω έκφραση:

$$B(S \cup K) = M(1) \cdot M(2) \cdots M(\frac{\ell-1}{2}) \cdot M(\frac{\ell+1}{2}) \cdot \Pi(1) \cdot \Pi(2) \cdots \Pi(\frac{\ell-1}{2}) \cdot \Pi(\frac{\ell+1}{2}).$$

Εάν $k > d$ τότε τα μονοπάτια που εμφανίζονται στην επικάλυψη με μονοπάτια του γραφήματος $G[M(t)]$ αποκτούνται ενώνοντας τα d μονοπάτια του $G[S \cup K]$ με τα d μονοπάτια του γραφήματος $G[M(r)]$. Τα υπόλοιπα $k - d$ μονοπάτια του $G[S \cup K]$ παραμένουν ως έχει. Σαν αποτέλεσμα, σε αυτή την περίπτωση και για ℓ άρτιο, η αγκύλη $\overset{k^r_{2i-1}}{]}$ εμφανίζεται μόνο στην ακολουθία $M(i)$ όπου $1 \le i \le d$. Υπενθυμίζουμε ότι η αγκύλη $\overset{k^r_{2i-1}}{]}$ εννοεί ότι η κορυφή k_{2i-1} μπορεί να έχει ένα δεξί παιδί που είναι η ρίζα του δέντρου μονοπατιού που αντιστοιχεί σε ένα μονοπάτι του γραφήματος $G[M(r)]$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
M(i) &= \overset{s^p_{2i-1}}{[}\ \overset{k^l_{2i-1}}{]}\ \overset{k^p_{2i-1}}{[}\ \overset{k^l_{2i}}{]}\ \overset{k^p_{2i}}{[}\ \overset{s^l_{2i}}{]}\ \overset{k^r_{2i-1}}{]}, \quad 1 \le i \le d,\\
M(i) &= \overset{s^p_{2i-1}}{[}\ \overset{k^l_{2i-1}}{]}\ \overset{k^p_{2i-1}}{[}\ \overset{k^l_{2i}}{]}\ \overset{k^p_{2i}}{[}\ \overset{s^l_{2i}}{]}, \quad d < i \le \frac{\ell}{2},\\
\Pi(i) &= \overset{s^l_{2i-1}}{(}\ \overset{s^r_{2i-1}}{(}\ \overset{k^r_{2i}}{(}\ \overset{s^p_{2i}}{[}\ \overset{s^r_{2i}}{(}, \quad 1 \le i \le d \ \text{ and}\\
\Pi(i) &= \overset{s^l_{2i-1}}{(}\ \overset{s^r_{2i-1}}{(}\ \overset{k^r_{2i-1}}{(}\ \overset{k^r_{2i}}{(}\ \overset{s^p_{2i}}{[}\ \overset{s^r_{2i}}{(}, \quad d < i \le \frac{\ell}{2}.
\end{aligned}$$

Η ακολουθία των αγκυλών των κορυφών του $S \cup K$ έχει την ακόλουθη έκφραση:

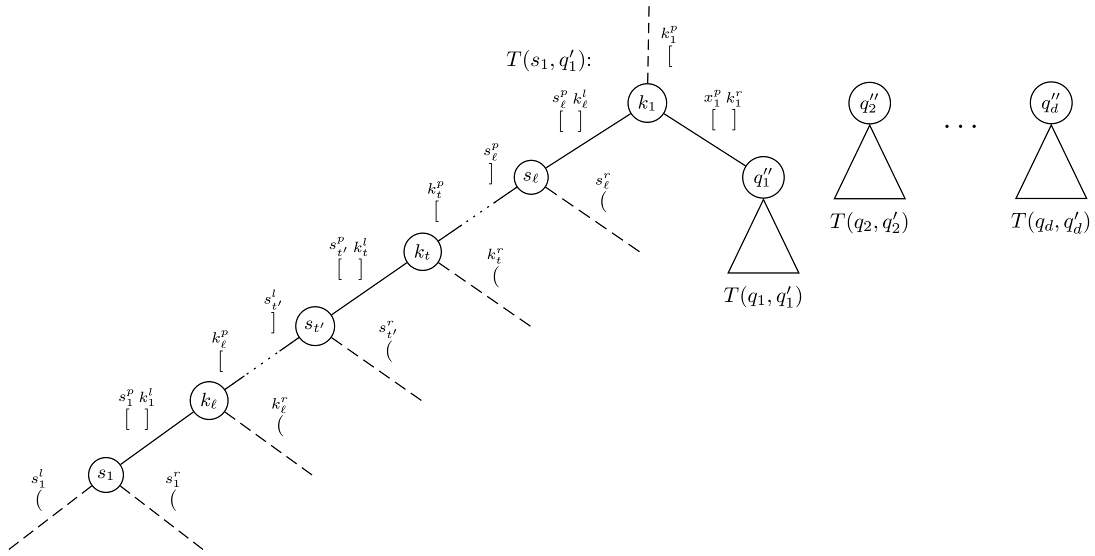
$$B(S \cup K) = M(1) \cdot M(2) \cdots M(\frac{\ell}{2}) \cdot \Pi(1) \cdot \Pi(2) \cdots \Pi(\frac{\ell}{2}).$$

Ειδάλλως, εάν $k > d$ και ο αριθμός ℓ είναι περιττός, ακολουθία των αγκυλών που παράγεται είναι παρόμοια όπως προηγουμένως· δηλαδή, d δέντρα μονοπατιών που αντιστοιχούν στα μονοπάτια του $G[S \cup K]$ ενώνονται με τα d δέντρα που αντιστοιχούν στα μονοπάτια του $G[M(r)]$. Τα υπόλοιπα $k-d$ δέντρα που αντιστοιχούν στα μονοπάτια του γραφήματος $G[S \cup K]$ παραμένουν τα ίδια. Όταν το ℓ είναι περιττό, υπάρχει ένα δέντρο μονοπατιού που παράγει ένα μονοπάτι από το γράφημα $G[S \cup K]$ που αποτελείται μόνο από δύο κορυφές. Για να αποκτήσουμε τα σωστά μονοπάτια του γραφήματος $G[M(t)]$ αναθέτουμε:

$$\begin{aligned}
M(i) &= \overset{s^p_{2i-1}}{[}\ \overset{k^l_{2i-1}}{]}\ \overset{k^p_{2i-1}}{[}\ \overset{k^l_{2i}}{]}\ \overset{k^p_{2i}}{[}\ \overset{s^l_{2i}}{]}\ \overset{k^r_{2i-1}}{]}, \quad 1 \le i \le d,\\
M(i) &= \overset{s^p_{2i-1}}{[}\ \overset{k^l_{2i-1}}{]}\ \overset{k^p_{2i-1}}{[}\ \overset{k^l_{2i}}{]}\ \overset{k^p_{2i}}{[}\ \overset{s^l_{2i}}{]}, \quad d < i \le \frac{\ell-1}{2},\\
M(\frac{\ell+1}{2}) &= \overset{k^p_{\ell}}{[}\ \overset{s^l_{\ell}}{]},\\
\Pi(i) &= \overset{s^l_{2i-1}}{(}\ \overset{s^r_{2i-1}}{(}\ \overset{k^r_{2i}}{(}\ \overset{s^p_{2i}}{[}\ \overset{s^r_{2i}}{(}, \quad 1 \le i \le d,\\
\Pi(i) &= \overset{s^l_{2i-1}}{(}\ \overset{s^r_{2i-1}}{(}\ \overset{k^r_{2i-1}}{(}\ \overset{k^r_{2i}}{(}\ \overset{s^p_{2i}}{[}\ \overset{s^r_{2i}}{(}, \quad d < i \le \frac{\ell-1}{2}, \ \text{ and}\\
\Pi(\frac{\ell+1}{2}) &= \overset{k^l_{\ell}}{(}\ \overset{k^r_{\ell}}{(}\ \overset{s^p_{\ell}}{[}\ \overset{s^r_{\ell}}{(}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, η ακολουθία αγκυλών των κορυφών του συνόλου $S \cup K$ δίνεται από την παρακάτω έκφραση:

$$B(S \cup K) = M(1) \cdot M(2) \cdots M(\frac{\ell-1}{2}) \cdot M(\frac{\ell+1}{2}) \cdot \Pi(1) \cdot \Pi(2) \cdots \Pi(\frac{\ell-1}{2}) \cdot \Pi(\frac{\ell+1}{2}).$$



Σχήμα 8.6: Οι αγκύλες των δέντρων μονοπατιών του Σχήματος 8.4.

Περίπτωση 2. $G(t) = (S, K, R)$ είναι ένα πυκνό αραχνοειδές γράφημα.

Έστω $k = \lceil \frac{\ell}{2} \rceil$. Εάν το σύνολο R είναι κενό, τότε το γράφημα $G[S \cup K]$ είναι ένα hamiltonian γράφημα και κάθε ακμή στο Hamilton μονοπάτι έχει ένα άκρο από το σύνολο S και το άλλο άκρο από το σύνολο K. Επομένως, η ακολουθία αγκυλών που περιγράφεται παρακάτω παράγει ένα και μοναδικό δέντρο μονοπατιών. Η πρώτη ακμή του αντίστοιχου μονοπατιού είναι αυτή που ενώνει την πρώτη κορυφή από το σύνολο S, έστω s_1, με την τελευταία κορυφή από το σύνολο K, έστω k_ℓ. Η δεύτερη ακμή είναι αυτή που ενώνει την κορυφή k_ℓ με την κορυφή s_2, ενώ η τρίτη ενώνει την s_2 με την $k_{\ell-1}$ και ούτω καθεξής. Θυμηθείται ότι, εξ' ορισμού, δεν υπάρχει ακμή από μια κορυφή s_j του συνόλου S σε μια κορυφή k_j του συνόλου K. Έτσι χρειαζόμαστε να διακρίνουμε δυο περιπτώσεις, που εξαρτώνται από την τιμή της ℓ. Εάν ο αριθμός ℓ είναι περιττός, τότε $k = \frac{\ell+1}{2}$. Έστω,

$$\begin{aligned} M(1) &= \overset{s_1^p}{[}\ \overset{k_\ell^l}{]}\ \overset{k_\ell^p}{[}\ \overset{s_2^l}{]}\ \overset{s_2^p}{[}\ \overset{k_{\ell-1}^l}{]} \cdots \overset{s_k^p}{[}\ \overset{k_{k-1}^l}{]}\ \overset{k_{k-1}^p}{[}\ \overset{s_{k+1}^l}{]}\ \overset{s_{k+1}^p}{[}\ \overset{k_k^l}{]}\ \overset{k_k^p}{[}\ \overset{s_{k+2}^l}{]}\ \overset{s_{k+2}^p}{[}\ \overset{k_{k-2}^l}{]} \cdots \overset{s_{\ell-1}^p}{[}\ \overset{k_2^l}{]}\ \overset{k_2^p}{[}\ \overset{s_\ell^l}{]}\ \overset{s_\ell^p}{[}\ \overset{k_1^l}{]}, \\ \Pi(1) &= \overset{s_1^l}{(}\ \overset{s_1^r}{(}\ \overset{k_\ell^r}{(}\ \overset{s_2^r}{(} \cdots \overset{k_2^r}{(}\ \overset{s_\ell^r}{(}\ \overset{k_1^p}{[}\ \overset{k_1^r}{(}. \end{aligned}$$

Σημειώστε ότι η παραπάνω ακολουθία αγκυλών $M(1)$ παράγει ένα δέντρο μονοπατιού που έχει κορυφές με μόνο ένα αριστερό παιδί. Έτισ ώστε να κάνουμε κάθε κορυφή ικανή να έχει στη συνέχεια και ένα δεξί παιδί προσθέτουμε την $\Pi(1)$ που αποτελείται από δεξιές αγκύλες, καμπυλωτές ή τετράγωνες. Έτσι,

$$B(S \cup K) = M(1) \cdot \Pi(1).$$

Επειδή η κορυφή s_1, που είναι το πιο αριστερό φύλλο του δέντρου, μπορεί να έχει και αριστερό και δεξί παιδί, χρησιμοποιούμε τις αγκύλες $\overset{s_1^l}{(}\ \overset{s_1^r}{(}$. Επιπλέον, χρησιμοποιούμε τις τετράγωνες αγκύλες $\overset{k_1^p}{[}$ επειδή μια κορυφή k_1 είναι η ρίζα του δέντρου μονοπατιού και μπορεί επίσης να γίνει η ίδια παιδί.

Ειδάλλως, εάν ο αριθμός ℓ είναι άρτιος, τότε $k = \frac{\ell}{2}$. Τώρα θα έχουμε:

$$\begin{aligned} M(1) &= \overset{s_1^p}{[}\ \overset{k_\ell^l}{]}\ \overset{k_\ell^p}{[}\ \overset{s_2^l}{]}\ \overset{s_2^p}{[}\ \overset{k_{\ell-1}^l}{]} \cdots \overset{s_k^p}{[}\ \overset{k_{k+1}^l}{]}\ \overset{k_{k+1}^p}{[}\ \overset{s_{k+2}^l}{]}\ \overset{s_{k+2}^p}{[}\ \overset{k_k^l}{]}\ \overset{k_k^p}{[}\ \overset{s_{k+1}^l}{]}\ \overset{s_{k+1}^p}{[}\ \overset{k_{k-1}^l}{]} \cdots \overset{s_{\ell-1}^p}{[}\ \overset{k_2^l}{]}\ \overset{k_2^p}{[}\ \overset{s_\ell^l}{]}\ \overset{s_\ell^p}{[}\ \overset{k_1^l}{]}, \\ \Pi(1) &= \overset{s_1^l}{(}\ \overset{s_1^r}{(}\ \overset{k_\ell^r}{(}\ \overset{s_2^r}{(} \cdots \overset{k_2^r}{(}\ \overset{s_\ell^r}{(}\ \overset{k_1^p}{[}\ \overset{k_1^r}{(}. \end{aligned}$$

Όπως περιγράφηκε προηγουμένως, χρειαζόμαστε να κάνουμε κάθε εσωτερικό κόμβο/κορυφή ικανή να συνδεθεί με ένα δεξί παιδί, και επομένως προσθέτουμε στην ακολουθία $M(1)$ την ακολουθία $\Pi(1)$, ως εξής:

$$B(S \cup K) = M(1) \cdot \Pi(1).$$

Εάν $R = \{r\}$, τότε το Hamilton μονοπάτι του $G[S \cup K]$ συνδέεται με το μονοπάτι Q_1 του γραφήμαατος $G[M(r)]$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} M(1) &= \overset{s_1^p}{[}\ \overset{k_\ell^l}{]}\ \overset{k_\ell^p}{[}\ \overset{s_2^l}{]}\ \overset{s_2^p}{[}\ \overset{k_{\ell-1}^l}{]}\ \cdots\ \overset{s_{\ell-1}^p}{[}\ \overset{k_2^l}{]}\ \overset{k_2^p}{[}\ \overset{s_\ell^l}{]}\ \overset{s_\ell^p}{[}\ \overset{k_1^l}{]}\ \overset{k_1^r}{]}, \\ \Pi(1) &= \overset{s_1^l}{(}\ \overset{s_1^r}{(}\ \overset{k_\ell^r}{(}\ \overset{s_2^r}{(}\ \cdots\ \overset{k_2^r}{(}\ \overset{s_\ell^r}{(}\ \overset{k_1^p}{[}\ . \end{aligned}$$

Σημειώστε ότι, η παραπάνω ακολουθία αγκυλών $M(1)$ είναι παρόμοια με εκείνη της περίπτωσης όπου το σύνολο R είναι κενό. Η μοναδική διαφορά είναι ότι χρειαζόμαστε την αγκύλη $\overset{k_1^r}{]}$ έτσι ώστε ν κάνουμε το δέντρο μονοπατιού που αντιστοιχεί στο μονοπάτι Q_1 του γραφήματος $G[M(r)]$ το δεξί παιδίτης ρίζας, δηλαδή της κορυφής k_1, του δέντρου που αντιστοιχεί στο Hamilton μονοπάτι του γραφήματος $G[S \cup K]$. Σημειώστε ότι η ακολουθία αγκυλών $\Pi(1)$ που προστίθεται στην $M(1)$ έχει μια λιγότερη αγκύλη, σε σχέση με την περίπτωση που το σύνολο R είναι κενό. Η αγκύλη που λείπει είναι η $\overset{k_1^r}{(}$, και αυτό γιατί η κορυφή k_1 ήδη έχει ένα δεξί παιδί. Ως αποτέλεσμα, έχουμε:

$$B(S \cup K) = M(1) \cdot \Pi(1).$$

8.6 Βέλτιστος Παράλληλος Αλγόριθμος

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε έναν βέλτιστο παράλληλο αλγόριθμο για την επικάλυψη με μονοπάτια σε ένα P_4-sparse γράφημα G. Δοθέντος του md-δέντρου $T(G)$ ενός P_4-sparse γραφήματος G με n κορυφές, ο αλγόριθμος χρειάζεται $O(\log n)$ χρόνο και $O(n/\log n)$ EREW-PRAM επεξεργαστές.

Στο πρώτο βήμα του αλγορίθμου κάνουμε δυαδικό το δέντρο $T(G)$, και αποκτάμε το δέντρο $T_b(G)$. Σημειώστε ότι ένα υποδέντρο του $T(G)$ με ρίζα έναν N-κόμβο δεν χρειάζεται να γίνει δυαδικό και επομένως κάνουμε δυαδικό κάθε υποδέντρο με ρίζα έναν P-κόμβο ή έναν S-κόμβο. Για να κάνουμε το δυαδικό δέντρο αριστερό, δηλαδή το δέντρο $T_{bl}(G)$, υπλογίζουμε το πλήθος $L(t)$ για κάθε εσωτερικό κόμβο t του δέντρου $T_b(G)$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε το πλήθος $\lambda(t)$ των μονοπατιών στην επικάλυψη με μονοπάτια του γραφήματος $G[M(t)]$ για κάθε εσωτερικό κόμβο t του δέντρου $T_{bl}(G)$ σύμφωνα με την Εξ. 8.1. Πριν αναθέσουμε οποιαδήποτε ακολουθία αγκυλών, χρεια ̃ζεται να κατασκευάσουμε το δέντρο $T_{blr}(G)$, που είναι το εξασθενημένο αριστερό δυαδικό δέντρο. Τότε, για κάθε εσωτερικό N-κόμβο t του δέντρου $T_{blr}(G)$ αναθέτουμε μια ακολουθία αγκυλών $B(S \cup K)$ που υπολογίζεται για τις κορυφές του συνόλου $S \cup K$ οι οποίες είναι φύλλα και παιδιά του κόμβου t στο δέντρο $T_{blr}(G)$. Με αυτό τον τρόπο, παράγουμε μια ακολουθία αγκυλών $B(root)$ της ρίζας του δέντρου $T_{blr}(G)$. Τελικά, κατασκευάζουμε τα δέντρα μονοπατιών βρίσκοντας όλα τα ταιριάσματα της ακολουθίας $B(root)$ και τότε επιστρέφουμε μια ενδοδιατεταγμένη διάσχιση των δέντρων μονοπατιών. Θυμίζουμε ότι το τελευταίο βήμα αντιστοιχεί στην επικάλυψη με μονοπάτια του γραφήματος G. Ο αλλγόριθμος *Parallel_Minimum_Path_Cover* δίνεται με λεπτομέρεια παρακάτω.

Σημειώνουμε εδώ ότι το Βήμα 5 χρειάζεται μια μετά-επεξεργασίας (post-processing) συνάρτηση. Η ανάθεση αγκυλών σε έναν S-κόμβο, όπως περιγράφεται στην εργασία [85], μπορεί να οδηγήσει σε δέντρα μονοπατιών που θα παράγουν μονοπάτια με ακμές που δεν εμφανίζονται στο γράφημα

Parallel_Minimum_Path_Cover

Είσοδος: Το md-δέντρο $T(G)$ ενός P_4-sparse γραφήματος G;

Έξοδος: Μια επικάλυψη με μονοπάτια του P_4-sparse γραφήματος G;

1. Κατασκεύασε το δυαδικό δέντρο $T_b(G)$ και υπολόγισε το πλήθος $L(t)$ για κάθε εσωτερικό κόμβο t του δέντρου $T_b(G)$ όπως επίσης και το αριστερό δυαδικό δέντρο $T_{bl}(G)$;

2. Υπολόγισε το πλήθος των μονοπατιών $\lambda(t)$ στην επικάλυψη με μονοπάτια του γραφήματος $G[M(t)]$ για κάθε εσωτερικό κόμβο t του δέντρου $T_{bl}(G)$ και το εξασθενημένο αριστερό δυαδικό δέντρο $T_{blr}(G)$;

3. Για κάθε N-κόμβο t_i του δέντρου $T_{blr}(G)$, υπολόγισε την ακολουθία των αγκυλών $B(S_i \cup K_i)$ όπως περιγράφηκε στην Ενότητα 5;

4. Παρήγαγε την ακολουθία των αγκυλών $B(root)$ της ρίζας του δέντρου $T_{blr}(G)$ λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι, για κάθε εσωτερικό κόμβο $t \in T_{blr}(G)$,

   if ο κόμβος t είναι ένας P-κόμβος ή ένας S-κόμβος **then**

   υπολόγισε την $B(t)$ σύμφωνα με το εάν κάθε παιδί του κόμβου t είναι κορυφή εισαγωγής ή γεφύρωσης [85];

   else {*ο κόμβος t είναι ένας N-κόμβος*}

   υπολόγισε την $B(t)$ σύμφωνα με την Εξίσωση (8.11);

5. Κατασκεύασε τα δέντρα μονοπατιών βρίσκοντας τα ταιριάσματα των αγκυλών της ακολουθίας $B(root)$;

6. Επέστρεψε μια επικάλυψη με μονοπάτια από μια ενδοδιατεταγμένη διάσχιση στα δέντρα μονοπατιών;

Αλγόριθμος 13: Parallel_Minimum_Path_Cover

G. Αυτή η συνάρτηση που εφαρμόζεται μετά την παραγωγή της ακολουθίας αγκυλών διορθώνει οποιαδήποτε τέτοια *illegal* δέντρα μονοπατιών που είχαν παραχθεί από τα παιδιά ενός S-κόμβου. Παρόλα αυτά, τα σωστά δέντρα μονοπατιών υπολογίζονται με μια λεπτομερή τεχνική, ως ένα μετά-επεξεργασίας βήμα, που προτείνεται στην εργασία [85]. Συνοψίζοντας, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 8.3. *Έστω ένα P_4-sparse γράφημα G με n κορυφές και έστω $T(G)$ το md-δέντρο του. Μια επικάλυψη με μονοπάτια του γραφήματος G μπορεί να υπολογιστεί βέλτιστα σε χρόνο και εργασία σε $O(\log n)$ χρόνο, χρησιμοποιώντας $O(n/\log n)$ EREW-PRAM επεξεργαστές.*

Απόδειξη. Από το Πόρισμα 8.1 πιστοποιούμε την βελτιστότητα ως προς τον χρόνο και την εργασία του αλγορίθμου μας. Τα Βήματα 1 και 2 απαιτούν $O(n/\log n)$ EREW-PRAM επεξεργαστές και τρέχουν σε $O(\log n)$ χρόνο (δείτε Λήμμα 8.2). Τα Βήματα 3 και4 μπορούν να επιτευχθούν εναλλάσσοντας τις αγκύλες με αριθμούς και επομένως μπορούν να βρεθούν βέλτιστα χρησιμοποιώντας μια ενδοδιατεταγμένη διάσχιση πάνω σε αριθμούς στο δέντρο $T_{blr}(G)$. Το Βήμα 5 μπορεί να εκτελεστεί σε $O(\log n)$ χρόνο χρησιμοποιώντας $O(n/\log n)$ EREW επεξεργαστές βρίσκοντας όλα τα ζεύγη που ταιριάζουν της ακολουθίας $B(root)$. Σημειώστε ότι η ακολουθία $B(root)$, όπου

$root$ είναι η ρίζα του δέντρου του $T_{blr}(G)$, έχει $O(n)$ αγκύλες εφόσον το δέντρο $T_{blr}(G)$ έχει $O(n)$ κόμβους. Σημειώστε επίσης ότι κάθε αντιστοιχεία αγκύλης ενός εσωτερικού κόμβου $t \in T_{blr}(G)$ δεν ξεπερνά το πλήθος των παιδιών του t στο δέντρο $T_{blr}(G)$. Τέλος, το Βήμα 7 επιτυγχάνεται με Euler διαδρομές πάνω στα δέντρα μονοπατιών. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα σέντρα μονοπατιών περιέχουν n κόμβους, αφού οι κόμβοι τους είναι ακριβώς οι κορυφές του γραφήματος G. ∎

8.7 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάσαμε έναν βέλτιστο αλγόριθμο για την αναφορά (και την εύρεση του πλήθους) του μικρότερου σε πλήθους αριθμού κορυφών από ανεξάρτητα-κορυφών μονοπάτια που επικαλύπτουν τις κορυφές ενός P_4-sparse γραφήματος. Συγκεκριμένα, δοθέντος του md-δέντρου ενός P_4-sparse γραφήματος G με n κορυφές και m ακμές, χρησιμοποιούμε κλασικές τεχνικές συρρίκνωσεις δέντρου και ταιριάσματος αγκυλών [85], και περιγράφουμε έναν βέλτιστο παράλληλο αλγόριθμο που τρέχει σε $O(\log n)$ χρόνο με $O(n/\log n)$ επεξεργαστές στο EREW PRAM μοντέλο. Τα αποτελέσματά μας γενικεύουν προηγούμενα αποτελέσματα [85], και επεκτείνουν την οικογένεια των τέλειων γραφημάτων που επιδέχονται βέλτιστη λύση για το πρόβλημα της επικάλυψης με μονοπάτια.

Ένα άλλο ενδιαφέρον πρόβλημα που σχετίζεται με το πρόβλημα της επικάλυψης με μονοπάτια είναι το πρόβλημα επικάλυψης με τελικά άκρα μονοπατιών (terminal path cover). Το πρόβλημα της επικάλυψης με τελικά άκρα μονοπατιών ενός γραφήματος G ως προς ένα υποσύνολο A του συνόλου κορυφών $V(G)$ είναι μια επικάλυψη με μονοπάτια του γραφήματος G έτσι ώστε όλες οι κορυφές του συνόλου A να είναι άκρα των μονοπατιών στην επικάλυψη. Επομένως, το πρόβλημα της επικάλυψης με μονοπάτια είναι μια ειδική περίπτωση της επικάλυψης με τελικά άκρα μονοπατιών, όπου το σύνολο A είναι το κενό σύνολο. Το πρόβλημα μπορεί να προσεγγιστεί ερευνώντας τα δέντρα μονοπατιών που ικανοποιούν τον επιπλέον περιορισμό. Μια εργασία που αφορά τις τελευταίες σκέψεις βρίσκεται σε πρόοδο και μερικά προκαταρκτικά αποτελέσματα προτείνουν ότι τα πιο αριστερά φύλλα των δέντρων μονοπατιών φαίνονται ότι αποτελούν το κλειδί για την επίλυση του προβλήματος, καθώς οι κορυφές που αντιστοιχούν σε αυτά τα φύλλα είναι άκρα των μονοπατιών στην επικάλυψη ενός γραφήματος.

Κεφαλαιο 9

Συνοψη - Επεκτασεις

9.1 Πλήθος Σκελετικών Δέντρων

Στα Κεφάλαια 2–4 παρουσιάσαμε μια γενική μέθοδο υπολογισμού του πλήθους των σκελετικών δέντρων ενός γραφήματος χρησιμοποιώντας την m-αποσύνθεση, που επέφερε έναν γραμμικό αλγόριθμο για το πρόβλημα σε P_4-tidy γραφήματα, σε $(q, q-4)$ γραφήματα για σταθερό $q \geq 4$, και σε tree-cographs. Εκμεταλλευτήκαμε τις δομικές ιδιότητες του md-δέντρου αυτών των γραφημάτων και χρησιμοποιήσαμε το Θεώρημα του πίνακα-δέντρου, Kirchhoff, ως ένα εργαλείο για την απόδειξη της ορθότητας του προτεινόμενου αλγορίθμου. Περιμένου ότι η προσέγγισή μας εφαρμόζεται και σε άλλου τύπου πρώτων γραφημάτων (εκτός από αραχνοειδή γραφήματα, πρώτα δέντρα, άχορδους κύκλους και τα συμπληρώματά τους), που θα επέτρεπε τον υπολογισμό του πλήθους των σκελετικών δέντρων και για επιπρόσθετες κλάσεις, π.χ., τα *semi-P_4-sparse* γραφήματα [35] και τα $(P_5, diamond)$-*free* graphs [15].

Επιπλέον παραθέτουμε ως ένα ανοικτό πρόβλημα την αποτελεσματική επεξεργασία των διχοτομίσιμων (split) γραφημάτων και των αρκετών επεκτάσεων τους (που γενικεύουν τα αραχνοειδή γραφήματα)· τα διχοτομίσιμα γραφήματα παίζουν ένα βασικό ρόλο στο md-δέντρο των *split-perfect* γραφημάτων [16], και γι' αυτό ο αποτελεσματικός τρόπος επεξεργασίας τους θα οδηγούσε σε έναν γρήγορο υπολογισμό του πλήθους των σκελετικών δέντρων των τελευταίων κλάσεων.

Ορισμένα άλλα ενδιαφέροντα προβλήματα απαρίθμησης αφορούν στον υπολογισμό του πλήθους των τέλειων ταιριασμάτων (perfect matchings), των κύκλων του Hamilton και των κύκλων του Euler. Πιο συγκεκριμένα, έχει δειχτεί [76] ότι το πλήθος των τέλειων ταιριασμάτων μπορεί να υπολογιστεί αποτελεσματικά σε γραφήματα που επιδέχονται μια *Pfaffian orientation*. Όπως και στο Θεώρημα του πίνακα-δέντρου, Kirchhoff, αυτή η μέθοδος εμπεριέχει τον υπολογισμό μιας ορίζουσας ακολουθούμενη από τον υπολογισμό μιας τετραγωνικής ρίζας. Έτσι, δοθέντος ενός τέτοιου προσανατολισμού (orientation), ένας αλγόριθμος που κατασκευάζει τις τεχνικές συρρίκνωσης μπορεί να οδηγήσει σε αποτελεσματικές λύσεις για άλλα συνδυαστικά προβλήματα απαρίθμησης.

Τέλος, όπως προαναφέρθηκε στην εισαγωγή, ένα ομοιόμορφο αξιόπιστο δίκτυο (ορισμένο στις εργασίες [25, 84]) πρέπει να μεγιστοποιεί το πλήθος των σκελετικών δέντρων. Έτσι, είναι ενδιαφέρον να καθορίσει κανείς τους τύπους των γραφημάτων που έχουν το μέγιστο πλήθος σκελετικών δέντρων για συγκεκριμένο πλήθος κορυφών και ακμών (δείτε [41, 99, 100]). Το πρόβλημα αυτό μπορεί να προσεγγιστεί ως μια ερώτηση βελτιστοποίησης πάνω στις s-τιμές των κορυφών, που καθορίζει ο αλγόριθμος Spanning_Trees-Number. Τέτοιου είδους μελέτη είναι αυτή την στιγμή υπό έρευνα και μερικά πρώτα αποτελέσματα αναδεικνύουν ότι η σχεδόν τακτικότητα (almost regularity) φαίνεται να είναι το κλειδί για την επίλυση του προβλήματος.

Επιπλέον, στο Κεφάλαιο 5 ορίσαμε δύο κλάσεις των αστεροειδή γραφημάτων, που ονομάζονται complete-planet και star-planet γραφήματα, και αποδείξαμε κλειστούς τύπους για τα γραφήματα της μορφής $K_n - G$, όπου το γράφημα G είναι ένα complete-planet ή ένα star-planet γράφημα. Για τον σκοπό αυτό, χρησιμοποιήσαμε το συμπληρωματικών σκελετικών δέντρων πίνακα θεώρημα όπως επίσης και κλασικές τεχνικές από την γραμμική άλγεβρα και την θεωρία πινάκων.

Η εξαγωγή κλειστών τύπων για διαφορετικούς τύπους γραφημάτων μπορεί να αποδειχτεί χρήσιμη στην αναγνώριση εκείνων των γραφημάτων που περιέχουν το μέγιστο πλήθος σκελετικών δέντρων. Τέτοιου είδους μελέτη έχει πρακτικές συνέπειες που συνδέονται με την αξιοπιστία δικτύων (δείτε για παράδειγμα [84, 75, 99]). Σε αυτό το κεφάλαιο, πετύχαμε επίσης, και αποτελέσματα μεγιστοποίησης για την κλάση των αστεροειδή γραφημάτων: αναδείξαμε τα complete-planet και star-planet γραφήματα που επιδέχονται το μέγιστο πλήθος σκελετικών δέντρων· τα αποτελέσματά μας γενικεύουν και επεκτείνουν προηγούμενα αποτελέσματα μεγιστοποίησης για την κλάση των multi-star και των multi-complete/star γραφημάτων [24].

Ο υπολογισμός της ορίζουσας του συμπληρωματικού σκελετικών δέντρων πινάκων φαίνεται ότι είναι μια ενδιαφέρουσα κατεύθυνση για τον καθορισμό του πλήθους των σκελετικών δέντρων για τις οικογένειες γραφημάτων της μορφής $K_n - G$, όπου το γράφημα G κατέχει μια έμφυτη συμμετρία. Πιο συγκεκριμένα, πολλά από τα γνωστά αποτελέσματα [9] που προέκυψαν από επιχειρήματα συνδυαστικής, μπορούν εύκολα να αποδειχτούν χρησιμοποιώντας παρόμοιες τεχνικές με αυτές που χρησιμοποιήθηκαν σε αυτό το κεφάλαιο. Επιπλέον, άλλα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στα [24, 93, 94, 107] έπονται ώς συνέπειες των θεωρημά των μας που αποδείξαμε σε αυτό το κεφάλαιο. Πιο ειδικά, πολλά γραφήματα μπορούν να εξαχθούν ως συγκεκριμένες περιπτώσεις των αστεροειδή γραφημάτων, που εξαρτώνται από το sun-γράφημα και τις τιμές των διανυσμάτων κλίκας, αστεριού, μονοπατιού, και κύκλου.

Επίσης, στο Κεφάλαιο 6 αποδείξαμε τύπους που βασίζονται στον υπολογισμό ορίζουσας για το πλήθος των σκελετικών δέντρων για μια οικογένεια γραφημάτων της μορφής $K_n^m \pm G$, και επίσης για την πιο γενική οικογένεια γραφημάτων $K_n^{(m)} \pm G$, όπου το γράφημα K_n^m (αντίστ. $K_n^{(m)}$) είναι το πλήρες πολυγράφημα με n κορυφές και ακριβώς (αντίστ. τουλάχιστον) m ακμές να ενώνουν κάθε ζεύγος κουφών και το γράφημα G είναι ένα πολυγράφημα που επάγεται από ένα σύνολο ακμών του γραφήματος K_n^m (αντίστ. $K_n^{(m)}$). Βασιζόμενοι σε αυτούς τους τύπους, αποδείξαμε κλειστούς τύπους για το πλήθος των σκελετικών δέντρων $\tau(K_n^m \pm G)$, για την περίπτωσησ που το γράφημα G είναι (i) ένα πλήρη πολυμερές γράφημα, και (ii) ένα multi-star γράφημα.

Με βάση τα αποτελέσματά μας, θα ήταν ενδιαφέρον να θεωρήσει κανείς το πρόβλημα της απόδειξης τύπων για το πλήθος των σκελετικών δέντρων $\tau(K_n^m \pm G)$ στις περιπτώσεις που το γράφημα G ανήκει σε άλλες κλάσεις απλών γραφημάτων ή πολυγραφημάτων. Το παραθέτουμε ως ένα ανοιχτό πρόβλημα.

Το πρόβλημα της μεγιστοποίησης του πλήθους των σκελετικών δέντρων έχει επιλυθεί για αρκετές οικογένειες γραφημάτων της μορφής $K_n - G$, όπου το γράφημα G είναι ένα multi-star γράφημα, η ένωση μονοπατιών και κύκλων, κτλ. (δείτε [24, 41, 93, 99]). Έτσι, ένα ενδιαφέρον ανοιχτό πρόβλημα είναι της μεγιστοποίησης του πλήθους των σκελετικών δέντρων γραφημάτων της μορφής $K_n^m \pm G$.

9.2 Δυναμικοί Αλγόριθμοι Αναγνώρισης

Στο Κεφάλαιο 7 επιλύσαμε το δυναμικό πρόβλημα αναγνώρισης για την κλάση των P_4-sparse γραφημάτων: ο σκοπός μας είναι να χειριστούμε πρόσθεση και διαγραφή ακμών/κορυφών, να ανακαλύψουμε πότε τέτοιες τροποποιήσεις επιφέρουν ένα P_4-sparse γράφημα και σε περίπτωση που αληθεύει, να ενημερώσει κατάλληλα την αναπαράσταση του γραφήματος. Η αντιμετώπισή μας βασίζεται στην διατήρηση του md-δέντρου του γραφήματος το οποίο χρησιμοποιούμε για την επίλυση του προβλήματος αναγνώρισης. Αποδεικνύουμε δομικές ιδιότητες του δέντρου και πετυχαίνουμε έναν πλήρη δυναμικό αλγόριθμο αναγνώρισης που υποστηρίζει τροποποιήσεις ακμών (εισαγωγές και διαγραφές) σε $O(1)$ χρόνο και τροποποιήσεις κορυφών (εισαγωγές και διαγραφές) σε $O(d)$ χρόνο για κορυφή βαθμού d.

Σε σχέση με την βελτιστότητα, είναι ενδιαφέρον να κατορθώσει κανείς έναν αλγόριθμο σταθερού χρόνου για την ενημέρωση του κομματιασμένου αποσυνθετικού δέντρου στην περίπτωση διαγραφής κορυφής ενός P_4-sparse γραφήματος. Επιπλέον, δυναμικοί αλγόριθμοι έχουν προταθεί που υποστηρίζουν ακμές και κορυφές τροποποιήσεις σε $O(n)$ χρόνο κατά ακμής τροποποίησης και σε $O(nm)$ χρόνο κατά κορυφής τροποποίησης για τριγωνικά (chordal) γραφήματα. Βάση αυτών των αποτελεσμάτων, ένας μπορεί να εξετάσει προς την κατεύθυνση έρευνας εάν υπάρχει πιο αποτελεσματικός δυναμικός αλγόριθμος για την κλάση των τριγωνικών (chordal) και διαστημάτων (interval) γραφημάτων (ένας ακμές-μόνο δυναμικός αλγόριθμος είναι γνωστός για τα διαστήματα (interval) γραφήματα που υποστηρίζει κάθε τροποποίηση ακμής σε $O(n \log n)$ χρόνο) και, ακόμα περισσότερο, για άλλες κλάσεις γραφημάτων.

9.3 Επικάλυψη με Μονοπάτια

Στο Κεφάλαιο 8 παρουσιάσαμε έναν βέλτιστο αλγόριθμο για την αναφορά (και την εύρεση του πλήθους) του μικρότερου σε πλήθους αριθμού κορυφών από ανεξάρτητα-κορυφών μονοπάτια που επικαλύπτουν τις κορυφές ενός P_4-sparse γραφήματος. Συγκεκριμένα, δοθέντος του md-δέντρου ενός P_4-sparse γραφήματος G με n κορυφές και m ακμές, χρησιμοποιούμε κλασικές τεχνικές συρρίκνωσεις δέντρου και ταιριάσματος αγκυλών [85], και περιγράφουμε έναν βέλτιστο παράλληλο αλγόριθμο που τρέχει σε $O(\log n)$ χρόνο με $O(n/\log n)$ επεξεργαστές στο EREW PRAM μοντέλο. Τα αποτελέσματά μας γενικεύουν προηγούμενα αποτελέσματα [85], και επεκτείνουν την οικογένεια των τέλειων γραφημάτων που επιδέχονται βέλτιστη λύση για το πρόβλημα της επικάλυψης με μονοπάτια.

Ένα άλλο ενδιαφέρον πρόβλημα που σχετίζεται με το πρόβλημα της επικάλυψης με μονοπάτια είναι το πρόβλημα επικάλυψης με τελικά άκρα μονοπατιών (terminal path cover). Το πρόβλημα της επικάλυψης με τελικά άκρα μονοπατιών ενός γραφήματος G ως προς ένα υποσύνολο A του συνόλου κορυφών $V(G)$ είναι μια επικάλυψη με μονοπάτια του γραφήματος G έτσι ώστε όλες οι κορυφές του συνόλου A να είναι άκρα των μονοπατιών στην επικάλυψη. Επομένως, το πρόβλημα της επικάλυψης με μονοπάτια είναι μια ειδική περίπτωση της επικάλυψης με τελικά άκρα μονοπατιών, όπου το σύνολο A είναι το κενό σύνολο. Το πρόβλημα μπορεί να προσεγγιστεί ερευνώντας τα δέντρα μονοπατιών που ικανοποιούν τον επιπλέον περιορισμό. Μια εργασία που αφορά τις τελευταίες σκέψεις βρίσκεται σε πρόοδο και μερικά προκαταρκτικά αποτελέσματα προτείνουν ότι τα πιο αριστερά φύλλα των δέντρων μονοπατιών φαίνονται ότι αποτελούν το κλειδί για την επίλυση του προβλήματος, καθώς οι κορυφές που αντιστοιχούν σε αυτά τα φύλλα είναι άκρα των μονοπατιών στην επικάλυψη ενός γραφήματος.

Βιβλιογραφια

[1] K. Abrahamson, N. Daboun, D.G. Kirkpatrick and T. Przytycka, A simple parallel tree contraction algorithm, *J. Algorithms* **10** (1989) 287–302.

[2] G.S. Adhar and S. Peng, Parallel algorithm for path covering, Hamiltonian path, and Hamiltonian cycle in cographs, *Proc. Internat. Conf. on Parallel Processing* **III** (1990) 364–365.

[3] A.V. Aho, J.E. Hopcroft, and J.D. Ullman, *The Design and Analysis of Computer Algorithms*, Addison-Wesley, 1974.

[4] L. Babel, T. Kloks, I. Kratochvil, D. Kratsch, H. Mueller, and S. Olariu, Efficient algorithms for graphs with few P_4's, *Discrete Math.* **235** (2001) 29–51.

[5] L. Babel and S. Olariu, On the structure of graphs with few P_4's, *Discrete Appl. Math.* **84** (1998) 1–13.

[6] L. Babel and S. Olariu, On the p-connectedness of graphs - a survey, *Discrete Appl. Math.* **95** (1999) 11–33.

[7] S. Baumann, A linear algorithm for the homogeneous decomposition of graphs, Report M-9615, Zentrum Mathematik, TU München, Munich, 1996.

[8] S.D. Bedrosian, Generating formulas for the number of trees i a graph, *J. Franklin Inst.* **277** (1964) 313–326.

[9] C. Berge, *Graphs and Hypergraphs*, North-Holland, 1973.

[10] N. Biggs, *Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press, London, 1974.

[11] F.T. Boesch, On unreability polynomials and graph connectivity in reliable network synthesis, *J. Graph Theory* **10** (1986) 339–352.

[12] F.T. Boesch and H. Prodinger, Spanning tree formulas and Chebyshev polynomials, *Graphs and Combinatorics* **2** (1986) 191–200.

[13] B. Bollobás, *Graph Theory, an Introductory Course*, Springer-Verlag, New York, 1979.

[14] U. Brandes and T. Willhalm, Visualization of bibliographic networks with a reshaped landscape metaphor, *Proc. 4th Joint Eurographics - IEEE TCVG Symp. Visualization (VisSym '02)*, (2002) 159–164.

[15] A. Brandstädt, (P_5,Diamond)-free graphs revisited: structure and linear time optimization, *Discrete Appl. Math.* **138** (2004) 13–27.

[16] A. Brandstädt and V.B. Le, Split-perfect graphs: characterizations and algorithmic use, *SIAM J. Discrete Math.* **17** (2004) 341–360.

[17] A. Brandstädt and V.B. Le, Tree- and forest-perfect graphs, *Discrete Appl. Math.* **95** (1999) 141–162.

[18] A. Brandstädt, V.B. Le, and J.P. Spinrad, *Graph Classes: A Survey*, SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, 1999.

[19] B. Buer and R.H. Möhring, A fast algorithm for the decomposition of graphs and posets, *Math. Oper. Res.* **8** (1983) 170ὐ-184.

[20] T.J.N. Brown, R.B. Mallion, P. Pollak, and A. Roth, Some methods for counting the spanning trees in labeled molecular graphs, examined in relation to certain fullerenes, *Discrete Appl. Math.* **67** (1996) 51–66.

[21] A.V. Carrano, Establishing the order of human chromosome-specific DNA fragments, *Biotechnology and the Human Genome,* A.D. Woodhead and B.J. Barnhart, eds., Plenum Press, New York, 1988, 37ὐ-50.

[22] M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour, and R. Thomas, The strong perfect graph theorem, *Annals of Math.* (to appear) 2005.

[23] V. Chvátal and N. Sbihi, Recognizing claw-free perfect graphs, *J. Combin. Theory* **44** (1988) 154–176.

[24] K.-L. Chung and W.-M. Yan, On the number of spanning trees of a multi-complete/star related graph, *Inform. Process. Lett.* **76** (2000) 113–119.

[25] C.J. Colbourn, *The Combinatorics of Network Reliability*, Oxford University Press, Oxford, 1974.

[26] C.J. Colbourn, J.S. Provan, and D. Vertigan, A new approach to solving three combinatorial enumeration problems on planar graphs, *Discrete Appl. Math.* **60** (1995) 119–129.

[27] D. Coppersmith and S. Winograd, Matrix multiplication via arithmetic progressions, *Proc. 19th ACM Symposium on the Theory of Computing*, (1987) 1–6.

[28] T. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest, and C. Stein, *Introduction to Algorithms*, Second Edition, McGraw Hill and MIT Press, 2001.

[29] D.G. Corneil, Y. Perl, and L.K. Stewart, A linear recognition algorithm for cographs, *SIAM J. Comput.* **14** (1985) 926–984.

[30] A. Cournier and M. Habib, A new linear algorithm for modular decomposition, *Proc. 19th Int'l Colloquium on Trees in Algebra and Programming (CAAP'94)*, LNCS **787** (1994) 68–84.

[31] E. Dalhaus, Efficient parallel modular decomposition, *21st International Workshop on Graph Theoretic Concepts in Computer Science (WG'95)*, LNCS **1017** (1995) 290–302.

[32] E. Dalhaus, Parallel algorithms for hierarchical clustering and applications to split decomposition and parity graph recognition, *J. Algorithms*, **36** (2000) 205–240.

[33] E. Dalhaus, J. Gustedt, and R.M. McConnell, Efficient and practical algorithms for sequential modular decomposition, *J. Algorithms* **41** (2001) 360–387.

[34] X. Deng, P. Hell, and J. Huang, Linear time representation algorithms for proper circular arc graphs and proper interval graphs, *SIAM J. Comput.* **25** (1996) 390–403.

[35] J.-L. Fouquet and V. Giakoumakis, On semi-P_4-sparse graphs, *Discrete Math.* **165-166** (1997) 277–300.

[36] J-L. Fouquet, I. Parfenoff and H. Thuillier, An O(n) time algorithm for maximum matching in P_4-tidy graphs, *Inform. Process. Lett.* **62** (1997) 281–287.

[37] D.R. Fulkerson and O.A. Gross, Incidence matrices and interval graphs, *Pacific Journal of Math.* **15** (1965) 835–855.

[38] M.R. Garey and D.S. Johnson, Computers and intractability, a guide to the theory of NP-completeness, Freeman, San Francisco, 1979. 17–41.

[39] V. Giakoumakis, F. Roussel, and H. Thuillier, On P_4-tidy graphs, *Discrete Math. and Theoret. Comput. Science* **1** (1997) 17–41.

[40] V. Giakoumakis and J-M. Vanherpe, On extended P_4-reducible and P_4-sparse graphs, *Theoret. Comput. Sci.* **180** (1997) 269–286.

[41] B. Gilbert and W. Myrvold, Maximizing spanning trees in almost complete graphs, *Networks* **30** (1997) 23–30.

[42] M.J. Golin, X. Yong and Y. Zhang, Chebyshev polynomials and spanning tree formulas for circulant and related graphs, *FPSAC'02 Special Issue of Discrete Math.* (to appear) 2004.

[43] M.C. Golumbic, *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*, Academic Press, Inc., 1980.

[44] K.M. Hall, An r-dimensional quadratic placement algorithm, *Management Science* **17** (1970) 219ΰ-229.

[45] M. Habib and M.C. Maurer, On the X-join decomposition for undirected graphs, *Discrete Appl. Math.* **1** (1979) 201ΰ-207.

[46] P.L. Hammer and A.K. Kelmans, Laplacian spectra and spanning trees of threshold graphs, *Discrete Appl. Math.* **65** (1996) 255–273.

[47] F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley, 1969.

[48] D. Harel and Y. Koren, A fast multi-scale method for drawing large graphs, *J. Graph Algorithms and Applications* **6** (2002) 179–202.

[49] P. Heggernes, Minimal triangulations of graphs: A survey , *Discrete Math.* (to appear) 2005.

[50] P. Hell, R. Shamir, and R. Sharan, A fully dynamic algorithm for recognizing and representing proper interval graphs, *SIAM J. Comput.* **31** (2002) 289–305.

[51] M.R. Henzinger and M.L. Fredman, Lower bounds for fully dynamic connectivity problems in graphs, *Algorithmica* **22** (1998) 351–362.

[52] C. Hoàng, Perfect graphs, Ph.D. Thesis, McGill University, Montreal, Canada, 1985.

[53] W. Hochstätler and G. Tinhofer, Hammiltonicity in graphs with few P_4's , *Computing* **54** (1995) 213–225.

[54] W.-L. Hsu, On-line recognition of interval graphs in $O(m+n\log n)$ time, LNCS **1120** (1996) 27–38.

[55] Z. Huaxiao, Z. Fuji, and H. Qiongxiang, On the number of spanning trees and Eulerian tours in iterated line digraphs, *Discrete Appl. Math.* **73** (1997) 59–67.

[56] L. Ibarra, Fully dynamic algorithms for chordal graphs, *Proc. 10th Annual ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms (SODA'99)*, (1999) 923–924.

[57] L. Ibarra, A fully dynamic algorithm for recognizing interval graphs using the clique-separator graph, Technical Report, DCS-263-IR, University of Victoria, 2001.

[58] J. Jájá, An introduction to parallel algorithms, Addison-Wesley, Reading, MA, 1992.

[59] B. Jamison and S. Olariu, A new class of brittle graphs, *Studies Appl. Math.* **81** (1989) 89–92.

[60] B. Jamison and S. Olariu, Recognition P_4-sparse graphs in linear time, *SIAM J. Comput.* **21** (1992) 381–406.

[61] B. Jamison and S. Olariu, Recognizing P_4-sparse graphs in linear time, *SIAM J. Comput.* **21** (1992) 381–406.

[62] B. Jamison and S. Olariu, A tree representation for P_4-sparse graphs, *Discrete Appl. Math.* **35** (1992) 115–129.

[63] B. Jamison and S. Olariu, Linear-time optimization algorithms for P_4-sparse graphs, *Discrete Appl. Math.* **61** (1995) 155–175.

[64] B. Jamison and S. Olariu, p-components and the homogeneous decomposition of graphs, *SIAM J. Discrete Math.* **8** (1995) 448–463.

[65] B. Jamison and S. Olariu, A linear-time recognition algorithm for P_4-reducible graphs, *Theoret. Comput. Sci.* **145** (1995) 329–344.

[66] M. Kano and S.D. Nikolopoulos, On the structure of A-free graphs: Part II, *Technical Report TR-25-99*, Dept. of Computer Science, University of Ioannina, 1999.

[67] A.K. Kelmans, On graphs with the maximum number of spanning trees, *Random Structures and Algorithms* **1-2**, 177-192, 1996.

[68] A.K. Kelmans, On graphs with the maximum number of spanning trees, *Random Structures and Algorithms* **1-2** (1996) 177–192.

[69] P.N. Klein, Efficient parallel algorithms for chordal graphs, *SIAM J. Comput.* **25** 4 (1996) 797–827.

[70] H. Lerchs, On cliques and kernels, Department of Computer Science, University of Toronto, March 1971.

[71] R. Lin and S. Olariu, A fast parallel algorithm to recognize P4-sparse graphs, *Discrete Appl. Math.* **81** (1998) 191–215.

[72] R. Lin, S. Olariu and G. Pruesse, An optimal path cover algorithm for cographs, *Comput. Math. Appl.* **30** (1995) 75–83.

[73] R. Lin, S. Olariu, J.L. Schwing and J. Zhang, A fast EREW algorithm for minimum path cover and hamiltonicity for cographs, *Parallel Algorithms Appl.* **2** (1994) 99–113.

[74] R.J. Lipton, D. Rose, and R.E. Tarjan, Generalized nested dissection, *SIAM J. Numerical Anal.* **16** (1979) 346–358.

[75] Z. Lonc, K. Parol, and J. Wojcieckowski, On the number of spanning trees in directed circulant graphs, *Networks* **36** (2001) 129–133.

[76] L. Lovasz and M.D. Plummer, *Matching Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1986.

[77] D.E. Manolopoulos and P.W. Fowler, Molecular graphs, point groups and fullerenes, *J. Chem. Phys.* **96** (1992) 7603ů-7614.

[78] R.M. McConnell, An $O(n^2)$ incremental algorithm for modular decomposition of graphs and 2-structures, *Algorithmica* **14** (1995) 229ů-248.

[79] R.M. McConnell and J. Spinrad, Linear time modular decomposition and efficient transitive orientation of comparability graphs, *Proc. 5th ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms (SODA'94)* (1994), 536–545.

[80] R.M. McConnell and J. Spinrad, Modular decomposition and transitive orientation, *Discrete Math.* **201** (1999) 189–241.

[81] B. Mohar, The Laplacian spectrum of graphs, *Graph Theory, Combinatorics, and Applications* **2** (1991) 871–898.

[82] W. Moon, Enumerating labeled trees, in: F. Harary (Ed.), *Graph Theory and Theoretical Physics*, 261–271, 1967.

[83] J.H. Muller and J. Spinrad, Incremental modular decomposition, *J. ACM* **36** (1989) 1–19.

[84] W. Myrvold, K.H. Cheung, L.B. Page, and J.E. Perry, Uniformly-most reliable networks do not always exist, *Networks* **21** (1991) 417–419.

[85] K. Nakano, S. Olariu and A.Y. Zomaya, A time-optimal solution for the path cover problem on cographs, *Theoretical Comp. Science* **290** (2003) 1541–1556.

[86] S.D. Nikolopoulos, Recognizing cographs and threshold graphs through a classification of their edges, *Inform. Process. Lett.* **74**, 129–139, 2000.

[87] S.D. Nikolopoulos, Coloring permutation graphs in parallel, *Discrete Appl. Math.* **120**, (2002) 165–195.

[88] S.D. Nikolopoulos, Parallel Algorithms for Hamiltonian Problems on Quasi-threshold Graphs, *J. of Parallel and Distr. Computing* **120**, (2004) 48–67.

[89] S.D. Nikolopoulos, C. Nomikos, and P. Rondogiannis, A limit characterization for the number of spanning trees of graphs, *Inform. Process. Lett.* **90** (2004) 307–313.

[90] S.D. Nikolopoulos and L. Palios, Hole and antihole detection in graphs, *Proc. 15th Annual ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms (SODA'04)*, (2004) 850–859.

[91] S.D. Nikolopoulos and C. Papadopoulos, The number of spanning trees in K_n-complements of quasi-threshold graphs, *Graphs and Combinatorics* **20** (2004) 383–397.

[92] S.D. Nikolopoulos and C. Papadopoulos, Counting spanning trees in cographs, *Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization (CTW'03)*, Enschede, The Netherlands, 2003. Also in: ENDM (Elsevier) **13**, 87–95, 2003.

[93] S.D. Nikolopoulos and P. Rondogiannis, On the number of spanning trees of multi-star related graphs, *Inform. Process. Lett.* **65** (1998) 183–188.

[94] P.V. O'Neil, The number of trees in certain network, *Notices Amer. Math. Soc.* **10**, 569, 1963.

[95] P.V. O'Neil, Enumeration of spanning trees in certain graphs, *IEEE Trans. Circuit Theory* CT-17 (1970) 250.

[96] C. Papadimitriou, *Computational Complexity*, Addison-Wesley, 1994.

[97] I. Parfenoff, An efficient parallel algorithm for maximum matching for some classes of graphs, *J. of Parallel and Distr. Computing* **52** (1998) 96–108.

[98] S. Parter, The use of linear graphs in Gauss elimination, *SIAM Review* **3** (1961) 119–130.

[99] L. Petingi, F. Boesch, and C. Suffel, On the characterization of graphs with maximum number of spanning trees, *Discrete Appl. Math.* **179** (1998) 155–166.

[100] L. Petingi and J. Rodriguez, A new technique for the characterization of graphs with a maximum number of spanning trees, *Discrete Math.* **244** (2002) 351–373.

[101] R. Shamir and R. Sharan, A fully dynamic algorithm for modular decomposition and recognition of cographs, *Discrete Appl. Math.* **136** (2004) 329–340.

[102] J. Spinrad,P_4-trees and substitution decomposition, *Discrete Appl. Math.* **39** (1992) 263–291.

[103] H.N.V. Temperley, On the mutual cancellation of cluster integrals in Mayer's fugacity series, *Proc. Phys. Soc.* **83** (1964) 3–16.

[104] G. Tinhofer, Strong tree-cographs are Birkhoff graphs, *Discrete Appl. Math.* **22** (1988) 275–288.

[105] J. Valdes, R.E. Tarjan, and E.L. Lawler, The recognition of serial parallel digraphs, *SIAM J. Comput.* **11** (1982) 298–313.

[106] L. Weinberg, Number of trees in a graph, *Proc. IRE.* **46** (1958) 1954–1955.

[107] W.-M. Yan, W. Myrvold, and K.-L. Chung, A formula for the number of spanning trees of a multi-star related graph, *Inform. Process. Lett.* **68** (1998) 295–298.

[108] X. Yong, Talip, Acenjian, The numbers of spanning trees of the cubic cycle C_n^3 and the quadruple cycle C_n^4, *Discrete Math.* **169** (1997) 293–298.

[109] Y. Zhang, X. Yong, and M.J. Golin, The number of spanning trees in circulant graphs, *Discrete Math.* **223** (2000) 337–350.

Ευρετηριο

Βιογραφικό Σημείωμα

Ο Χάρης Παπαδόπουλος γεννήθηκε στην Αθήνα στις 6 Ιουνίου, 1976. Το 1995 εισήχθη στο Τμήμα Πληροφορικής, του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, όπου αποφοίτησε το 1999. Στο ίδιο τμήμα έγινε δεκτός ως μεταπτυχιακός φοιτητής και το 2001 του απονομήθηκε το Μεταπτυχιακό Δίπλωμα Ειδίκευσης, ενώ το 2005 το Διδακτορικό Δίπλωμα στην Επιστήμη της Πληροφορικής. Συγκεκριμένα:

11/2001–7/2005	Ph.D στην Πληροφορική Τμήμα Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων. Ph.D διατριβή: *Αλγόριθμοι σε Κατηγορίες Τέλειων Γραφημάτων.*
9/1999–9/2001	M.Sc στην Πληροφορική Τμήμα Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων. M.Sc διατριβή: *Μελέτη Πλήθους Σκελετικών Δέντρων σε Κλάσεις Γραφημάτων.*
10/1995–6/1999	B.Sc στην Πληροφορική Τμήμα Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων. B.Sc διατριβή: *Πειραματική Μελέτη και Οπτικοποίηση Αλγορίθμων Μεταθετικών Γραφημάτων.*

Τα ερευνητικά του ενδιαφέροντα εστιάζονται στην σχεδίαση και ανάλυση αλγορίθμων για προβλήματα θεωρίας γραφημάτων. Έχει μελετήσει ακολουθιακούς, δυναμικούς και παραλλήλους αλγόριθμους σε προβλήματα αναγνώρισης, βελτιστοποίησης και απαρίθμησης σε κατηγορίες τέλειων γραφημάτων. Το ερευνητικό του έργο έχει δημοσιευθεί σε διεθνή επιστημονικά περιοδικά και συνέδρεια.

Από τον Σεπτέμβριο του 2005 είναι μεταδιδακτορικός ερευνητής στην ερευνητική ομάδα "Algorithms and Complexity" του Τμήματος Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Bergen της Νορβηγίας.

ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΕΙΣ

1. S.D. Nikolopoulos and C. Papadopoulos, The number of spanning trees in K_n-complements of quasi-threshold graphs, *Graphs and Combinatorics* **20**, 383–397, 2004.

2. S.D. Nikolopoulos and C. Papadopoulos, On the performance of the first-fit coloring algorithm on permutation graphs, *Information Processing Letters* **75**, 265–273, 2000.

3. C. Papadopoulos and C. Voglis, Drawing graphs using modular decomposition, *Proc. GD 2005 - 13th Int'l Symposium on Graph Drawing,* September 2005, Limerick, Ireland. Springer Verlag, Lecture Notes in Computer Science, to appear.

4. K. Asdre, S.D. Nikolopoulos and C. Papadopoulos, An optimal solution for the path cover problem on P_4-sparse graphs, *Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization (CTW'05)*, Cologne, Germany, 2005.

5. S.D. Nikolopoulos and C. Papadopoulos, The number of spanning trees in P4-reducible graphs, *Proc. 3rd Int'l Colloquium on Mathematics and Computer Science: Algorithms, Trees, Combinatorics and Probabilities (MathInfo III)*, Vienna, 2004. In: Trends in Mathematics, Birkhauser, 141–143, 2004.

6. S.D. Nikolopoulos and C. Papadopoulos, Counting spanning trees in cographs, *Electronic Notes in Discrete Mathematics (ENDM)* **13**, 87–95, 2003. Also in: *Proc. of the Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization (CTW'03)*, Enschede, The Netherlands, 2003.

7. S.D. Nikolopoulos and C. Papadopoulos, A formula for the number of spanning trees in quasi-threshold graphs, *Proc. 1st Balkan Conference on Informatics (BCI'03)*, 192–202, Thessaloniki, Greece, 2003.

8. S.D. Nikolopoulos, L. Palios and C. Papadopoulos, Counting spanning trees in graphs using modular decomposition, TR-2004-09, Dept. of Computer Science, University of Ioannina, 2004 (submitted for journal publication).

9. S.D. Nikolopoulos, L. Palios and C. Papadopoulos, Maximizing the number of spanning trees in K_n-complements of asteroidal graphs, (submitted for publication) 2005.

10. S.D. Nikolopoulos, L. Palios and C. Papadopoulos, A fully dynamic algorithm for the recognition of P_4-sparse graphs, (submitted for publication) 2005.

11. S.D. Nikolopoulos and C. Papadopoulos, On the number of spanning trees of $K_n^m \pm G$ graphs, TR-2005-10, Dept. of Computer Science, University of Ioannina, 2005 (submitted for journal publication).