ДИПЛОМНА РАБОТА

Борислав Минчев

1997

ШУМЕНСКИ УНИВЕРСИТЕТ
“ЕПИСКОП КОНСТАНТИН ПРЕСЛАВСКИ”

ПОЛОЖИТЕЛНО ОПРЕДЕЛЕНИ РЕШЕНИЯ НА МАТРИЧНИТЕ УРАВНЕНИЯ $X \pm A^{*}X^{-k}A = I$ И МОДИФИКАЦИЙ

Борислав Венцеславов Минчев

ДИПЛОМНА РАБОТА

за присъждане на образователно-квалификационна степен
“магистър”

1997

Увод

Настоящата дипломна работа е посветена на въпроса за съществуване и пресмятане на положително определени решения на специални матрични уравнения. Всяко едно от тях може да се разглежда като модификация на уравнението $X + A^*X^{-1}A = I$, до което се стига при решаване на някои задачи от диференциалните уравнения , теория на управлението, квантовата механика и др. За всяко от уравненията, разгледани в дипломната работа са формулирани и доказани теореми, включващи необходими и/или достатъчни условия за съществуване на положително определени решения.Доказателствата са изложени в стила на използваната литература. Предложени и обосновани са итерационни методи за пресмятане на тези решения. Получени са оценки за грешките. В подкрепа на теоретичния материал са направени числени експерименти резултатите, от които са представени във вид на таблици, поместени в края на всеки параграф. Алгоритмите за числено пресмятане са реализирани на език за програмиране Pascal, като съответните програми са записани на приложената към дипломната работа дискета.

Дипломната работа е разделена на параграфи, като всеки един от тях е посветен на отделно уравнение.

В параграф 1 уравнението $X + A^*X^{-1}A = Q$ е изучено чрез изследване свойствата на съответстващата му матрично-значна функция.От описаните в [5] два итерационни метода е видно, че единият от тях клони към най-малкото, а другият към най-голямото решение на уравнението.

В параграфи 2 и 3 са разгледани съответно уравненията $X - A^*X^{-1}A = Q$ и $A^*X^{-1}A - X = Q$,изследвани в [3]. Адаптиран е алгоритъма от [5], чрез който тези уравнения могат да се сведат до по-прост случай,където $Q = I$ и A е обратима.

Параграф 4 е посветен на уравнението $X + A^*X^{-2}A = I$, като за него са предложени два различни итерационни процеса.Първият от тях е описан в [4],а вторият е новоразработен. Направените

числени експерименти показват, че винаги решението получено от единия процес е по-малко от това, по втория.

В параграфи 5 и 6 са разгледани съответно неизследваните уравнения $X - A^*X^{-2}A = I$ и $A^*X^{-2}A - X = I$. За първото са доказани две теореми за сходимост в зависимост от стойността на началното приближение, а за второто е посочен итерационен процес за намиране решение и са доказани необходими условия за съществуването му.

Накрая бих искал да изкажа своята благодарност към научния си ръководител проф. д.м. Милко Петков за оказаното съдействие, при разработването на теоретичната част и реализирането на програмите за числени експерименти, а също така и на полк.инж.доц.доктор Венцеслав Минцев за съветите при редактирането.

Въведение

В дипломната работа са използвани следните определения,означения и теореми.

Определение 1. *С A^* ще означаваме спрегнатата на матрицата A.*

С други думи знака * означава комплексна спрегнатост и транспонираност , взети в произволен ред т.е., ако $A^* = (a^*_{ij})$; $A = (a_{ij})$, то $a^*_{ij} = \bar{a}_{ji}$

Определение 2. *Една квадратна матрица A е неособена, ако $detA \neq 0$.*

Определение 3. *Ако A е квадратна матрица и $A = A^*$, то A се нарича Ермитова.*

В следващите определения се използва добре познатото скаларно произведение в Евклидово пространство,а именно ако x , y $\in C^n$,то

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i},$$

Определение 4. *Матрицата A е положително определена, ако A е Ермитова и $\langle Ax, x\rangle > 0$ за всяко $x \neq 0$.*

Определение 5. *Означението $X > Y$ значи, че матрицата $X - Y$ е положително определена.*

Определение 6. *Квадратната матрица A се нарича нормална матрица, ако $AA^* = A^*A$.*

Определение 7. *Числото $r(A) = max_s|\lambda_s|$ се нарича спектрален радиус на матрицата A, където λ_s са собствените стойности на матрицата A.*

Определение 8. *Числото $\|A\| = \sqrt{\lambda_1}$ се нарича спектрална норма на матрицата A, където λ_1 е максималната собствена стойност на матрицата AA^*.*

Определение 9.

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|.$$

Теорема 1. *Ако A е $n \times n$ матрица, то $r(A) \leq \|A\|$.*

Доказателство. Нека $\|A\| = a$ и λ е произволна собствена стойност на A. Разглеждаме $B = \frac{A}{a+\varepsilon}$.

Нека с μ означим собствените стойности на матрицата B. Тогава

$$\mu = \frac{\lambda}{a+\varepsilon}.$$

Имаме, че

$$\|B\| = \frac{\|A\|}{a+\varepsilon} = \frac{a}{a+\varepsilon} < 1.$$

Следователно, $B^k \to 0, \quad k \to \infty$, което означава, че $r(B) < 1$, т.е. $|\mu| < 1$ за всяко μ.

Получихме ,че

$$\frac{|\lambda|}{a+\varepsilon} < 1 \quad \forall\ \lambda,$$

$$|\lambda| < a + \varepsilon.$$

След граничен преход $\varepsilon \to 0$ получаваме

$$|\lambda| \leq a,$$

$$r(A) \leq \|A\|.$$

Теорема 2. *Ако $A = (a_{ij})$ е $n \times n$ матрица и $A > 0$, то*

$$A_{n-k+1} = \begin{pmatrix} a_{kk} & \dots & a_{kn} \\ a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

е също положително определена матрица за $k = 1, \dots, n-1$.

Доказателство. Нека

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \in C^n, \quad y \neq 0, \quad A = \begin{pmatrix} A_{k-1} & u_k \\ u_k^* & A_{n-k+1} \end{pmatrix}.$$

Ясно е, че A_{n-k+1} е Ермитова защото A е Ермитова. Тогава

$$Ax = \begin{pmatrix} A_{k-1} & u_k \\ u_k^* & A_{n-k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_k y \\ A_{n-k+1} y \end{pmatrix},$$

$$\langle Ax, x \rangle = \langle A_{n-k+1} y, y \rangle > 0.$$

Следователно, A_{n-k+1} е положително определена.

Теорема 3. *Ако* $e^{At}Ce^{Bt} \to 0$ *при* $t \to \infty$ *и съществува* $\int_0^\infty e^{At}Ce^{Bt}\,dt$, *то*

$$X = -\int_0^\infty e^{At}Ce^{Bt}\,dt$$

е решение на уравнението $AX + XB = C$.

Доказателство. Разглеждаме диференциалното уравнение

$$\dot{X} = AX + XB$$

с начално условие $X(0) = C$. Нека $\tilde{X} = e^{At}Ce^{Bt}$ тогава

$$\dot{\tilde{X}} = Ae^{At}Ce^{Bt} + e^{At}Ce^{Bt}B = A\tilde{X} + \tilde{X}B.$$

Интегрираме последното равенство

$$\int_0^\infty \dot{\tilde{X}}dt = A\int_0^\infty e^{At}Ce^{Bt}dt + \int_0^\infty e^{At}Ce^{Bt}dt\ B,$$

$$\tilde{X}|_0^\infty = A\int_0^\infty \tilde{X}dt + \int_0^\infty \tilde{X}dt\ B,$$

$$0 - C = A\int_0^\infty \tilde{X}dt + \int_0^\infty \tilde{X}dt\ B,$$

$$C = A\left(-\int_0^\infty \tilde{X}dt\right) + \left(-\int_0^\infty \tilde{X}dt\right)\ B.$$

Следователно,

$$X = -\int_0^\infty e^{At}Ce^{Bt}dt$$

е решиние на уравнението $AX + XB = C$.

Следствие. *Ако* $e^{-At}Ce^{-Bt} \to 0$ *при* $t \to \infty$ *и съществува* $\int_0^\infty e^{-At}Ce^{-Bt}\,dt$, *то*

$$X = \int_0^\infty e^{-At}Ce^{-Bt}\,dt$$

е решение на уравнението $AX + XB = C$.

Доказателство. Умножаваме с $-I$ уравнението

$$AX + XB = C.$$

Получаваме

$$(-A)X + X(-B) = -C.$$

Последното уравнение има решение

$$X = -\int_0^\infty e^{-At}(-C)e^{-Bt}\ dt,$$

т.е.

$$X = \int_0^\infty e^{-At}Ce^{-Bt}\ dt$$

е решение на уравнението $AX + XB = C$.

Теорема 4. *Ако $A > 0$, то $e^{-At} \to 0$ при $t \to \infty$.*

Доказателство. Разглеждаме диференциалното уравнение

$$\dot{x} = -Ax.$$

То има решение $x = e^{-At}C$, тъй като $A > 0$, то съществува T - унитарна матрица:

$$A = T^*DT,$$

където $D = diag(d_{11}, \ldots, d_{nn}), \quad d_{ii} > 0$. Тогава

$$\dot{x} = -T^*DTx$$

или още

$$T\dot{x} = -DTx.$$

Полагаме $Tx = y$ и получаваме $\dot{y} = -Dy$, т.е.

$$\left| \begin{array}{l} \dot{y}_1 = -d_{11}y_1 \\ \ldots \\ \dot{y}_n = -d_{nn}y_n \end{array} \right.$$

Следователно,

$$\left| \begin{array}{l} y_1 = e^{-d_{11}t}c_1 \\ \ldots \\ y_n = e^{-d_{nn}t}c_n \end{array} \right.$$

Тъй като $d_{ii} > 0$ за всяко i, то $e^{-d_{ii}t}c_i \to 0 \quad t \to \infty$.

Следователно, $y \to 0$ при $t \to \infty$. От $y = Tx$, получаваме, че $x \to 0$ при $t \to \infty$ т.е. $e^{-At} \to 0$ при $t \to \infty$.

Следствие. *Ако* $A, B, C > 0$, *то* $e^{-At}Ce^{-Bt} \to 0$ *при* $t \to \infty$.

Теорема 5. *Ако* $0 < A < B$, *то* $A^{-1} > B^{-1}$.

Доказателство. Знаем, че съществува унитарна матрица U :

$$U^*AU = L = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Записваме

$$\sqrt{L^{-1}}U^*AU\sqrt{L^{-1}} = \sqrt{L^{-1}}\sqrt{L}\sqrt{L}\sqrt{L^{-1}} = I.$$

Разглеждаме

$$\sqrt{L^{-1}}U^*BU\sqrt{L^{-1}},$$

последната е Ермитова матрица тъй като B е Ермитова.

Следователно, съществува V - унитарна, такава че

$$\sqrt{L^{-1}}U^*BU\sqrt{L^{-1}} = VMV^*,$$

$$V^*\sqrt{L^{-1}}U^*BU\sqrt{L^{-1}}V = M = diag(\mu_1, \ldots, \mu_n).$$

Ако $T^* = V^*\sqrt{L^{-1}}U^*$,то

$$T^*AT = I,$$

$$T^*BT = M = diag(\mu_1, \ldots, \mu_n),\ \ \mu_i > 0.$$

Така получихме, че $A = T^{-*}T^{-1}$ тъй като $A < B$ то $B - A > 0$. Тогава,

$$\begin{aligned} T^*(B-A)T &> 0, \\ T^*BT &> T^*AT, \\ M &> I, \\ \mu_i &> 1 \quad \forall i, \\ \mu_i^{-1} &< 1 \quad \forall i, \\ M^{-1} &< I. \end{aligned}$$

Следователно,

$$\begin{aligned} TM^{-1}T^* &< TT^*, \\ (T^{-*}MT^{-1})^{-1} &< (T^{-*}T^{-1})^{-1}, \\ B^{-1} &< A^{-1}. \end{aligned}$$

Лема 1. *Ако уравнението* $AX + XB = C, \quad A > 0, B > 0, C > 0$ *има Ермитово решение то това решение е положително определено.*

Доказателство. Разглеждаме $AX + XB = C$. След спрягане получаваме $XA + BX = C$. Събираме двете равенства $(A + B)X + X(A + B) = 2C$. Матрицата $A + B$ е положително определена, т.е. $Re\lambda(A + B) > 0$ също и $2C > 0$. Тогава според теоремата на Ляпунов X е положително определена.

Теорема 7. *Ако* $0 < A < B$, *то* $\sqrt{A} < \sqrt{B}$.

Доказателство. Очевидно

$$\sqrt{A}(\sqrt{B} - \sqrt{A}) + (\sqrt{B} - \sqrt{A})\sqrt{B} = B - A.$$

Тъй като $B - A > 0, \sqrt{A} > 0, \sqrt{B} > 0$ то $\sqrt{B} - \sqrt{A}$ е Ермитова. Тогава според лема 1 имаме, че

$$(\sqrt{B} - \sqrt{A}) > 0,$$

$$\sqrt{B} > \sqrt{A}.$$

Доказателствата на теореми 8 и 9 са изложени съответно в [2] и [1].

Теорема 8. *Нека* A *е непрекъснат линеен оператор в Хилбертово пространство* H.*Тогава*

$$H = Ker(A) \oplus Im(A^*).$$

Теорема 9. *Ако за редицата* $\{X_k\}$ *е изпълнено,че*

$$A_1 = A_1^T \geq A_2 = A_2^T \geq \ldots \geq A_k = A_k^T \geq \ldots \geq A = A^T,$$

то тя е шодяща.

§1. Уравнението $X + A^*X^{-1}A = Q$

1.1. Свеждане към специален случай

В [5] са посочени теореми за съществуване на положително определени решения на матричното уравнението

$$X + A^*X^{-1}A = Q, \tag{1}$$

където Q е положително определена матрица.

Предложени са итерационни методи за численото пресмятане на тези решения.

За целта уравнението (1) е преобразувано във вид, в който $Q = I$ и A е обратима. Този процес се осъществява чрез последователно повтаряне на две стъпки.

Теорема 1. *Нека Q е положително определена. X е решение на уравнението*

$$X + A^*X^{-1}A = Q,$$

тогава и само тогава когато $Y = Q^{-\frac{1}{2}}XQ^{-\frac{1}{2}}$ е решение на уравнението

$$Y + \hat{A}^*Y^{-1}\hat{A} = I, \tag{2}$$

където $\hat{A} = Q^{-\frac{1}{2}}AQ^{-\frac{1}{2}}$.

Доказателство. Нека X е решение на уравнението (1). Умножаваме отляво и отдясно с $Q^{-\frac{1}{2}}$ и получаваме

$$Q^{-\frac{1}{2}}XQ^{-\frac{1}{2}} + Q^{-\frac{1}{2}}A^*Q^{-\frac{1}{2}}Q^{\frac{1}{2}}X^{-1}Q^{\frac{1}{2}}Q^{-\frac{1}{2}}AQ^{-\frac{1}{2}} = I. \tag{3}$$

Полагаме $Y = Q^{-\frac{1}{2}}XQ^{-\frac{1}{2}}$. Следователно (3) приема вида

$$Y + \hat{A}^*Y^{-1}\hat{A} = I,$$

т.е. Y е решение на (2).

Нека Y е решение на (2). Заместваме Y и $\hat{A}$ с техните равни и получаваме, че X е решение на (1).

Нека разгледаме уравнението

$$X + A^*X^{-1}A = I, \tag{4}$$

където A е $n \times n$ особена матрица. Ако $A = 0$ тогава уравнението е тривиално. В противен случай разлагаме C^n както следва

$$C^n = KerA \oplus ImA^*.$$

Съгласно това ортогонално разлагане записваме

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}.$$

(X задължително има този вид тъй като $X|_{KerA} = I|_{KerA}$.) Тогава уравнението (4) се преобразува в уравнение за X_2,

$$X_2 + A_2^* X_2^{-1} A_2 = I - A_1^* A_1. \tag{5}$$

Щом X е положително определено решение на (4) тогава и X_2 е положително определено и следователно $I - A_1^* A_1 > 0$. Прилагайки теорема 1 можем да преобразуваме уравнението (5) във вида (4), само че от по-ниска размерност. Повтаряйки този процес многократно ще достигнем до една от следните две възможности:

Уравнение от вида (4) с $A = 0$, или уравнение от вида (4) с A неособена.

Като резултат получихме, че всяко уравнение

$$X + A^* X^{-1} A = Q$$

може да се сведе до уравнение от вида

$$X + A^* X^{-1} A = I,$$

където A е неособена матрица.

1.2. Необходими и достатъчни условия в термините на матрични функции

Пак в [5] е разгледано уравнението (1) чрез анализиране свойствата на съответстващата му матричнозначна функция

$$\Psi(\lambda) = Q + \lambda A + \lambda^{-1} A^*. \tag{6}$$

Определение. *Функцията $\Psi(\lambda)$ се нарича регулярна, ако съществува поне една точка, в която $det\Psi(\lambda) \neq 0$.*

По своята същност $det\Psi(\lambda)$ е скаларна рационална функция и следователно има само краен брой точки, за които $det\Psi(\lambda) = 0$ в случай, че Ψ е регулярна.

Теорема 2. *Нека Q е положително определена. Уравнението $X + A^*X^{-1}A = Q$ има положително определено решение тогава и само тогава когато Ψ е регулярна и $\Psi(\lambda) \geq 0$ за всички λ върху единичната окръжност. В този случай $\Psi(\lambda)$ се разлага във вида:*

$$\Psi(\lambda) = (C_0^* + \lambda^{-1}C_1^*)(C_0 + \lambda C_1), \tag{7}$$

където $detC_0 \neq 0$ и $X = C_0^*C_0$ е решение на (1).

Доказателство. Нека $X > 0$ е решение.

Полагаме $C_0 = X^{\frac{1}{2}}, C_1 = X^{-\frac{1}{2}}A$ тогава

$$\begin{aligned}
\Psi(\lambda) &= Q + \lambda A + \lambda^{-1}A^* \\
&= X + A^*X^{-1}A + \lambda A + \lambda^{-1}A^* \\
&= (I + \lambda^{-1}A^*X^{-1})X(I + \lambda X^{-1}A) \\
&= (C_0^* + \lambda^{-1}C_1^*)(C_0 + \lambda C_1).
\end{aligned}$$

Следователно, $\Psi(\lambda)$ е положително полуопределена за $|\lambda| = 1$. Щом X е обратима следва, че $det(C_0 + \lambda C_1) \neq 0$ за $|\lambda|$ достатъчно малко. Следователно $\Psi(\lambda)$ е регулярна.

Нека предположим, че Ψ е регулярна и положително полуопределена за $|\lambda| = 1$. Известно е, че съществува разлагане на $\Psi(\lambda)$ във вида (7). Освен това множителя $C_0 + \lambda C_1$ може така да бъде избран, че да е обратим за $|\lambda| < 1$, т.е. $det(C_0 + \lambda C_1) \neq 0$ за $|\lambda| < 1$. Полагаме $X = C_0^*C_0$, където C_0 идва от разлагането, т.к. $detC_0 \neq 0$ следва, че $X > 0$.

От (7) е видно, че

$$Q = C_0^*C_0 + C_1^*C_1, \quad A^* = C_1^*C_0, \quad A = C_0^*C_1.$$

Следователно,

$$C_1^* = A^*C_0^{-1}.$$

За Q получаваме:

$$\begin{aligned}
Q &= C_0^*C_0 + A^*C_0^{-1}C_0^{-*}A \\
&= X + A^*X^{-1}A,
\end{aligned}$$

т.е. X е решение на (1).

Може да се отбележи, че не всяко разлагане на $\Psi(\lambda)$ във вида (7) е свързано с решение X на уравнението (1). Необходимо условие за това е $detC_0 \neq 0$. За да илюстрираме това ще разгледаме тривиалния пример когато $A = 0$. В този случай $X = Q$. Ако разгледаме разлагането $\Psi(\lambda) \equiv Q = C_0^* C_0$ получаваме, че решението е $X = Q$. Когато разложим $\Psi(\lambda)$ във вида $\Psi(\lambda) = \lambda^{-1} Q^{\frac{1}{2}} Q^{\frac{1}{2}} \lambda$ се вижда, че $C_0 = 0$, и следователно не получаваме решението $X = Q$ като вземем $C_0^* C_0$.

Следващата теорема описва наредбата в множеството от решения на уравнението (1).

Теорема 3. *Нека X_1 и X_2 са положително определени решения на уравнението (1). Нека $\varphi_i(\lambda) = C_{0i} + \lambda C_{1i}$ $(i = 1, 2)$ са такива, че $\Psi(\lambda) = \varphi_i(\bar{\lambda}^{-1})^* \varphi_i(\lambda), detC_{0i} \neq 0$, $C_{0i}^* C_{0i} = X_i$. При условие, че $\varphi_2(\lambda)\varphi_1(\lambda)^{-1}$ е аналитична в отворения единичен кръг D. Тогава $X_2 < X_1$. В частност ако X_L е решението съответстващо на разлагането (7) на $\Psi(\lambda)$, за което $det(C_0 + \lambda C_1) \neq 0$ за $|\lambda| < 1$ тогава X_L е най-голямото решение на уравнението (1). Освен това X_L е единственото решение, за което $X + \lambda A$ е обратима за всички $\lambda \in D$.*

Доказателство. Полагаме

$$U(\lambda) = \varphi_2(\lambda)\varphi_1(\lambda)^{-1}.$$

Очевидно

$$\Psi(\lambda) = \Psi(\lambda),$$

т.е.

$$\Psi(\lambda) = \varphi_1(\bar{\lambda}^{-1})^* \varphi_1(\lambda).$$

Следователно,

$$\varphi_1(\bar{\lambda}^{-1})^{-*} \Psi(\lambda) \varphi_1(\lambda)^{-1} = I,$$
$$[\varphi_1(\bar{\lambda}^{-1})]^{-*} \varphi_2(\bar{\lambda}^{-1})^* \varphi_2(\lambda) [\varphi_1(\lambda)]^{-1} = I,$$
$$[\varphi_2(\bar{\lambda}^{-1}) \varphi_1(\bar{\lambda}^{-1})^{-1}]^* [\varphi_2(\lambda)\varphi_1(\lambda)^{-1}] = I,$$
$$U(\bar{\lambda}^{-1})^* U(\lambda) \equiv I,$$

т.е. $U(\lambda)$ е унитарна рационална матрична функция. Съгласно [5] такава функция няма полюси върху единичната окръжност и тъй като по условие $\varphi_2\varphi_1^{-1}$ е аналитична в кръг с радиус $R > 1$, записваме

$$U(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j \lambda^j, \quad |\lambda| < R.$$

Тогава

$$U(\bar{\lambda}^{-1})^* = \sum_{j=0}^{\infty} u_j^* \lambda^{-j}$$

имаме

$$\begin{aligned} I &= U(\bar{\lambda}^{-1})^* U(\lambda) \\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} u_j^* \lambda^{-j}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} u_j \lambda^j\right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} u_j^* u_j. \end{aligned}$$

В частност

$$U_0^* U_0 \leq I$$

от

$$\begin{aligned} U(\lambda)\varphi_1(\lambda) &= \sum_{j=0}^{\infty} u_j \lambda^j (C_{01} + \lambda C_{11}) \\ &= \varphi_2(\lambda) = (C_{02} + \lambda C_{12}) \end{aligned}$$

се получава

$$U_0 C_{01} = C_{02}.$$

Следователно,

$$X_2 = C_{02}^* C_{02} = C_{01}^* U_0^* U_0 C_{01} \leq C_{01}^* C_{01} = X_1.$$

Нека X_L е решението съответстващо на разлагането (7), за което $det(C_0 + \lambda C_1) \neq 0$, $|\lambda| < 1$. Означаваме с $\varphi_L(\lambda) = C_0 + \lambda C_1$.

Следователно, $\varphi_L(\lambda)^{-1}$ е аналитична в D, така за всяко решение X и съответния му множител $\varphi(\lambda)$ имаме, че $\varphi(\lambda)\varphi_L(\lambda)^{-1}$ е аналитична в D. Следователно, $X < X_L$.

Нека $\varphi_L(\lambda) = C_0 + \lambda C_1$ е множителя, за който $det(C_0 + \lambda C_1) \neq 0, \quad |\lambda| < 1$. Тогава $X_L = C_0^* C_0$
Следователно $C_0 = C_0^{-*} X_L^{\frac{1}{2}} X_L^{\frac{1}{2}} = U_1 X_L^{\frac{1}{2}}$,
U_1 е унитарна ,защото

$$\begin{aligned} U_1^* U_1 &= (C_0^{-*} X_L^{\frac{1}{2}})^* (C_0^{-*} X_L^{\frac{1}{2}}) \\ &= X_L^{\frac{1}{2}} (C_0^* C_0)^{-1} X_L^{\frac{1}{2}} \\ &= X_L^{\frac{1}{2}} X_L^{-1} X_L^{\frac{1}{2}} = I. \end{aligned}$$

Съгласно теорема 2

$$A = C_0^* C_1 = X_L^{\frac{1}{2}} U_1^* C_1.$$

Щом U_1 е унитарна от последното равенство получаваме

$$C_1 = U_1 X_L^{-\frac{1}{2}} A.$$

Следователно,

$$\varphi_L(\lambda) = U_1 X_L^{-\frac{1}{2}} (X_L + \lambda A)$$

и така се получава, че

$$det(X_L + \lambda A) \neq 0, \quad |\lambda| < 1.$$

Нека предположим, че X_1 е друго решение на (1), за което $X_1 + \lambda A$ е обратима за $\lambda \in D$. Полагаме $\varphi_1(\lambda) = X_1^{\frac{1}{2}} + \lambda X_1^{-\frac{1}{2}} A = X^{-\frac{1}{2}}(X_1 + \lambda A)$ тогава $\varphi_L(\lambda)\varphi_1(\lambda)^{-1}$ е аналитична в D и следователно $X_L < X_1$. Понеже X_L е най-голямото решение следва $X_1 \leq X_L$, което доказва, че $X_1 = X_L$.

Теорема 4. *Нека A е обратима. X е решение на*

$$X + A^* X^{-1} A = I, \tag{8}$$

тогава и само тогава когато $Y = I - X$ е решение

$$Y + A Y^{-1} A^* = I, \tag{9}$$

В частност ако Y_L е най-голямото решение на (9) тогава $X_s = I - Y_L$ е най-малкото решение на (8). Освен това X_s е единственото положително определено решение, за което $X + \lambda A^*$ е обратима за $|\lambda| > 1$.

Доказателство. Нека X е решение на (8).

Тогава $A^* X^{-1} A = I - X$. Следователно,

$$X^{-1} = A^{-*}(I - X)A^{-1},$$

$$X = A(I - X)^{-1}A^*$$

и така $Y = I - X$ е решение на (9).

Обратното се вижда по същия начин. Да отбележим, че $X_1 \leq X_2$, тогава и само тогава когато $Y_1 \geq Y_2$ откъдето следва и връзката между X_s и Y_L.

Според теорема 3 X_s е единственото решение за което $Y_L + \lambda A^* = I - X_s + \lambda A^*$ е обратима за всички $\lambda \in D$.

$$I - X_s + \lambda A^* = A^* X_s^{-1} A + \lambda A^* =$$

$$= A^* X_s^{-1}(A + \lambda X_s).$$

Следователно, X_s е единственото решение, за което $A + \lambda X_s$ е обратима за $\lambda \in D$ или еквивалентно $(A + \bar{\lambda}^{-1} X_s)^*$ е обратима за $|\lambda| > 1$,но

$$(A + \bar{\lambda}^{-1} X_s)^* = A^* + \lambda^{-1} X_s = \lambda^{-1}(X_s + \lambda A^*)$$

и така X_s е единственото решение, за което $X_s + \lambda A^*$ е обратима за $|\lambda| > 1$.

Теорема 5. *Нека $Q > 0$ и уравнението $X + A^* X^{-1} A = Q$ има положително определено решение. Тогава то притежава най-голямо и най-малко решение X_L и X_s съответно. Освен това X_L е единственото решение, за което $X + \lambda A$ е обратима за $|\lambda| < 1$ докато X_s е единственото решение, за което $X + \lambda A^*$ е обратима за $|\lambda| > 1$.*

Доказателство. Очевидно преобразуванията, които водят от уравнението

$$X + A^* X^{-1} A = Q$$

към уравнението

$$X + A^*X^{-1}A = I, \quad detA \neq 0$$

запазват наредбата на решенията. Доказателството завършва с прилагането на теорема 4.

Теорема 6. *Нека $Q > 0$. Уравнението (1) има единствено решение тогава и само тогава когато следните три условия са изпълнени:*

(i) Ψ е регулярна*;*
(ii) $\Psi(\lambda) \geq 0$ за $|\lambda| = 1$*;*
(iii) $\Psi(\lambda)$ е обратима за $|\lambda| < 1$.

Доказателство. Да допуснем, че (1) има точно едно решение. Тогава (i) и (ii) са изпълнени според теорема 2. Освен това

$$\Psi(\lambda) = (X + \lambda^{-1}A^*)X^{-1}(X + \lambda A),$$

следователно, $det\Psi(\lambda) = detX^{-1}det(X + \lambda^{-1}A^*)det(X + \lambda A)$. Щом $X = X_s = X_L$ съгласно теорема 5. $X + \lambda A$ и $X + \lambda^{-1}A^*$ са обратими за $|\lambda| < 1$, от което следва $\Psi(\lambda)$ е обратима за $|\lambda| < 1$.

Нека са изпълнени (i), (ii) и (iii). Съгласно теорема 2. съществува поне едно решение на (1). От (iii) следва, че за всяко решение X на (1) $X + \lambda A$ и $X + \lambda^{-1}A^*$ са обратими за $|\lambda| < 1$.Съобразно с теорема 5. получаваме

$$X = X_s = X_L.$$

Могат да се предложат два итерационни метода за числено пресмятане на решения на уравнението $X + A^*X^{-1}A = I, \quad detA \neq 0$.

Разгледаме редицата от матрици

$$X_0 = I, \quad X_{k+1} = I - A^*X_k^{-1}A. \tag{10}$$

Теорема 7. *Ако уравнението (1) има решение $X > 0$, то $X_k \to X_L$.*

Доказателство. Първо ще докажем, че $X_k \geq X$, $\forall\ k \in N$. Наистина $X_0 = I > X$ ($X + A^*X^{-1}A = I$, т.е. $X < I$). Допускаме, че

$X_k \geq X$. Разглеждаме $X_{k+1} - X = A^*(X^{-1} - X_k^{-1})A \geq 0$. Следователно, $X_k \geq X$, $\forall\ k \in N$ и тъй като X е произволно решение имаме, че $X_k \geq X_L$, $\forall\ k \in N$.

Ще покажем, че $\{X_k\}$ е монотонно намаляваща редица.

Първо разглеждаме $X_0 - X_1 = I - (I - A^*X_0^{-1}A) = A^*A > 0$.

Допускаме, че $X_k - X_{k+1} \geq 0$ за $k = n$.

Разглеждаме $X_{k+1} - X_{k+2} = A^*(X_{k+1}^{-1} - X_k^{-1})A \geq 0$.

Следователно, редицата от матрици (10) е сходяща и то към най-голямото решение X_L.

Да разгледаме следната редица от матрици

$$X_0 = AA^*, \quad X_{k+1} = A(I - X_k)^{-1}A^* \tag{11}$$

Теорема 8. *Ако уравнението (1) има решение $X > 0$,то $X_k \to X_s$.*

Доказателство. Сходимостта на последния итерационен процес директно следва от теорема 4. и теорема 7.

1.3. Необходими условия

В началото видяхме, че уравнението

$$X + A^*X^{-1}A = Q,$$

може да се сведе до уравнение от вида

$$X + A^*X^{-1}A = I, \quad detA \neq 0. \tag{12}$$

Разглеждаме уравнението (12).

Формулираме следното необходимо условие

Теорема 9. *Ако $X > 0$ е решение на (12),то*

$$AA^* + A^*A < I.$$

Доказателство. От $I - X = A^*X^{-1}A > 0$
следова $X < I$, $A^*X^{-1}A < I$,

$$X^{-1} < (A^*)^{-1}A^{-1},$$

$$X > AA^*,$$

$$AA^* < X = I - A^*X^{-1}A < I - A^*IA = I - A^*A,$$

$$AA^* + A^*A < I.$$

От [6] е известно:

Лема 1. *Нека P, Q са две произволни съвместими матрици. Тогава*

$$r(P^*Q - Q^*P) \leq r(P^*P + Q^*Q),$$

където $r(A)$ е спектралния радиус на матрицата A.

Доказателство. Очевидно е, че

$$r(P^*Q - Q^*P) = r\left((P^* \ Q^*) \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}\right).$$

Използваме ,че $r(AB) = r(BA)$ и получаваме

$$r\left((P^* \ Q^*) \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}\right) = r\left(\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} (P^*Q^*)\right).$$

Известно е , че $r(A) \leq \|A\|$, където $\|.\|$ е спектралната норма на матрицата A, от което следва

$$r\left(\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} (P^*Q^*)\right) \leq \left\|\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} (P^*Q^*)\right\|$$

$$\leq \left\|\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}\right\| \left\|\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} (P^*Q^*)\right\|.$$

Като отчетем ,че

$$\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} (P^*Q^*)$$

е нормална матрица и $\|A\| = r(A)$ за всяка от този тип можем да запишем, че

$$r(P^*Q - Q^*P) \leq \left\|\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}\right\| \left\|\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} (P^*Q^*)\right\|$$

$$= 1 \quad \left(\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} (P^*Q^*)\right)$$

$$= r \left((P^*Q^*) \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}\right)$$

$$= r\ (P^*P + Q^*Q).$$

Теорема 10. *Нека уравнението (12) притежава положително определено решение, тогава матрицата A удовлетворява следните неравенства:*

(i) $r(A) \leq \frac{1}{2}$;
(ii) $r(A + A^*) \leq 1$;
(iii) $r(A - A^*) \leq 1$.

Доказателство.

(i) Нека x е собствен вектор съответстващ на собствена стойност λ на матрицата A. Тогава

$$x^*Xx + x^*A^*X^{-1}Ax = x^*x,$$

$$x^*Xx + |\lambda|^2 x^*X^{-1}x = x^*x,$$

от където получаваме

$$|\lambda|^2 = \frac{x^*(I - X)x}{x^*X^{-1}x}. \tag{13}$$

Щом $X > 0$, то $X = U^T\Sigma U$, където U е ортогонална матрица и $\Sigma = diag(\sigma_i^2)$. Полагаме $y = Ux$. Тогава от (13) получаваме

$$|\lambda|^2 = \frac{y^*(I - \Sigma)y}{y^*\Sigma^{-1}y}.$$

За доказване на теоремата е достатъчно да покажем, че

$$\frac{y^*(I - \Sigma)y}{y^*\Sigma^{-1}y} \leq \frac{1}{4}$$

или еквивалентно

$$y^*(I - \Sigma - \frac{1}{4}\Sigma^{-1})y \leq 0.$$

$$y^*(I - \Sigma - \frac{1}{4}\Sigma^{-1})y = \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 \left(1 - \sigma_i^2 - \frac{1}{4\sigma_i^2}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} -|y_i|^2 \left(\sigma_i^2 - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{\sigma_i^2},$$

което очевидно е неположително число.

(ii) Нека положим

$$P = X^{\frac{1}{2}} - X^{-\frac{1}{2}}A; \quad Q = X^{\frac{1}{2}} + X^{-\frac{1}{2}}$$

Съгласно това полагане уравнението (12) приема вида $P^*P = I - A - A^*$ или $Q^*Q = I + A + A^*$ щом P^*P и Q^*Q са положително определени ,то

$$r(A + A^*) \leq 1.$$

(iii) От полагането (ii) получаваме

$$A - A^* = \frac{1}{2}(P^*Q - Q^*P).$$

Прилагаме лема 1 към последното равенство

$$\begin{aligned} r(A - A^*) &= \frac{1}{2}r(P^*Q - Q^*P) \leq \frac{1}{2}r(P^*P - Q^*Q) \\ &= \frac{1}{2}r(I - A - A^* + I + A + A^*) \\ &= \frac{1}{2}r(2I) \\ &= 1. \end{aligned}$$

1.4.Достатъчни условия

Теорема 11. *Нека σ^2 е най-голямата собствена стойност на A. Тогава уравнението (12) има решение ако $\sigma^2 \leq \frac{1}{2}$*

Доказателство. Разглеждаме редицата от матрици

$$X_0 = I,$$

$$X_{k+1} = I - A^*X_k^{-1}A,$$

от доказателството на теорема 7 е ясно, че $\{X_k\}$ е монотонно намаляваща редица. Ще покажем, че $X_k > AA^* + \frac{1}{4}I, \ \forall k \in N$. Наистина щом $\sigma^2 \leq \frac{1}{2}$, то $AA^* \leq \frac{1}{4}I$.

Следователно, $X_0 = I > \frac{1}{2} \geq AA^* + \frac{1}{4}I$.

Допускаме, че $X_k \geq AA^* + \frac{1}{4}I$.

Разглеждаме

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= I - A^*(X_k - AA^* + AA^*)^{-1}A \\ &= [I + A^*(X_k - AA^*)^{-1}A]^{-1} \\ &\geq [I + 4A^*A]^{-1} \\ &\geq \frac{1}{2}I \\ &\geq AA^* + \frac{1}{4}I. \end{aligned}$$

Следователно, редицата $\{X_k\}$ е монотонно намаляваща и ограничена отдолу, т.е. тя е сходяща.

На базата на разгледаното дотук в съответствие с [6] може да се формулират следните две нови теореми. Първата, от които дава ново достатъчно условие, а втората оценка на грешката.

Теорема 12. *Ако съществува реално число $\alpha, \alpha > 1$ и*

$$A^*A < \frac{\alpha - 1}{\alpha^2}I,$$

то уравнението $X + A^*X^{-1}A = I$ има положително определено решение.

Доказателство. Отново разглеждаме редицата от матрици

$$X_0 = I,$$

$$X_{k+1} = I - A^*X_k^{-1}A.$$

Известно е , че тя е монотонно намаляваща. Ще покажем, че $X_k > \frac{1}{\alpha}I$.

Наистина $X_0 = I > \frac{1}{\alpha}I$.

Допускаме $X_k > \frac{1}{\alpha}I$.

Разглеждаме

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= I - A^*X_k^{-1}A \\ &> I - \alpha A^*A \\ &> I - \alpha\frac{\alpha - 1}{\alpha^2}I \\ &= \frac{1}{\alpha}.I \end{aligned}$$

Следователно, редицата $\{X_k\}$ е сходяща.

Теорема 13. *Ако към условието на теорема 12 прибавим и условието*

$$q = \|A\|^2\alpha^2 < 1$$

тогава $\|X_k - X\| < q^k \frac{\alpha-1}{\alpha}$.

Доказателство. Разглеждаме

$$\begin{aligned}
\|X_k - X\| &= \|I - A^* X_{k-1}^{-1} A - I + A^* X^{-1} A\| \\
&= \|A^*(X^{-1} - X_{k-1}^{-1})A\| \\
&\leq \|A\|^2 \|X^{-1}(X_{k-1} - X)X_{k-1}^{-1})\| \\
&\leq \|A\|^2 \|X^{-1}\| \|X_{k-1}^{-1}\| X_{k-1} - X\|.
\end{aligned}$$

Щом $X_k > \frac{1}{\alpha} I$, то $\|X_k^{-1}\| < \alpha$

следователно,

$$\begin{aligned}
\|X_k - X\| &< \|A\|^2\alpha^2 \|X_{k-1} - X\| \\
&< q^k \|I - X\| \\
&< q^k \|(1 - \frac{1}{\alpha} I\| \\
&= q^k \frac{\alpha - 1}{\alpha}.
\end{aligned}$$

1.5.Два примера

От [4] и [5] са взаимствани примери, в които намирането решение на уравнението (12) играе съществена роля.

Пример 1. Нека имаме следната задача за намиране на оптимално управление

$$\min_{u[0,.]} \lim_{N\to\infty} J_n$$

при ограничението

$$\lim_{N\to\infty} x(N) = 0,$$

където

$$x(.) \in R^n, \ u(.) \in R^N,$$

$$x(0) = x,$$

$$x(k+1) = A' x(k) + Bu(k),$$

$$J_n = \sum_{k=0}^{N-1} \{x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k)\},$$

където Q, R са симетрични матрици.

Оказва се, че тази задача има решение, ако съществува реално решение $K^{'}$ на алгебричното уравнение на Рикати.

$$K = A^{'T}\{K - KB(R + B^T KB)^{-1}B^T K\}A^{'} + Q, \tag{14}$$

което да удовлетворява условията:

(i) $R + B^T K^{'} B > 0$;
(ii) $r(A^{'} + BF) < 1, \quad F = -(R + B^T K^{'} B)^{-1} B^T K^{'} A^{'}$.

Теорема 14. *Нека $M = RB^{-1}A^{'}B$ и $N = B^T A^{'T} B^{-T} RB^{-1} A^{'} B + R + B^T QB$. Съществува реално симетрично решение $K^{'}$ на (14), което да удовлетворява условието* (i) *тогава и само тогава, когато*

(i) $N > 0$;
(ii) уравнението *(12)* има решение с $A = N^{-\frac{1}{2}} M N^{-\frac{1}{2}}$.

Доказателство. В уравнението (14) умножаваме отляво и отдясно съответно с B^T и B. Получаваме

$$B^T KB = B^T A^{'T} KA^{'} B - B^T A^{'T} KB(R + B^T KB)^{-1} B^T KA^{'} B + B^T QB$$

Следователно,

$$\begin{aligned}
R + B^T KB &= -B^T A^{'T} KB(R + B^T KB)^{-1} B^T KA^{'} B + \\
&\quad + B^T A^{'T} KA^{'} B + R + B^T QB = \\
&= -B^T A^{'T} B^{-T} B^T KB(R + B^T KB)^{-1} B^T KBB^{-1} A^{'} B + \\
&\quad + B^T A^{'T} KA^{'} B + R + B^T QB = \\
&= -B^T A^{'T} B^{-T}(-R + R + B^T KB).(R + B^T KB)^{-1} \times \\
&\quad \times (R + B^T KB - R) B^{-1} A^{'} B + \\
&\quad + B^T A^{'T} KA^{'} B + R + B^T QB.
\end{aligned}$$

Нека да разгледаме

$$
\begin{aligned}
& -B^T A'^T B^{-T}(-R+R+B^T KB).(R+B^T KB)^{-1} \times \\
& \times (R+B^T KB-R)B^{-1}A'B + \\
& +B^T A'^T KA'B = \\
= \; & \{B^T A'^T B^{-T}R - B^T A'^T B^{-T}.(R+B^T KB)\} \times \\
& \times (R+B^T KB)^{-1} \times \\
& \times \{(R+B^T KB)B^{-1}A'B - RB^{-1}A'B\} + B^T A'^T KA'B = \\
= \; & \{B^T A'^T B^{-T}R(R+B^T KB)^{-1} - B^T A'^T B^{-T}\} \times \\
& \times \{(R+B^T KB)B^{-1}A'B - RB^{-1}A'B\} + \\
& +B^T A'^T KA'B = \\
= \; & B^T A'^T B^{-T}RB^{-1}A'B - B^T A'^T B^{-T}(R+B^T KB)B^{-1}A'B - \\
& -B^T A'^T B^{-T}R(R+B^T KB)^{-1}RB^{-1}A'B + B^T A'^T B^{-T}RB^{-1}A'B + \\
& +B^T A'^T KA'B \\
= \; & -B^T A'^T B^{-T}R(R+B^T KB)^{-1}RB^{-1}A'B + \\
& +2B^T A'^T B^{-T}RB^{-1}A'B - B^T A'^T B^{-T}RB^{-1}A'B - \\
& -B^T A'^T B^{-T}B^T KBB^{-1}A'B + \\
& +B^T A'^T KA'B \\
= \; & -B^T A'^T B^{-T}R(R+B^T KB)^{-1}RB^{-1}A'B + \\
& +B^T A'^T B^{-T}RB^{-1}A'B.
\end{aligned}
$$

Следователно,

$$
\begin{aligned}
R+B^T KB \; = \; & -B^T A'^T B^{-T}R(R+B^T KB)^{-1}RB^{-1}A'B + \\
& +B^T A'^T B^{-T}RB^{-1}A'B + R + B^T QB.
\end{aligned}
$$

Полагаме $Y = R + B^T KB$.

Вижда се, че (14) има решение тогава и само тогава когато съществува положително определено решение Y на уравнението

$$Y = -M^T Y^{-1} M + N.$$

Пример 2.

Определение. Нека $A_1, A_2, \ldots, A_p \in C^{q\times q}$ са p на брой $q \times q$ матирци $pq = n$. В такъв случай матрица от вида

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_{p-1} & A_p \\ A_p & A_1 & \ldots & A_{p-2} & A_{p-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_2 & A_3 & \ldots & A_p & A_1 \end{pmatrix} = (A_1, A_2, \ldots, A_p)$$

се нарича блочна циркулантна матрица, породена от матриците $A_1, A_2, \ldots, A_p$.

Нека разгледаме клетъчната линейна система

$$Mx = f, \tag{15}$$

ъдето M е $p\times p$ блочна Ермитова тридиагонална циркулантна матрица, породена от матриците $A, B, 0, \ldots, 0, B^*$, където всяка от пораждащите е $q \times q$ матрица ($pq = n$). Ще предполагаме също, че $A^* = A > 0$ и $detB \neq 0$. По-подробно системата (15) се записва във вида

$$A = \begin{pmatrix} A & B & 0 & \ldots & 0 & B^* \\ B^* & A & B & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B & 0 & 0 & \ldots & B^* & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_p \end{pmatrix}, \tag{16}$$

където $X_s,\ F_s \in C^q$.

За да решим (16), първо ще опишем как ще решим тридиагонална система от вида

$$Ny = \begin{pmatrix} X & B & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ B^* & A & B & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B & 0 & 0 & \ldots & B^* & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_p \end{pmatrix}. \tag{17}$$

За матрицата N на тази система търсим разлагане от вида

$$N = LU = \begin{pmatrix} I & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ B^*X^{-1} & I & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & B^*X^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & B & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & X & B & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & X \end{pmatrix}.$$

От последното равенство за X се получава, че трябва да удовлетворява матричното уравнение $X + B^*X^{-1}B = A$. Като пресметнем едно положително определено решение на това уравнение, можем да запишем системата (17) във вида

$$LUy = F.$$

Така решението на системата (17) се свежда до последователното решаване на две далеч по-прости системи

$$Lz = F, \quad z = \{Z_i\}$$

$$Vy = z, \quad y = \{Y_i\}.$$

За решенията им се получава следното

$$Z_1 = F_1, \quad Z_i = F_i - B^*X^{-1}Z_{i-1}, \quad i = 2, 3, \ldots, p,$$

$$Y_p = X^{-1}Z_p, \quad Y_i = X^{-1}(Z_i - BY_{i+1}), \quad i = p-1, p-2, \ldots, 1.$$

Нека сега положим $B^*X^{-1} = P$, $Q = X^{-1}B$, тогава

$$N = LDV,$$

където

$$L = \begin{pmatrix} I & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ P & I & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & P & I \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} I & Q & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & I & Q & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & I \end{pmatrix},$$

$$D = diag(X, X, \ldots, X).$$

В такъв случай за N^{-1} намираме

$$N^{-1} = V^{-1}D^{-1}L^{-1},$$

ако $L^{-1} = (L_{ij})$, $V^{-1} = (V_{ij})$, то

$$L_{ij} = \begin{cases} 0 & i < j \\ (-1)^{i-j}P^{i-j} & i \geq j, \end{cases}$$

$$V_{ij} = \begin{cases} 0 & i > j \\ (-1)^{j-i} Q^{j-i} & i \le j, \end{cases}$$

$$D^{-1} = diag(X^{-1}, X^{-1}, \ldots, X^{-1}).$$

Сега ще преминем към получаване решение на системата

$$\tilde{N}\tilde{y} = F,$$

където

$$\tilde{N} = \begin{pmatrix} A & B & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ B^* & A & B & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & B^* & A \end{pmatrix}.$$

Да отбележим, че

$$\begin{aligned} \tilde{N} &= N + \begin{pmatrix} I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - X & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \\ &= N + E_1 V_1^T. \end{aligned}$$

По формулата на Удбъри

$$\tilde{N}^{-1} = N^{-1} - N^{-1} E_1 (I + V_1^T N^{-1} E_1)^{-1} V_1^T N^{-1}.$$

Съответно

$$\begin{aligned} \tilde{y} &= \tilde{N}^{-1} F = \{\tilde{Y}_i\} \\ &= N^{-1} F - N^{-1} E_1 (I + V_1^T N^{-1} E_1)^{-1} V_1^T N^{-1} F \\ &= y - N^{-1} E_1 (I + (A - X) E_1^T N^{-1} E_1)^{-1} V_1^{-T} y \\ &= y - N^{-1} E_1 (I + (A - X) E_1^T N^{-1} E_1)^{-1} (A - X) Y_1, \end{aligned}$$

т.е.

$$\tilde{y} = y - N^{-1} E_1 (I + (A - X) E_1^T N^{-1} E_1)^{-1} (A - X) Y_1. \tag{18}$$

Да пресметнем $(N^{-1}E_1)_i$ и $E_1^T N^{-1} E_1$. Имаме

$$\begin{aligned} (N^{-1}E_1)_i &= \left(V^{-1} D^{-1} L^{-1} E_1\right)_i \\ &= \sum_{s=i}^{p} (-1)^{i+1} Q^{s-i} X^{-1} P^{s-1} \end{aligned}$$

и

$$E_1^T N^{-1} E_1 = \sum_{s=1}^{p} Q^{s-1} X^{-1} P^{s-1}.$$

И така от (18) следва

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_i &= Y_i - (\sum_{s=i}^{p} (-1)^{i+1} Q^{s-i} X^{-1} P^{s-1}) \times \\ &\times (I + (A - X) \sum_{s=1}^{p} (-1)^{i+1} Q^{s-1} X^{-1} P^{s-1})(A - X) Y_1.\end{aligned}$$

По-нататък трябвада преминем към системата (15) , чиято матрица може да се получи от $\tilde{N}$ чрез равенството.

$$M = \tilde{N} + \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & B^* \\ B & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{N} + \tilde{U}\tilde{V},$$

от което следва

$$M^{-1} = \tilde{N}^{-1} - \tilde{N}^{-1}\tilde{U}(I + \tilde{V}^T \tilde{N}^{-1} \tilde{U})^{-1} \tilde{V}^T \tilde{N}^{-1},$$

$$M^{-1}F = \tilde{N}^{-1}F - \tilde{N}^{-1}\tilde{U}(I + \tilde{V}^T \tilde{N}^{-1} \tilde{U})^{-1} \tilde{V}^T \tilde{N}^{-1} F,$$

$$x = \tilde{y} - \tilde{N}^{-1}\tilde{U}(I + \tilde{V}^T \tilde{N}^{-1} \tilde{U}) \tilde{V}^T \tilde{y}.$$

1.6. Числени експерименти

Нека $\varepsilon(Z) = \|Z + A^* Z^{-1} A - I\|_\infty$. Означаваме с X_s решението, което се получава чрез итерационния процес (11), т.е.

$$X_0 = AA^*, \qquad X_{n+1} A (I - X_n)^{-1} A^*,$$

а с Y_p решението, което се получава от итерационния метод (10), т.е.

$$X_0 = I, \quad X_{n+1} = I - A^* X_n^{-1} A$$

Нека m е най-малкото число k, за което

$$\left[\|A\|^2\alpha^2\right]^k \frac{\alpha-1}{\alpha} \leq 10^{-8}.$$

Резултатите от експериментите са дадени в следващите таблици

Пример 1. Нека A е от вида

$$A = (a_{ij}) = \begin{cases} a_{ij} = 2(2i+n)10^{-3} & i = j \\ a_{ij} = 2(i+j)10^{-3} & i \neq j \end{cases}$$

Таблица 1.

n	m	$\varepsilon(X_s)$	$\varepsilon(Y_p)$
5	3	$6.4219E-11$	$4.7361E-11$
10	5	$5.5312E-10$	$1.2390E-12$
15	8	$1.0986E-8$	$2.2648E-14$
20	14	$9.5109E-10$	0.0
25	39	$1.4266E-9$	0.0

Пример 2. Нека A е от вида

$$A = (a_{ij}) = \begin{cases} a_{ij} = 2in10^{-3} & i = j \\ a_{ij} = \frac{2(i+j)}{n10^3} & i \neq j \end{cases}$$

Таблица 2.

n	m	$\varepsilon(X_s)$	$\varepsilon(Y_p)$
5	3	$6.3705E-12$	$6.5929E-12$
10	5	$6.4340E-12$	$5.0792E-14$
15	7	$6.6449E-12$	$2.3647E-14$
20	11	$6.2010E-12$	$4.4408E-16$
25	24	$6.8932E-12$	0.0

Пример 3. Нека A е от вида

$$A = (a_{ij}) = \begin{cases} a_{ij} = 2i10^{-3} & i < j \\ a_{ij} = 2(i+j)10^{-3} & i \geq j \end{cases}$$

Таблица 3.

n	m	$\varepsilon(X_s)$	$\varepsilon(Y_p)$
5	3	$3.8257E-11$	$2.0900E-12$
10	4	$2.4408E-10$	$8.4350E-12$
15	6	$6.7649E-10$	$1.5543E-13$
20	9	$1.8183E-9$	$7.1054E-15$
25	15	$3.3096E-9$	0.0

§2. Уравнението $X - A^*X^{-1}A = Q$

2.1. Свеждане към специален случай

С адаптиране на алгоритъма приложен в [5] и отчитане спецификата на разглежданото уравнение ще покажем, че

$$X - A^*X^{-1}A = Q, \tag{1}$$

където Q е положително определена матрица също може да се преобразува във вид, в който $Q = I$ и матрицата A е обратима.

Процеса се състои в последователно повтаряне на две стъпки.

Теорема 1. *Нека Q е положително определена матрица, X е решение на уравнението*

$$X - A^*X^{-1}A = Q,$$

тогава и само тогава когато $Y = Q^{-\frac{1}{2}}XQ^{-\frac{1}{2}}$ е решение на уравнението

$$Y - \hat{A}^*Y^{-1}\hat{A} = I, \tag{2}$$

където $\hat{A} = Q^{-\frac{1}{2}}AQ^{-\frac{1}{2}}$.

Доказателство. Нека X е решение на уравнението (1). Умножаваме отляво и отдясно с $Q^{-\frac{1}{2}}$ и получаваме

$$Q^{-\frac{1}{2}}XQ^{-\frac{1}{2}} - Q^{-\frac{1}{2}}A^*Q^{-\frac{1}{2}}Q^{\frac{1}{2}}X^{-1}Q^{\frac{1}{2}}Q^{-\frac{1}{2}}AQ^{-\frac{1}{2}} = I. \tag{3}$$

Полагаме $Y = Q^{-\frac{1}{2}}XQ^{-\frac{1}{2}}$. Следователно, (3) приема вида

$$Y - \hat{A}^*Y^{-1}\hat{A} = I,$$

т.е. Y е решение на (2).

Нека Y е решение на (2). Заместваме Y и $\hat{A}$ с техните равни и получаваме , че X е решение на (1).

Нека разгледаме уравнението

$$X - A^*X^{-1}A = I, \tag{4}$$

където A е $n \times n$ особена матрица. Ако $A = 0$ тогава уравнението е тривиално. В противен случай разлагаме C^n както следва

$$C^n = KerA \oplus ImA^*.$$

Съгласно това ортогонално разлагане записваме

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} I & A_1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}.$$

Тогава уравнението (4) се преобразува в уравнение за X_2

$$X_2 - A_2^* X_2^{-1} A_2 = I - A_1^* A_1. \tag{5}$$

Щом X е положително определено решение на (4) тогава и X_2 е положително определено и следователно $I - A_1^* A_1 > 0$. Прилагайки теорема 1 можем да преобразуваме уравнението (5) във вида (4). Само че с по-ниска размерност. Повтаряйки този процес многократно достигнеме до една от следните две възможности:

уравнението от вида (4) с $A = 0$, или уравнение от вида (4) с A неособена. Получихме ,че всяко уравнение

$$X - A^* X^{-1} A = Q$$

може да се сведе до уравнение

$$X - A^* X^{-1} A = I, \tag{6}$$

където A е неособена матрица.

2.2.Необходими и достатъчни условия

За уравнението (6) в са [3] доказани:

Теорема 2. *Ако спектралната норма $q = \|A\|$ на матрицата A е по-малка от единица, то (6) притежава положително определено решение.*

Доказателство. Да разгледаме итерационния процес

$$X_0 = I, \quad X_{k+1} = I + A^* X_k^{-1} A, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

За първите няколко члена на редицата $\{X_k\}$ получаваме

$$\begin{aligned} X_0 &= I, \\ X_1 &= I + A^* A > X_0, \\ X_2 &= I + A^* X_1^{-1} A < I + A^* X_0^{-1} A = X_1. \end{aligned}$$

Следователно,

$$X_0 < X_2 < X_1,$$

$$X_3 = I + A^* X_2^{-1} A > I + A^* X_1^{-1} A = X_2,$$

т.е.

$$X_3 > X_2.$$

Сега ще покажем, че $X_3 < X_1$. Действително от $X_0 < X_2$ последователно получаваме

$$\begin{aligned} X_0^{-1} &> X_2^{-1}, \\ A^* X_0^{-1} A &> A^* X_2^{-1} A, \\ I + A^* X_0^{-1} A &> I + A^* X_2^{-1} A, \\ X_1 &> X_3. \end{aligned}$$

Аналогично, се установява, че редицата $\{X_k\}$ притежава свойството

$$X_0 = I \leq X_{2k} \leq X_{2k+2} \leq X_{2s+3} \leq X_{2s+1} \leq X_1,$$

каквито и да са целите неотрицателни числа k, s. От това свойство следва веднага, че всяка от подредиците $\{X_{2k}\}$ и $\{X_{2k+1}\}$ е сходяща към положително определена матрица. Ще покажем, че тези две подредици имат обща граница. За целта е достатъчно $X_{2k+1} - X_{2k} \to 0$ при $k \to 0$.

Действително като използваме, че спектралната норма е монотонна получаваме последователно

$$\begin{aligned} \|X_{2k+1} - X_{2k}\| &= \|I + A^* X_{2k}^{-1} A - I - A^* X_{2k-1}^{-1} A\| \\ &= \|A^*(X_{2k}^{-1} - X_{2k-1}^{-1}) A\| \\ &= \|A^* \; X_{2k-1}^{-1}(X_{2k-1} - X_{2k}) X_{2k}^{-1} A\| \\ &\leq \|A^*\| \; \|X_{2k-1}^{-1}\| \; \|X_{2k-1} - X_{2k}\| \; \|X_{2k}^{-1}\| \; \|A\| \\ &= q^2 \; \|X_{2k-1}^{-1}\| \; \|X_{2k}^{-1}\| \; \|X_{2k-1} - X_{2k}\|. \end{aligned}$$

От $I < X_s$, то $\|X_s^{-1}\| < \|I\| = 1$ за всяко s цяло положително . Следователно,

$$\|X_{2k+1} - X_{2k}\| \; < \; q^2.1.1.\|X_{2k-1} - X_{2k}\|$$

$$
\begin{aligned}
&< \ \ldots\ldots \\
&< \ q^{4k}\|X_1 - X_0\| \\
\|X_{2k+1} - X_{2k}\| &< \ q^{4k}\|X_1 - X_0\| \to 0, \quad k \to \infty.
\end{aligned}
$$

Ако общата граница на $\{X_{2k}\}$ и $\{X_{2k+1}\}$ е X, то от $X_{2k} < X < X_{2k+1}$ следва

$$
\begin{aligned}
\max\left(\|X - X_{2k}\|, \|X_{2k+1} - X\|\right) &< \|X_{2k+1} - X_{2k}\| \\
&< q^{4k}\|X_1 - X_0\| \\
&< q^{4k}\|I + A^*A - I\| \\
&< q^{4k+2}.
\end{aligned}
$$

Следствие 1. *Ако $X > 0$ е решение на (6) , то*

$$I < X < I + A^*A.$$

Следствие 2. *За всяка собствена стойност λ на решението $X > 0$ на (6) имаме $\lambda \in (1, 1 + \rho(A^*A))$, където $\rho(A^*A))$ е спектралният радиус на A^*A.*

Теорема 3. *Ако m, M са съответно най-малката и най-голямата собствена стойност на решението X на уравнението (6) и λ е коя да е собствена стойност на A ,то*

$$\sqrt{m^2 - m} \leq |\lambda| \leq \sqrt{M^2 - M}.$$

Доказателство. Нека v е собствен вектор, съответен на собствената стойност λ на матрицата A и $|v| = 1$. Тогава имаме, че

$$
\begin{aligned}
\langle Xv, v\rangle - \langle A^*X^{-1}Av, v\rangle &= \langle v, v\rangle, \\
\langle Xv, v\rangle - \langle X^{-1}Av, Av\rangle &= 1, \\
\langle Xv, v\rangle - |\lambda|^2\langle X^{-1}v, v\rangle &= 1.
\end{aligned}
$$

Тъй като $mI < X < MI$, то

$$m < \langle Xv, v\rangle < M$$

и

$$M^{-1} < \langle X^{-1}v, v\rangle < m^{-1}.$$

Тогава от последното равенство получаваме

$$m - \frac{|\lambda|^2}{m} \leq 1 \leq M - \frac{|\lambda|^2}{M},$$

т.е.

$$\sqrt{m^2 - m} \leq |\lambda| \leq \sqrt{M^2 - M}.$$

2.3 Числени експерименти

Нека $\varepsilon(Z) = \|Z - A^* Z^{-1} A - I\|_\infty$.

Нека m е най-малкото число s, за което

$$\|X_{s+1} - X_s\| \leq 10^{-5}.$$

Пример 1. Нека A е от вида

$$A = (a_{ij}) = \begin{cases} a_{ij} = \frac{i+j}{3000} & i < j \\ a_{ij} = \frac{i+2}{4000} & i \geq j \end{cases}$$

Таблица 1.

n	m	$\varepsilon(X)$
5	2	$9.1670E-13$
10	2	$3.4534E-10$
15	3	$1.1966E-10$
20	3	$8.5654E-9$
25	4	$6.2017E-9$

Пример 2. Нека A е от вида

$$A = (a_{ij}) = \begin{cases} a_{ij} = \frac{i+5}{600} & i = j \\ a_{ij} = \frac{i+j+2}{800} & i \neq j \end{cases}$$

Таблица 2.

n	m	$\varepsilon(X)$
5	3	$4.0865E-11$
10	4	$6.8686E-9$
15	6	$4.9351E-8$
20	9	$1.6157E-7$
25	13	$3.7809E-7$

Пример 3. Нека A е от вида

$$A = (a_{ij}) = \begin{cases} a_{ij} = \frac{7i}{20(i+1)} & i = j \\ a_{ij} = 0 & i \neq j \end{cases}$$

Таблица 3.

n	m	$\varepsilon(X)$
5	6	$1.8937E-7$
10	6	$4.7806E-7$
15	6	$6.6056E-7$
20	6	$7.7874E-7$
25	6	$8.6039E-7$

§3. Уравнението $A^*X^{-1}A - X = Q$

3.1. Необходими и достатъчни условия

Нека да отбележим, че следвайки стъпките посочени в параграфи 1 и 2 уравнението

$$A^*X^{-1}A - X = Q, \tag{1}$$

където Q е положително определена матрица, може да се сведе до уравнение от вида

$$A^*X^{-1}A - X = I, \tag{2}$$

където матрицата A е неособена. Точно поради тази причина ще се занимаем с последното уравнение. За него в [3] са доказани:

Теорема 1. *Ако спектралната норма $q = \|A\|$ на матрицата A е по-малка от единица, то уравнението (2) притежава положително определено решение.*

Доказателство. Записваме уравнението (2) във вида

$$X = A(X + I)^{-1}A^*$$

Полагаме $X_0 = 0$ и разглеждаме итерационния процес

$$X_{k+1} = A(X_k + I)^{-1}A^*, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

За първите няколко члена на редицата $\{X_k\}$ получаваме

$$\begin{aligned} X_0 &= 0, \\ X_1 &= AA^* > 0 = X_0, \\ X_2 &= A(X_1 + I)^{-1}A^* < A(X_0 + I)^{-1}A^* = X_1. \end{aligned}$$

Следователно,

$$X_0 < X_2 < X_1.$$

$$X_3 = A(X_2 + I)^{-1}A^* > A(X_1 + I)^{-1}A^* = X_2,$$

т.е.

$$X_3 > X_2.$$

Сега ще покажем, че $X_3 < X_1$. Действително от $X_0 < X_2$ последователно получаваме

$$\begin{aligned}(X_0+I)^{-1} &> (X_2+I)^{-1},\\ A(X_0+I)^{-1}A^* &> A(X_2+I)^{-1}A^*,\\ X_1 &> X_3.\end{aligned}$$

С подобни разсъждения се установява,че

$$0 = X_0 \le X_{2k} < X_{2k+2} < X_{2s+3} < X_{2s+1} \le X_1,$$

за произволни цели неотрицателни числа k, s. От последните неравенства следва, че всяка от редиците $\{X_{2k}\}$ и $\{X_{2k+1}\}$ е сходяща към положително определена матрица. Ще покажем, че двете граници са равни. За целта е достатъчно $X_{2k+1} - X_{2k} \to 0$ при $k \to 0$.

Действително

$$\begin{aligned}\|X_{2k+1} - X_{2k}\| &= \|A(X_{2k}+I)^{-1}A^* - A(X_{2k-1}+I)^{-1}A^*\|\\ &= \|A((X_{2k}+I)^{-1} - (X_{2k-1}+I)^{-1}A^*\|\\ &= \|A(X_{2k}+I)^{-1}((X_{2k-1}+I) - (X_{2k}+I))(X_{2k-1}+I)^{-1}A^*\|\\ &\le \|A(X_{2k}+I)^{-1}(X_{2k-1} - X_{2k})(X_{2k-1}+I)^{-1}A^*\|.\end{aligned}$$

От $X_s > 0$, то $\|(X_s+I)^{-1}\| < \|I\| = 1$ за всяко s цяло положително число.

Следователно,

$$\begin{aligned}\|X_{2k+1} - X_{2k}\| &< q^2.1.1.\|X_{2k-1} - X_{2k}\|\\ &< \ldots\ldots\\ &< q^{4k}\|X_1 - X_0\|\\ \|X_{2k+1} - X_{2k}\| &< q^{4k}\|X_1 - X_0\| \to 0, \quad k \to \infty.\end{aligned}$$

Ако общата граница на $\{X_{2k}\}$ и $\{X_{2k+1}\}$ е X, то от $X_{2k} < X < X_{2k+1}$ следва

$$\max\left(\|X - X_{2k}\|, \|X_{2k+1} - X\|\right) \;<\; \|X_{2k+1} - X_{2k}\|$$

$$\begin{aligned} &< q^{4k}\|X_1 - X_0\| \\ &< q^{4k}\|AA^*\| \\ &< q^{4k+2}. \end{aligned}$$

Теорема 2. *Ако $X > 0$ е решение на (2) , то*

$$A(I + AA^*)^{-1}A^* < X < AA^*.$$

Доказателство. От $A^*X^{-1}A = I + X$ следва

$$\begin{aligned} A^*X^{-1}A &> I, \\ X^{-1} &> A^{-*}A^{-1}, \\ X &< AA^*. \end{aligned}$$

От горното равенство имаме

$$\begin{aligned} A^*X^{-1}A &< I + AA^*, \\ X^{-1} &< A^{-*}(I + AA^*)A^{-1}, \\ X &> A(I + AA^*)^{-1}A^*, \end{aligned}$$

т.е.

$$A(I + AA^*)^{-1}A^* < X < AA^*.$$

Теорема 3. *Ако $X > 0$ е решение на (2) m, M са съответно най-малката и най-голямата собствена стойност на X, то за коя да е собствена стойност α на A е изпълнено неравенството*

$$\sqrt{m^2 + m} \leq |\alpha| \leq \sqrt{M^2 + M}.$$

Доказателство. Нека v е съответен на α единичен собствен вектор на A с $|v| = 1$. Тогава имаме, че

$$\begin{aligned} \langle A^*X^{-1}Av, v\rangle - \langle Xv, v\rangle &= \langle v, v\rangle, \\ \langle X^{-1}Av, Av\rangle - \langle Xv, v\rangle &= 1, \\ |\alpha|^2\langle X^{-1}v, v\rangle - \langle Xv, v\rangle &= 1. \end{aligned}$$

Т.к. $mI < X < MI$, то

$$m < \langle Xv, v\rangle < M,$$
$$M^{-1} < \langle X^{-1}v, v\rangle < m^{-1},$$

тогава от последното равенство получаваме

$$\frac{|\alpha|^2}{M} - M \leq 1 \leq \frac{|\alpha|^2}{m} - m,$$
$$\sqrt{m^2+m} \leq |\alpha| \leq \sqrt{M^2+M}.$$

3.2. Числени експерименти

Нека $\varepsilon(Z) = \|A^* Z^{-1} A - Z - I\|_\infty$.

Нека m е най-малкото число s, за което

$$\|X_{s+1} - X_s\| \leq 10^{-5}.$$

Пример 1. Нека A е от вида

$$A = (a_{ij}) = \begin{cases} a_{ij} = \frac{2i+2j}{100} & i < j \\ a_{ij} = \frac{j+5}{200} & i \geq j \end{cases}$$

Таблица 1.

n	m	$\varepsilon(X)$
5	7	$6.7419E-6$
10	7	$1.1600E-6$
15	6	$1.2954E-5$
20	6	$9.8537E-6$
25	6	$8.3250E-6$

Пример 2. Нека A е от вида

$$A = (a_{ij}) = \begin{cases} a_{ij} = \frac{2i+j}{100} & i = j \\ a_{ij} = \frac{j}{200} & i \neq j \end{cases}$$

Таблица 2.

n	m	$\varepsilon(X)$
5	5	$1.3150E-6$
10	7	$2.7377E-5$
15	11	$2.4883E-5$
20	14	$3.4722E-5$
25	15	$3.4390E-5$

Пример 3. Нека A е от вида

$$A = diag[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n+1}]$$

Таблица 3.

n	m	$\varepsilon(X_s)$
5	5	$5.2028E-7$
10	4	$5.5074E-7$
15	4	$5.8913E-8$
20	3	$5.1302E-6$
25	3	$2.1850E-6$

§4. Положително определени решения на матричното уравнение $X + A^*X^{-2}A = I$

4.1. Необходими и достатъчни условия

В съответствие с [4] се изследва уравнението

$$X + A^*X^{-2}A = I, \tag{1}$$

когато матрицата A е неособена. Доказват се теореми, които са необходими и достатъчни условия за съществуване на решение на матричното уравнение (1) .

Теорема 1. *Ако уравнението (1) притежава положително определено решение X , то*

$$A^*A + \sqrt{AA^*} < I. \tag{2}$$

Доказателство. Нека X е положително определено решение уравнението (1) . Тогава

$$X < I, \qquad A^*X^{-2}A < I.$$

От последното неравенство имаме

$$X > \sqrt{AA^*}.$$

Получаваме

$$I > X = \sqrt{A(I-X)^{-1}A^*} > \sqrt{A(I-\sqrt{AA^*})^{-1}A^*}.$$

Следователно,

$$A^{-1}A^{-*} > (I - \sqrt{AA^*})^{-1},$$
$$A^*A + \sqrt{AA^*} < I.$$

Теорема 2. *Ако съществуват числа* $0 < \alpha < \beta < 1$,*за които е изпълнено*

$$\alpha^2(1-\alpha)I < AA^* < \beta^2(1-\beta)I,$$

то уравнението (1) има положително определено решение.

Доказателство. Нека разгледаме итерационния процес

$$X_0 = \beta I, X_{s+1} = \sqrt{A(I-X_s)^{-1}A^*}, \quad s = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

За X_1 намираме

$$X_1 = \sqrt{\frac{AA^*}{1-\beta}} < \beta I = X_0.$$

За X_2 имаме

$$X_2 = \sqrt{A(I-X_1)^{-1}A^*} < \sqrt{A(I-X_0)^{-1}A^*} = X_1.$$

Получаваме, че редицата $\{X_s\}$ е намаляваща. Ще покажем, че тя е ограничена отдолу от матрицата αI. Наистина

$$\begin{aligned} X_0 &= \beta I > \alpha I, \\ X_1 &= \sqrt{A(I-X_0)^{-1}A^*} > \sqrt{\frac{AA^*}{1-\alpha}} > \alpha I. \end{aligned}$$

Допускаме, че

$$X_s > \alpha I.$$

Ще докажем, че

$$X_{s+1} > \alpha I.$$

От

$$\begin{aligned} & X_s > \alpha I, \\ & (I-X_s)^{-1} > \frac{1}{1-\alpha} I, \\ & A(I-X_s)^{-1}A^* > \frac{1}{1-\alpha} AA^*, \\ & X_{s+1} > \sqrt{\frac{1}{1-\alpha} AA^*} > \alpha I. \end{aligned}$$

Следователно, редицата $\{X_s\}$ е сходяща към положително определено решение на уравнението (1) .

Теорема 3. *Предполагаме, че уравнението (1) има решение и са изпълнени следните условия:*

*(*i*)* $\alpha^2(1-\alpha)I < AA^* < \beta^2(1-\beta)I$;

*(*ii*)* $q = \frac{\beta^2}{2\alpha(1-\beta)} < 1$.

Тогава

$$||X_s - X|| \leq q^s ||X_0 - X|| \leq q^s(\beta - \alpha),$$

където X *е решението на (1) и* X_s *е от редицата (3).*

Доказателство. От теорема 2 следва, че за уравнението (1) редицата (3) е сходяща към положително определено решение X на (1). Нека разгледаме спектралната норма на матрицата $X_s - X$.

$$||X_s - X|| = ||\sqrt{A(I - X_{s-1})^{-1}A^*} - \sqrt{A(I-X)^{-1}A^*}||.$$

Означаваме

$$P = A(I - X_{s-1})^{-1}A^*, \quad Q = A(I-X)^{-1}A^*.$$

Вярно е следното тъждество

$$\sqrt{P}(\sqrt{P} - \sqrt{Q}) + (\sqrt{P} - \sqrt{Q})\ \sqrt{Q} = P - Q.$$

От $X_{s-1} > X$ за всяко $s = 0, 1, \ldots$ следва ,че матрицата $Y = \sqrt{P} - \sqrt{Q}$ е положително определено решение на матричното уравнение

$$\sqrt{P}Y + Y\sqrt{Q} = P - Q.$$

Съгласно теорема 8.5.2 [7] ,то

$$Y = \int_0^\infty e^{-\sqrt{P}t}(P-Q)e^{-\sqrt{Q}t}\ dt. \tag{4}$$

Щом $\sqrt{P}$, $\sqrt{Q}$ са положително определени матрици, то интегралът (4) съществува и

$$e^{-\sqrt{P}t}(P-Q)e^{-\sqrt{Q}t} \to 0 \quad t \to \infty.$$

Тогава

$$\begin{aligned} ||X_s - X|| &\leq ||\int_0^\infty e^{-\sqrt{P}t}(P-Q)e^{-\sqrt{Q}t}\ dt|| \\ &\leq \int_0^\infty ||P-Q||||e^{-\sqrt{P}t}||||e^{-\sqrt{Q}t}||dt. \end{aligned}$$

За редицата (3) е изпълнено $\alpha I < X_s < \beta I$. Следователно,

$$||(I - X_s)^{-1}|| < \frac{1}{1-\beta}, \quad ||(I - X)^{-1}|| < \frac{1}{1-\beta},$$

$$P > \alpha^2 I, \quad Q > \alpha^2 I.$$

Тогава

$$\begin{aligned} ||X_s - X|| &\leq ||P - Q|| \int_0^\infty ||e^{-\alpha I t}||||e^{-\alpha I t}||dt \\ &\leq ||P - Q|| \int_0^\infty e^{-2\alpha t}\ dt \\ &= ||P - Q|| \frac{1}{2\alpha} \\ &= \frac{1}{2\alpha} ||A\left[(I - X_{s-1})^{-1} - (I - X)^{-1}\right] A^*||. \end{aligned}$$

Използваме тъждеството

$$(I - X)^{-1}((I - X) - (I - X_{s-1}))(I - X_{s-1})^{-1} = (I - X_{s-1})^{-1} - (I - X)^{-1}$$

и получаваме

$$\begin{aligned} ||X_s - X|| &\leq \frac{1}{2\alpha} ||A||^2 ||(I - X_{s-1})^{-1}||||(I - X)^{-1}||||X_{s-1} - X|| \\ &\leq \frac{1}{2\alpha(1-\beta)^2} ||A||^2 ||X_{s-1} - X|| \\ &\leq \frac{\beta^2}{2\alpha(1-\beta)} ||X_{s-1} - X||. \end{aligned}$$

Следователно,

$$||X_{s-1} - X|| \leq q^k ||X_0 - X|| \leq q^k(\beta - \alpha).$$

Лема 1. *Нека P и Q са положително определени матрици, за които е изпълнено $P - Q > 0$ и $PQ = QP$. Тогава $P^2 - Q^2 > 0$.*

Доказателство. Нека $H = P - Q$. Тогава

$$\begin{aligned} P^2 - Q^2 &= P(P - Q) + (P - Q)Q \\ &= (H + Q)H + HQ \\ &= H^2 + QH + HQ. \end{aligned}$$

Щом $PQ = QP$, то $QH = HQ$ и $QH > 0$. От тук следва,че $P^2 - Q^2$ е положително определена матрица.

Разглеждаме редицата от матрици

$$X_0 = I, \ X_{s+1} = I - A^* X_s^{-2} A, \quad s = 0, 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

Ще докажем следното:

Лема 2. *Ако матрицата A е нормална ($AA^* = A^*A$), то е изпълнено*

$$AX_s = X_s A, \quad s = 0, 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

където X_s са матрици от редицата (5).

Доказателство. Щом $X_0 = I$, то $AX_0 = X_0 A$. От условието $AA^* = A^*A$ получаваме

$$\begin{aligned} A - AA^*A &= A - A^*AA, \\ A\ (I - AA^*) &= (I - A^*A)\ A, \\ AX_1 &= X_1 A. \end{aligned}$$

Допускаме, че за всяко $k = 1, \ldots, s$ е изпълнено

$$AX_k = X_k A. \tag{7}$$

Ще докажем

$$AX_{k+1} = X_{k+1} A.$$

От допускането

$$AX_k = X_k A$$

пресмятаме

$$\begin{aligned} AX_k^2 &= X_k^2 A, \\ X_k^{-2} A &= A X_k^{-2}, \\ A^* X_k^{-2} AA &= A^* A X_k^{-2} A, \\ A - A^* X_k^{-2} AA &= A - A^* A X_k^{-2} A, \\ X_{k+1} A &= A X_{k+1}. \end{aligned}$$

Лема 3. *Ако матрицата A е нормална ($AA^* = A^*A$), то е изпълнено*

$$X_{s+1} X_s = X_s X_{s+1}, \quad s = 0, 1, 2, \ldots,$$

където X_s са матрица от редицата (5).

Доказателство. Щом като $X_0 = I$ и $X_1 = I - A^*A$, то $X_0X_1 = X_1X_0$. Да проверим равенството $X_1X_2 = X_2X_1$. Пресмятаме

$$\begin{aligned} X_1X_2 &= (I - A^*A)(I - A^*X_1^{-2}A) \\ &= I - A^*A - A^*X_1^{-2}A + A^*AA^*X_1^{-2}A, \\ X_2X_1 &= (I - A^*X_1^{-2}A)(I - A^*A) \\ &= I - A^*A - A^*X_1^{-2}A + A^*X_1^{-2}AA^*A. \end{aligned}$$

От условието $AA^* = A^*A$ получаваме

$$\begin{aligned} A^*AAA^* &= AA^*A^*A, \\ AA^* - A^*AAA^* &= AA^* - AA^*A^*A, \\ (I - A^*A)AA^* &= AA^*(I - A^*A), \\ X_1AA^* &= AA^*X_1. \end{aligned}$$

Умножаваме отляво последното равенство с матрицата X_1

$$\begin{aligned} X_1^2AA^* &= X_1AA^*X_1 = AA^*X_1^2, \\ AA^*X_1^{-2} &= X_1^{-2}AA^*, \\ A^*AA^*X_1^{-2}A &= A^*X_1^{-2}AA^*A. \end{aligned}$$

Следователно,

$$X_1X_2 = X_2X_1. \tag{8}$$

Допускаме, че за всяко $k = 1, \ldots, s$ е изпълнено

$$X_kX_{k-1} = X_{k-1}X_k. \tag{9}$$

Ще докажем

$$X_{k+1}X_k = X_kX_{k+1}.$$

Като отчетем,че $AX_k = X_kA$ пресмятаме

$$AA^*X_k = X_kAA^*, \tag{10}$$

$$X_k^{-2}AA^* = AA^*X_k^{-2}. \tag{11}$$

Използваме тъждеството

$$X_k^2AA^*X_{k-1}^2 = X_k^2AA^*X_{k-1}^2.$$

От предположенията (6) и (9) получаваме

$$\begin{aligned} X_k^2 X_{k-1}^2 AA^* &= AA^* X_k^2 X_{k-1}^2, \\ X_k^2 X_{k-1}^2 AA^* &= AA^* X_{k-1}^2 X_k^2, \\ AA^* X_k^{-2} X_{k-1}^{-2} &= X_{k-1}^{-2} X_k^{-2} AA^*. \end{aligned}$$

От равенство (11) следва

$$\begin{aligned} X_k^{-2} AA^* X_{k-1}^{-2} &= X_{k-1}^{-2} AA^* X_k^{-2}, \\ A^* X_k^{-2} AA^* X_{k-1}^{-2} A &= A^* X_{k-1}^{-2} AA^* X_k^{-2} A. \end{aligned}$$

Следователно,

$$(I - A^* X_k^{-2} A)(I - A^* X_{k-1}^{-2} A) = (I - A^* X_{k-1}^{-2} A)(I - A^* X_k^{-2} A),$$

$$X_{k+1} X_k = X_k X_{k+1}.$$

В следствие на така формулираните леми е възможно доказване сходимост на итерационния процес (5). Условията за тази сходимост,както и оценката на грешката са изложени в следващите две специално разработени теореми.

Теорема 4. *Ако в уравнението (1) матрицата A е нормална и съществува число $\alpha, \alpha > 1$, за което*

$$A^* A < \frac{\alpha - 1}{\alpha^3} I,$$

то уравнението (1) има положително определено решение.

Доказателство. Да разгледаме редицата (5). За X_0 имаме $X_0 = I > \frac{1}{\alpha} I,\ \alpha > 1$. За X_1 намираме

$$X_1 = I - A^* X_0^{-2} A = I - A^* A < I = X_0.$$

Имаме

$$X_1 = I - A^* A > I - \frac{\alpha - 1}{\alpha^3} I > I - \frac{\alpha - 1}{\alpha} I > \frac{1}{\alpha} I.$$

Нека допуснем, че

$$\frac{1}{\alpha} I < X_s < X_{s-1} < X_0.$$

Ще докажем, че

$$\frac{1}{\alpha}I < X_{s+1} < X_s.$$

От $X_s\ X_{s-1} = X_{s-1}\ X_s$ и $X_s < X_{s-1}$ получаваме

$$\begin{aligned} X_s^2 &< X_{s-1}^2, \\ X_s^{-2} &> X_{s-1}^{-2}, \\ X_{s+1} = I - A^* X_s^{-2} A &< I - A^* X_{s-1}^{-2} A = X_s. \end{aligned}$$

Следователно, матричната редица е монотонно намаляваща. От $X_s > \frac{1}{\alpha} I$ получаваме

$$X_s^{-2} < \alpha^2 I,$$

$$A^* X_s^{-2} A < \alpha^2 A^* A < \alpha^2 \frac{\alpha - 1}{\alpha^3} I.$$

За матрицата X_{s+1} намираме

$$X_{s+1} = I - A^* X_s^{-2} A > I - \frac{\alpha - 1}{\alpha} I = \frac{1}{\alpha} I.$$

Следователно, матричната редица е ограничена отдолу и сходяща към положително определено решение на матричното уравнение.

Теорема 5. *Ако в уравнението (1) матрицата A е нормална и съществува число $\alpha, \alpha > 1$,за което*

(i) $A^* A < \frac{\alpha - 1}{\alpha^3} I$,
(ii) $q = 2\|A\|^2 \alpha^4 < 1$,

то уравнението (1) има положително определено решение X , за което е изпълнено

$$\|X_s - X\| < q^s \frac{\alpha - 1}{\alpha}.$$

Доказателство. От теорема 4 следва, че за уравнението (1) редицата (5) е сходяща към положително определено решение X на (1). Разглеждаме спектралната норма на матрицата $X_s - X$

$$\begin{aligned} \|X_s - X\| &= \|I - A^* X_{s-1}^{-2} A - I + A^* X^{-2} A\| \\ &= \|A^* X^{-2} A - A^* X_{s-1}^{-2} A\| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \|A\|^2 \ \|X^{-2}(X_{s-1}^2 - X^2)X_{s-1}^{-2}\| \\
&\leq \|A\|^2 \ \|X^{-2}\| \ \|X_{s-1}^2\| \ \|(X_{s-1} - X) \ (X_{s-1} + X)\|.
\end{aligned}
$$

Съгласно теорема 4

$$\frac{1}{\alpha} I \leq X_{s-1} \leq X_0 = I.$$

Следователно,

$$\|X_{s-1}^{-2}\| \leq \alpha^2, \quad \|X_{s-1}\| \leq 1.$$

Тогава

$$
\begin{aligned}
\|X_s - X\| &= \|A\|^2 \ \alpha^2 \ \alpha^2 \|(X_{s-1} - X)\| \ \|(X_{s-1} + X)\| \\
&\leq \|A\|^2 \ \alpha^4 \ \|X_{s-1} - X\| \ \ (\|X_{s-1}\| + \|X\|) \\
&\leq 2 \ \|A\|^2 \ \alpha^4 \ \|X_{s-1} - X\| \\
&\leq q^s \frac{\alpha - 1}{\alpha}.
\end{aligned}
$$

Теорема 6. *Ако m, M са съответно най-малката и най-голямата собствена стойност на решението X на уравнението (1) и λ е собствена стойност на A, то*

$$\sqrt{m^2(1-M)} \leq |\lambda| \leq \sqrt{M^2(1-m)}.$$

Доказателство. Нека v е собствен вектор, съответен на собствената стойност λ на матрицата A и $|v| = 1$. Тъй като решението X на уравнението (1) е положително определена матрица то $0 < m \leq M < 1$. Тогава

$$
\begin{aligned}
\langle Xv, v\rangle + \langle A^* X^{-2} Av, v\rangle &= \langle v, v\rangle, \\
\langle Xv, v\rangle + \langle X^{-2} Av, Av\rangle &= 1, \\
\langle Xv, v\rangle + |\lambda|^2 \langle X^{-2} v, v\rangle &= 1, \\
m + \frac{|\lambda|^2}{M^2} \leq 1 &\leq M + \frac{|\lambda|^2}{m^2}.
\end{aligned}
$$

Следователно,

$$\sqrt{m^2(1-M)} \leq |\lambda| \leq \sqrt{M^2(1-m)}.$$

4.2. Числени експерименти

Направени са числени експерименти за пресмятане на положително определено решение на уравнението (1). При различни матрици A и различни стойности на n е пресметнато решението на уравнението. Означаваме $\varepsilon(Z) = \|Z + A^* Z^{-2} A - I\|_\infty$. Използвани са двата итерационни метода. Означаваме с X_s решението, получено чрез итерационния метод (3), т.е.

$$X_{s+1} = \sqrt{A(I - X_s)^{-1} A^*}, \quad X_0 = \beta I, \quad s = 0, 1, 2, \ldots$$

с Y_p решението, получено чрез итерационния метод (5), т.е.

$$Y_{p+1} = I - A^* Y_p^{-2} A, \quad Y_0 = I, \quad s = 0, 1, 2, \ldots.$$

Нека m_X е най-малкото число s, за което

$$\left(\frac{\beta^2}{2\alpha(1-\beta)}\right)^s (\beta - \alpha) \leq 10^{-5}$$

m_Y е най-малкото число p, за което

$$\left(2\|A\|^2 \alpha^4\right)^p \frac{\alpha - 1}{\alpha} \leq 10^{-5}.$$

Резултатите от експериментите са приведени в таблиците.

Пример 1. Нека A е от вида

$$A = (a_{ij}) = \begin{cases} a_{ij} = \frac{2i+n}{n^3} & i = j \\ a_{ij} = \frac{i+j}{n^3+80} & i \neq j \end{cases}$$

Таблица 1.

n	m_X	m_Y	$\varepsilon(X_s)$	$\varepsilon(Y_p)$
5	183	8	$1.2953E-8$	$1.1295E-8$
10	86	5	$6.5433E-7$	$1.4388E-8$
15	26	4	$1.3261E-4$	$1.6509E-8$
20	9	3	$7.3141E-5$	$2.1018E-7$
25	6	3	$2.1305E-4$	$5.1101E-8$
30	5	3	$2.0166E-4$	$1.6186E-8$

Пример 2. Нека A е от вида

$$A = diag[\frac{1}{1+8n}, \frac{2}{2+8n}, \ldots, \frac{n}{n+8n}]$$

Таблица 2.

n	m_X	m_Y	$\varepsilon(X_s)$	$\varepsilon(Y_p)$
5	8	4	$1.3642E-11$	$2.0428E-7$
10	35	4	$1.8189E-12$	$2.0428E-7$
15	35	4	$1.8189E-12$	$2.0428E-7$
20	35	4	$1.8189E-12$	$2.0428E-7$
25	35	4	$1.8189E-12$	$2.0428E-7$
30	35	4	$1.8189E-12$	$2.0428E-7$

Пример 3. Нека A е от вида

$$A = diag[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+3}, \ldots, \frac{1}{2n+1}]$$

Таблица 3.

n	m_X	m_Y	$\varepsilon(X_s)$	$\varepsilon(Y_p)$
5	5	5	$8.8567E-6$	$6.7302E-10$
10	4	4	$6.5318E-5$	$2.1645E-10$
15	3	3	$7.8259E-4$	$4.5274E-9$
20	3	3	$3.5721E-4$	$8.4401E-10$
25	3	3	$1.6869E-4$	$2.4401E-10$
30	3	3	$1.2405E-4$	$7.8216E-11$

Пример 4. Нека A е от вида

$$A = (a_{ij}) = \begin{cases} a_{ij} = \frac{i+j+n}{n^3} & i = j \\ a_{ij} = \frac{j-i}{n^3+300} & i < j \\ a_{ij} = \frac{i+j+n}{n^3+300} & j < i \end{cases}$$

Таблица 4.

n	m_X	m_Y	$\varepsilon(X_s)$	$\varepsilon(Y_p)$
5	10	6	$5.9145E-10$	$8.1375E-9$
10	86	5	$1.5915E-7$	$1.1285E-9$
15	12	4	$3.0880E-6$	$4.3474E-9$
20	14	3	$1.6161E-5$	$8.6426E-8$
25	8	3	$6.2730E-5$	$2.2659E-8$
30	6	3	$1.9734E-5$	$7.4479E-9$

Резултатите от числените експерименти, показват ефективността на описаните итерационни методи. За всички експерименти е изпълнено условието $Y_p > X_s$, т.е. матрицата $Y_p - X_s$ е положително определена.

Въз основа на извършените до тук доказателства в следващите два параграфа са предложени теореми и итерационни методи за намиране решение на неизследваните до сега уравнения $X - A^*X^{-2}A = I$ и $A^*X^{-2}A - X = I$.

§5. Положително определени решения на матричното уравнение $\mathbf{X} - \mathbf{A}^*\mathbf{X}^{-2}\mathbf{A} = \mathbf{I}$

5.1. Необходими и достатъчни условия

Ще опишем итерационни методи, сходящи към положително определено решиние на уравнението

$$X - A^*X^{-2}A = I. \tag{1}$$

Разглеждаме редицата от матрици

$$X_0 = I, \;\; X_{s+1} = I + A^*X_s^{-2}A, \quad s = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

В сила е

Лема 1. *Ако матрицата A е нормална ($AA^* = A^*A$), то е изпълнено*

$$AX_s = X_sA, \quad s = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

където X_s са матрица от редицата (2).

Доказателство. Щом $X_0 = I$ то $AX_0 = X_0A$. От условието $AA^* = A^*A$ получаваме

$$\begin{aligned} A + AA^*A &= A + A^*AA, \\ A\ (I + AA^*) &= (I + A^*A)\ A, \\ AX_1 &= X_1A. \end{aligned}$$

Допускаме, че за $k = 1, \ldots, s$ е изпълнено

$$AX_k = X_kA. \tag{4}$$

Ще докажем

$$AX_{k+1} = X_{k+1}A.$$

От допускането

$$AX_k = X_kA$$

пресмятаме

$$\begin{aligned}
AX_k^2 &= X_k^2 A, \\
X_k^{-2} A &= A X_k^{-2}, \\
A^* X_k^{-2} AA &= A^* A X_k^{-2} A, \\
A + A^* X_k^{-2} AA &= A + A^* A X_k^{-2} A, \\
X_{k+1} A &= A X_{k+1}.
\end{aligned}$$

Лема 2. *Ако матрицата A е нормална ($AA^* = A^*A$), то е изпълнено*

$$X_{s+1} X_s = X_s X_{s+1}, \quad s = 0, 1, 2, \ldots,$$

където X_s са матрица от редицата (2).

Доказателство. От $X_0 = I$ и $X_1 = I - A^*A$,то $X_0 X_1 = X_1 X_0$. Проверяваме равенството $X_1 X_2 = X_2 X_1$. Пресмятаме

$$\begin{aligned}
X_1 X_2 &= (I + A^*A)(I + A^* X_1^{-2} A) \\
&= I + A^*A + A^* X_1^{-2} A + A^* A A^* X_1^{-2} A, \\
X_2 X_1 &= (I + A^* X_1^{-2} A)(I + A^*A) \\
&= I + A^*A + A^* X_1^{-2} A + A^* X_1^{-2} A A^* A.
\end{aligned}$$

От условието $AA^* = A^*A$ получаваме

$$\begin{aligned}
A^* A A A^* &= A A^* A^* A, \\
AA^* + A^* A A A^* &= AA^* + A A^* A^* A, \\
(I + A^*A) AA^* &= AA^* (I + A^*A), \\
X_1 AA^* &= AA^* X_1.
\end{aligned}$$

Последното равенство умножаваме отляво с матрицата X_1

$$\begin{aligned}
X_1^2 AA^* &= X_1 A A^* X_1 = A A^* X_1^2, \\
AA^* X_1^{-2} &= X_1^{-2} AA^*, \\
A^* A A^* X_1^{-2} A &= A^* X_1^{-2} A A^* A.
\end{aligned}$$

Следователно,

$$X_1 X_2 = X_2 X_1. \tag{5}$$

Допускаме, че за $k = 1, \ldots, s$ е изпълнено

$$X_k X_{k-1} = X_{k-1} X_k. \tag{6}$$

Ще докажем

$$X_{k+1} X_k = X_k X_{k+1}.$$

Щом $AX_k = X_k A$

$$AA^* X_k = X_k AA^*, \tag{7}$$

$$X_k^{-2} AA^* = AA^* X_k^{-2}. \tag{8}$$

Използваме тъждеството

$$X_k^2 AA^* X_{k-1}^2 = X_k^2 AA^* X_{k-1}^2.$$

От предположенията (3) и (6) получаваме

$$\begin{aligned} X_k^2 X_{k-1}^2 AA^* &= AA^* X_k^2 X_{k-1}^2, \\ X_k^2 X_{k-1}^2 AA^* &= AA^* X_{k-1}^2 X_k^2, \\ AA^* X_k^{-2} X_{k-1}^{-2} &= X_{k-1}^{-2} X_k^{-2} AA^*. \end{aligned}$$

От равенство (8) е видно,че

$$\begin{aligned} X_k^{-2} AA^* X_{k-1}^{-2} &= X_{k-1}^{-2} AA^* X_k^{-2}, \\ A^* X_k^{-2} AA^* X_{k-1}^{-2} A &= A^* X_{k-1}^{-2} AA^* X_k^{-2} A. \end{aligned}$$

Следователно,

$$(I + A^* X_k^{-2} A)(I + A^* X_{k-1}^{-2} A) = (I + A^* X_{k-1}^{-2} A)(I + A^* X_k^{-2} A),$$

$$X_{k+1} X_k = X_k X_{k+1}.$$

Лема 3. *Ако матрицата A е нормална, то за редицата (2) е изпълнено*

$$X_{2s+2} X_{2s} = X_{2s} X_{2s+2}, \quad s = 0, 1, 2, \ldots.$$

Доказателство. Очевидно $X_0 X_2 = X_2 X_0$.
Допускаме, че

$$X_{2k-2} X_{2k} = X_{2k} X_{2k-2}.$$

Следователно,

$$\begin{aligned} X_{2k-2}X_{2k}X_{2k-2}X_{2k} &= X_{2k}X_{2k-2}X_{2k-2}X_{2k}, \\ X_{2k-2}^2X_{2k}^2 &= X_{2k}^2X_{2k-2}^2, \\ X_{2k-2}^{-2}X_{2k}^{-2} &= X_{2k}^{-2}X_{2k-2}^{-2}. \end{aligned}$$

Умножаваме от дясно с AA^* и получаваме

$$\begin{aligned} X_{2k-2}^{-2}X_{2k}^{-2}AA^* &= X_{2k}^{-2}X_{2k-2}^{-2}AA^*, \\ X_{2k-2}^{-2}AA^*X_{2k}^{-2} &= X_{2k}^{-2}AA^*X_{2k-2}^{-2}, \\ A^*X_{2k-2}^{-2}AA^*X_{2k}^{-2}A &= A^*X_{2k}^{-2}AA^*X_{2k-2}^{-2}. \end{aligned}$$

Съгласно (2) последното равенство има вида

$$\begin{aligned} (X_{2k-1}-I)(X_{2k+1}-I) &= (X_{2k+1}-I)(X_{2k-1}-I), \\ X_{2k-1}X_{2k+1} &= X_{2k+1}X_{2k-1}, \\ X_{2k-1}^{-2}X_{2k+1}^{-2} &= X_{2k+1}^{-2}X_{2k-1}^{-2}, \\ A^*X_{2k-1}^{-2}AA^*X_{2k+1}^{-2}A &= A^*X_{2k+1}^{-2}AA^*X_{2k-1}^{-2}A, \\ (X_{2k}-I)(X_{2k+2}-I) &= (X_{2k+2}-I)(X_{2k}-I), \\ X_{2k}X_{2k+2} &= X_{2k+2}X_{2k}. \end{aligned}$$

Напълно аналогично се доказва,че ако матрицата A е нормална,то X_{2s-1} и X_{2s+1} също комутират

Обобщавайки резултатите получени от лемите може да се формулира следното твърдение

Теорема 1. *Нека матрицата A е нормална. Тогава*

(i) *ако $X_s < X_{s+1}$, то $X_s^2 < X_{s+1}^2$, $s = 0, 1, \ldots$;*
(ii) *ако $X_{2s} < X_{2s+2}$, то $X_{2s}^2 < X_{2s+2}^2$, $s = 0, 1, \ldots$;*
(iii) *ако $X_{2s+1} < X_{2s-1}$, то $X_{2s+1}^2 < X_{2s-1}^2$, $s = 0, 1, \ldots$.*

Теорема 2. *Ако за спектралната норма на нормалната матрица A е изпълнено*

$$||A|| \leq \sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}, \tag{9}$$

то уравнението (1) притежава положително определено решение.

Доказателство. Разглеждаме редицата от матрици (2). За X_1 намираме

$$X_1 = I + A^* X_0^{-2} A = I + A^* A > I = X_0.$$

И тъй от $X_0 < X_1$ съгласно теорема 1 следва

$$\begin{aligned} X_0^{-1} &> X_1^{-1} \\ A^* X_0^{-2} A &> A^* X_1^{-2} A. \end{aligned}$$

Следователно, за X_2 получаваме

$$\begin{aligned} X_2 &= I + A^* X_1^{-2} A < I + A^* X_0^{-1} A = X_1, \\ X_2 &= I + A^* X_1^{-2} A > I = X_0. \end{aligned}$$

Тогава

$$X_0 < X_2 < X_1.$$

Аналогично за всеки две естествени числа r, s е изпълнено

$$X_0 = I < X_{2r} < X_{2r+2} < X_{2s+3} < X_{2s+1} < X_1 = I + A^* A.$$

Следователно, подредиците $\{X_{2r}\}$, $\{X_{2s+1}\}$ са сходящи към положително определени матрици. Тези редици имат обща граница. И наистина

$$\begin{aligned} ||X_{2s+1} - X_{2s}|| &= ||A^* X_{2s}^{-2} A - A^* X_{2s-1}^{-2} A|| \\ &= ||A^* \left(X_{2s}^{-2} - X_{2s-1}^{-2}\right) A|| \\ &= ||A^* X_{2s-1}^{-2} \left(X_{2s-1}^2 - X_{2s}^2\right) X_{2s}^{-2} A|| \\ &\leq ||A||^2 \; ||X_{2s-1}^{-2}|| \; ||X_{2s}^{-2}|| \; ||X_{2s-1}^2 - X_{2s}^2||. \end{aligned}$$

Щом

$$I < X_s < I + A^* A,$$

то

$$||X_s^{-2}|| < 1, \qquad ||X_s|| < 1 + ||A||^2.$$

И тъй

$$\begin{aligned} &X_{2s-1}^2 - X_{2s}^2 = X_{2s-1} \left(X_{2s-1} - X_{2s}\right) + \left(X_{2s-1} - X_{2s}\right) X_{2s}, \\ &||X_{2s-1}^2 - X_{2s}^2|| \leq \left(||X_{2s-1}|| + ||X_{2s}||\right) ||X_{2s-1} - X_{2s}||. \end{aligned}$$

Следователно,

$$||X_{2s+1} - X_{2s}|| \ \leq \ 2||A||^2 \left(1 + ||A||^2\right) ||X_{2s-1} - X_{2s}||.$$

Щом е изпълнено (9) ,то

$$q = 2\|A\|^2 \left(1 + \|A\|^2\right) < 1$$

и следователно,

$$\begin{aligned} \|X_{2s+1} - X_{2s}\| \ &\leq \ q\|X_{2s-1} - X_{2s}\| \\ &\ldots \\ &\leq \ q^{2s}\|X_1 - X_0\|. \end{aligned}$$

За описаният итерационен метод ,за границата X ,е известно

$$X_{2s} < X < X_{2s+1}, \quad s = 1, 2, \ldots.$$

Следователно,

$$\begin{aligned} \max\left(\|X - X_{2s}\|, \|X_{2s+1} - X\|\right) \ &< \ \|X_{2s+1} - X_{2s}\| \\ &< \ q^{2s}\|X_1 - X_0\| \\ &= \ q^{2s}\|AA^*\|. \end{aligned}$$

От тук, ако

$$q^{2s}\|AA^*\| < \varepsilon$$

и ε е малко положително число, то за решението X на уравнението (1) е изпълнено

$$\|X_{2s+1} - X\| < \varepsilon.$$

За да се достигне точност ε относно използваната спектрална норма са необходими поне

$$s = \frac{\ln \varepsilon - \ln \|AA^*\|}{2 \ln q} + 1$$

наброй итерации.

Следствие 1. *Ако X е положително определено решение на уравнението (1), то*

$$I < X < I + A^*A.$$

Следствие 2. *Ако λ е собствена стойност на положителното определено решение X на уравнението (1), то*

$$1 < \lambda < 1 + \rho(A^*A),$$

където $\rho(A^*A)$ е спектралния радиус на матрицата A^*A.

Теорема 3. *Ако m, M са съответно най-малката и най-голямата собствена стойност на решението X на уравнението* (1) *и λ е собствена стойност на A ,то*

$$\sqrt{M^2(m-1)} \leq |\lambda| \leq \sqrt{m^2(M-1)}.$$

Доказателство. Нека v е собствен вектор, съответен на собствената стойност λ на матрицата A и $|v| = 1$. Щом решението X на уравнението (1) е положително определена матрица, то $1 < m \leq M$. Тогава

$$\begin{aligned} \langle Xv, v\rangle - \langle A^*X^{-2}Av, v\rangle &= \langle v, v\rangle, \\ \langle Xv, v\rangle - \langle X^{-2}Av, Av\rangle &= 1, \\ \langle Xv, v\rangle - |\lambda|^2\langle X^{-2}v, v\rangle &= 1, \\ m - \frac{|\lambda|^2}{M^2} \leq 1 &\leq M - \frac{|\lambda|^2}{m^2}. \end{aligned}$$

Следователно,

$$\sqrt{M^2(m-1)} \leq |\lambda| \leq \sqrt{m^2(M-1)}.$$

Разглеждаме итерационния процес

$$X_0 = \alpha I, X_{s+1} = \sqrt{A(X_s - I)^{-1}A^*}, \quad s = 0, 1, 2, \ldots \tag{10}$$

Валидни са следните теореми:

Теорема 4. *Ако съществува реално число $\alpha > 2$ такова, че*

(i) $AA^* < \alpha^2(\alpha - 1)I$;

(ii) $\sqrt{\frac{AA^*}{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha^2}A^*A > I$;

(iii) $\frac{1}{2}\frac{\alpha^4}{\mu^2}\sqrt{\frac{\alpha-1}{\mu}}\ ||A||^2 < 1$,

където μ е най-малката собствена стойност на матрицата AA^*. Тогава уравнението (1) има положително определено решение.

Доказателство. Разглеждаме редицата от матрици (10). За X_1 намираме

$$X_1 = \sqrt{A(X_0 - I)^{-1}A^*} = \sqrt{\frac{AA^*}{\alpha - 1}} < \alpha I = X_0.$$

Следователно,

$$X_1 < X_0.$$

От условието `(ii)` на теоремата следва

$$X_1 = \sqrt{\frac{AA^*}{\alpha - 1}} > I + \frac{1}{\alpha^2}A^*A > I,$$

$$I < X_1 < X_0.$$

Пресмятаме

$$(X_1 - I)^{-1} > (X_0 - I)^{-1}.$$

За X_2 намираме

$$X_2 = \sqrt{A(X_1 - I)^{-1}A^*} > \sqrt{A(X_0 - I)^{-1}A^*} = X,$$

откъдето

$$X_1 < X_2.$$

От условието `(ii)` на теоремата произтича

$$X_1 - I = \sqrt{\frac{AA^*}{\alpha - 1}} - I > \frac{1}{\alpha^2}A^*A,$$

$$A(X_1 - I)^{-1}A^* < \alpha^2 I,$$

$$X_2 = \sqrt{A(X_1 - I)^{-1}A^*} < \alpha I = X_0.$$

Следователно,

$$I < X_1 < X_2 < X_0.$$

Аналогично получаваме, че за всеки две естествени числа s, k е изпълнено

$$I < X_1 < X_{2s+1} < X_{2s+3} < X_{2k+2} < X_{2k} < X_0 = \alpha I,$$

което означава ,че подредиците $\{X_{2k}\}$, $\{X_{2s+1}\}$ са сходящи към положително определени матрици. Те имат обща граница. И наистина

$$\|X_{2k} - X_{2k+1}\| = \|\sqrt{A(X_{2k-1} - I)^{-1}A^*} - \sqrt{A(X_{2k} - I)^{-1}A^*}\|.$$

Означаваме

$$P = A(X_{2k-1} - I)^{-1}A^*, \quad Q = A(X_{2k} - I)^{-1}A^*.$$

Вярно е следното тъждество

$$\sqrt{P}\ (\sqrt{P} - \sqrt{Q}) + (\sqrt{P} - \sqrt{Q})\ \sqrt{Q} = P - Q.$$

Щом $X_{2k-1} < X_{2k}$ за всяко $k = 0, 1, \ldots$,то матрицата $Y = \sqrt{P} - \sqrt{Q}$ е положително определено решение на матричното уравнение

$$\sqrt{P}\ Y + Y\ \sqrt{Q} = P - Q.$$

Съгласно теорема 8.5.2 [7]

$$Y = \int_0^\infty e^{-\sqrt{P}t}(P - Q)e^{-\sqrt{Q}t}\ dt. \tag{11}$$

В случай ,че $\sqrt{P}$, $\sqrt{Q}$ са положително определени матрици, то интегралът (11) съществува и

$$e^{-\sqrt{P}t}(P - Q)e^{-\sqrt{Q}t} \to 0 \quad t \to \infty.$$

Тогава

$$\begin{aligned} \|X_{2k} - X_{2k+1}\| &\leq \|\int_0^\infty e^{-\sqrt{P}t}(P - Q)e^{-\sqrt{Q}t}\ dt\| \\ &\leq \int_0^\infty \|P - Q\|\ \|e^{-\sqrt{P}t}\|\|e^{-\sqrt{Q}t}\|dt. \end{aligned}$$

За редицата (10) е изпълнено $X_1 < X_s$. Следователно,

$$\sqrt{\frac{AA^*}{\alpha - 1}} - I < X_s - I.$$

От условието `(ii)` на теоремата намираме

$$\frac{AA^*}{\alpha^2} < \sqrt{\frac{AA^*}{\alpha - 1}} - I,$$

$$\frac{AA^*}{\alpha^2} < X_s - I,$$
$$(X_s - I)^{-1} < \alpha^2 (AA^*)^{-1},$$
$$\|(X_s - I)^{-1}\| < \frac{\alpha^2}{\mu}.$$

Освен това

$$X_s < \alpha I,$$

откъдето

$$(X_s - I)^{-1} > (\alpha - 1)^{-1} I,$$
$$A(X_s - I)^{-1} A^* > \frac{AA^*}{(\alpha - 1)} > \frac{\mu I}{\alpha - 1},$$
$$\sqrt{A(X_s - I)^{-1} A^*} > \sqrt{\frac{\mu I}{\alpha - 1}}.$$

Тогава

$$\begin{aligned}
\|X_{2k} - X_{2k+1}\| &\leq \|P - Q\| \int_0^\infty e^{-2\sqrt{\frac{\mu}{\alpha-1}}t} dt \\
&= \|P - Q\| \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha - 1}{\mu}} \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha - 1}{\mu}} \|A(X_{2k-1} - I)^{-1} A^* - A(X_{2k} - I)^{-1} A^*\| \\
&\leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha - 1}{\mu}} \|A\|^2 \frac{\alpha^2}{\mu} \frac{\alpha^2}{\mu} \|X_{2k} - X_{2k-1}\|.
\end{aligned}$$

От условието (iii) на теоремата е видно

$$q = \frac{\alpha^4}{2\mu^2} \|A\|^2 \sqrt{\frac{\alpha - 1}{\mu}} < 1.$$

Следователно, редиците $\{X_{2k}\}$, $\{X_{2s+1}\}$ имат обща положително определена граница X, която е решение на матричното уравнение (1).

Теорема 5. *Ако съществува реално число $\alpha > 2$ такова, че*

(i) $AA^* > \alpha^2(\alpha-1)I$;

(ii) $\sqrt{\frac{AA^*}{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha^2}A^*A < I$;

(iii) $\frac{\|A\|^2}{2\alpha(\alpha-1)^2} < 1$.

Тогава уравнението (1) има положително определено решение.

Доказателство. Разглеждаме редицата от матрици (10). За X_1 намираме

$$X_1 = \sqrt{A(X_0 - I)^{-1}A^*} = \sqrt{\frac{AA^*}{\alpha - 1}} > \alpha I = X_0.$$

Следователно,

$$\begin{aligned} X_1 &> X_0, \\ (X_1 - I)^{-1} &< (X_0 - I)^{-1}, \\ X_2 = \sqrt{A(X_1 - I)^{-1}A^*} &< \sqrt{A(X_0 - I)^{-1}A^*} = X_1. \end{aligned}$$

От условието (ii) на теоремата имаме

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{AA^*}{\alpha - 1}} - I &< \frac{1}{\alpha^2}A^*A, \\ X_1 - I &< \frac{1}{\alpha^2}A^*A, \\ X_2 = \sqrt{A(X_1 - I)^{-1}A^*} &> \alpha I = X_0. \end{aligned}$$

От където

$$X_0 < X_2 < X_1.$$

Аналогично получаваме, че за всеки две естествени числа k, s е изпълнено

$$\alpha I = X_0 < X_{2s} < X_{2s+2} < X_{2k+3} < X_{2k+1} < X_1 = \sqrt{\frac{AA^*}{\alpha - 1}}.$$

Следователно подредиците $\{X_{2k}\}$, $\{X_{2s+1}\}$ са сходящи към положително определени матрици. Тези редици имат обща граница,

$$\|X_{2k+1} - X_{2k}\| = \|\sqrt{A(X_{2k} - I)^{-1}A^*} - \sqrt{A(X_{2k-1} - I)^{-1}A^*}\|.$$

Означаваме

$$P = A(X_{2k} - I)^{-1}A^*, \quad Q = A(X_{2k-1} - I)^{-1}A^*.$$

Вярно е следното тъждество

$$\sqrt{P}\ (\sqrt{P}-\sqrt{Q})+(\sqrt{P}-\sqrt{Q})\ \sqrt{Q}=P-Q.$$

Щом $X_{2k}<X_{2k-1}$ за всяко $k=0,1,\dots$, то матрицата $Y=\sqrt{P}-\sqrt{Q}$ е положително определено решение на матричното уравнение

$$\sqrt{P}\ Y+Y\ \sqrt{Q}=P-Q.$$

Съгласно теорема 8.5.2 [7]

$$Y=\int_0^\infty e^{-\sqrt{P}t}(P-Q)e^{-\sqrt{Q}t}\ dt. \tag{12}$$

В случай ,че $\sqrt{P}$, $\sqrt{Q}$ са положително определени матрици, то интегралът (12) съществува и

$$e^{-\sqrt{P}t}(P-Q)e^{-\sqrt{Q}t}\to 0 \quad t\to\infty.$$

Тогава

$$\begin{aligned}\|X_{2k+1}-X_{2k}\| &\le \|\int_0^\infty e^{-\sqrt{P}t}(P-Q)e^{-\sqrt{Q}t}\ dt\| \\ &\le \int_0^\infty \|P-Q\|\ \|e^{-\sqrt{P}t}\|\|e^{-\sqrt{Q}t}\|dt \\ &\le \|P-Q\|\int_0^\infty \ \|e^{-\sqrt{P}t}\|\|e^{-\sqrt{Q}t}\|dt.\end{aligned}$$

За редицата (10) е изпълнено $\alpha I<X_s<X_1$. Следователно,

$$(\alpha-1)^{-1}I>(X_s-I)^{-1},$$

$$\|(X_s-I)^{-1}\|<\frac{1}{\alpha-1}.$$

От условието `(ii)` на теоремата намираме

$$\sqrt{\frac{AA^*}{\alpha^2}}-I<\frac{1}{\alpha^2}A^*A,$$

$$X_1-I<\frac{1}{\alpha^2}A^*A,$$

$$X_s - I < X_1 - I < \frac{1}{\alpha^2} A^* A,$$
$$(X_s - I)^{-1} > \alpha^2 (A^* A)^{-1},$$
$$\sqrt{A(X_s - I)^{-1} A^*} > \alpha I.$$

Тогава

$$\begin{aligned}
\|X_{2k+1} - X_{2k}\| &\leq \|P - Q\| \int_0^\infty e^{-2\alpha t} dt \\
&\leq \|P - Q\| \frac{1}{2\alpha} \\
&\leq \frac{1}{2\alpha} \|A(X_{2k} - I)^{-1} A^* - A(X_{2k-1} - I)^{-1} A^*\| \\
&\leq \frac{1}{2\alpha} \|A\|^2 \|(X_{2k} - I)^{-1}\| \; \|(X_{2k-1} - I)^{-1}\| \; \|X_{2k-1} - X_{2k}\| \\
&\leq \frac{1}{2\alpha} \frac{1}{(\alpha - 1)^2} \|A\|^2 \|X_{2k-1} - X_{2k}\|.
\end{aligned}$$

От условието `(iii)` на теоремата е видно

$$q = \frac{\|A\|^2}{2\alpha(\alpha - 1)^2} < 1.$$

Следователно, редиците $\{X_{2k}\}$, $\{X_{2s+1}\}$ имат обща положително определена граница X, която е решение на матричното уравнение (1).

5.2. Числени експерименти

Направени са числени експерименти за пресмятане на положително определено решение на уравнението (1), като са използвани разгледаните итерационни процеси. При различни матрици A е пресметнато решението на уравнението. Означаваме $\varepsilon(Z) = \|Z - A^* Z^{-2} A - I\|_\infty$. Нека X_s решението, получено чрез итерационния метод

$$X_{s+1} = \sqrt{A(X_s - I)^{-1} A^*}, \quad X_0 = \alpha I, \quad s = 0, 1, 2, \ldots;$$

Y_p решението получено от

$$Y_{p+1} = I + A^* Y_p A, \qquad Y_0 = I, \quad p = 0, 1, 2, \ldots$$

и m_X е най-малкото число s, за което $\|X_s - X_{s-1}\|_\infty \leq 10^{-5}$.

Резултатите от експериментите са приведени в таблиците.

Пример 1. Нека A е от вида

$$A = (a_{ij}) = \begin{cases} a_{ij} = 17 + \frac{i+j}{100} & i = j \\ a_{ij} = \frac{i+j}{c} & i \neq j \end{cases}$$

Таблица 1.

n	c	α	m_X	$\varepsilon(X_s)$
5	n^2	7.3	24	$7.2329E-6$
5	n^3	7.5	24	$6.3833E-6$
5	n^5	7.5	23	$9.5764E-6$
10	n^3	7.2	22	$7.2187E-6$
10	n^5	7.5	23	$8.9644E-6$
15	n^3	7.2	22	$5.9585E-6$
20	n^3	7.2	21	$8.3616E-6$
25	n^5	7.35	24	$6.0593E-6$

Пример 2. Нека A е от вида

$$A = (a_{ij}) = \begin{cases} a_{ij} = 7 + \frac{i+j}{1000} & i = j \\ a_{ij} = \frac{i+j}{c} & i \neq j \end{cases}$$

Таблица 2.

n	c	α	m_X	$\varepsilon(X_s)$
5	n^3	4.1	28	$6.6908E-6$
5	n^4	4.3	29	$7.8767E-6$
10	n^3	4.1	27	$7.2724E-6$
10	$n^3/3$	4.2	29	$8.9445E-6$
10	$n^5/3$	4.2	28	$6.9855E-6$
15	n^3	4.2	28	$8.2086E-7$
20	n^4	4.2	28	$6.7309E-6$
25	n^3	4.25	28	$9.2232E-6$

Пример 3. Нека A е от вида

$$A = (a_{ij}) = \begin{cases} a_{ij} = \frac{100+i}{n} & i = j \\ a_{ij} = 0 & i \neq j \end{cases}$$

Таблица 3.

n	α	m_X	$\varepsilon(X_s)$
5	8	18	$8.1932E-6$
7	6.6	21	$6.3528E-6$
10	5.35	21	$7.6584E-6$
15	4.3	24	$6.9094E-6$
20	3.7	25	$8.6683E-6$
25	3.3	20	$7.8787E-6$

Забележка 1. За примерите 1, 2 и 3 при посочените α матрицата A удовлетворява условията на теорема 4.

Пример 4. Нека A е от вида

$$A = (a_{ij}) = \begin{cases} a_{ij} = 12 + \frac{i+j}{10} & i = j \\ a_{ij} = 0.1 + \frac{i+j}{c} & i \neq j \end{cases}$$

Таблица 4.

n	c	α	m_X	$\varepsilon(X_s)$
5	n^3	5.5	25	$7.3748E-6$
5	n^5	5.5	25	$6.7584E-6$
10	n^3	5.5	25	$9.8701E-6$
10	$n^5/2$	5.5	25	$9.6327E-6$
15	n^7	5.65	25	$9.9802E-6$
20	n^3	5.5	26	$7.0784E-6$
25	n^3	5.5	26	$7.2866E-7$

Пример 5. Нека A е от вида

$$A = (a_{ij}) = \begin{cases} a_{ij} = 22 + \frac{i+j}{10} & i = j \\ a_{ij} = 0 & i \neq j \end{cases}$$

Таблица 5.

n	α	m_X	$\varepsilon(X_s)$
5	8	22	$8.3485E-6$
10	8	23	$6.8265E-6$
15	8	23	$8.6568E-6$
20	8	24	$5.7699E-6$
25	8	24	$6.5613E-6$

Забележка 2. За примерите 4 и 5 при посочените α матрицата A удовлетворява условията на теорема 5.

Пример 6. Нека A е от вида

$$A = (a_{ij}) = \begin{cases} a_{ij} = \frac{1}{100}\ \left(17 + \frac{i+j}{10}\right) & i = j \\ a_{ij} = \frac{1}{100}\ \frac{i+j}{c} & i \neq j \end{cases}$$

Таблица 6.

n	c	m_X	$\varepsilon(Y_p)$
5	n^2	5	$4.6676E-7$
5	n^5	5	$2.5596E-7$
10	n^5	5	$2.7132E-7$
10	n^3	5	$2.9023E-7$
15	n^3	5	$2.9966E-7$
20	n^5	5	$3.0917E-7$
25	n^5	5	$5.5369E-7$

Пример 7. Нека A е от вида

$$A = (a_{ij}) = \begin{cases} a_{ij} = \frac{1}{20}\ \left(17 + \frac{i+j}{10}\right) & i = j \\ a_{ij} = \frac{1}{20}\ \frac{i+j}{c} & i \neq j \end{cases}$$

Таблица 7.

n	c	m_X	$\varepsilon(Y_p)$
5	n^3	8	$1.4572E-6$
5	n^4	8	$1.0519E-6$
10	n^3	8	$1.24325-6$
10	$n^5/3$	8	$1.0057E-6$
15	n^3	8	$1.1787E-6$
20	n^4	8	$1.0556E-6$
25	n^5	9	$1.2329E-6$

Пример 8. Нека A е от вида

$$A = (a_{ij}) = \begin{cases} a_{ij} = \frac{1}{20}\ \left(12 + \frac{i+j}{10}\right) & i = j \\ a_{ij} = \frac{1}{20}\ \left(0.1 + \frac{i+j}{c}\right) & i \neq j \end{cases}$$

Таблица 8.

n	c	m_X	$\varepsilon(Y_p)$
5	n^3	14	$3.5018E-6$
5	n^5	14	$2.6308E-6$
10	n^3	15	$2.46555-6$
10	$n^5/2$	15	$2.0803E-6$
15	n^7	15	$4.3042E-6$
20	n^5	16	$3.2891E-6$
25	n^5	18	$4.6281E-6$

Пример 9. Нека A е от вида

$$A = (a_{ij}) = \begin{cases} a_{ij} = \frac{100+i}{40n} & i = j \\ a_{ij} = 0 & i \neq j \end{cases}$$

Таблица 9.

n	m_X	$\varepsilon(Y_p)$
5	12	$1.2947E-6$
7	9	$6.0271E-7$
10	7	$3.06165-7$
15	6	$4.9547E-8$
20	5	$7.3559E-8$
25	5	$1.2707E-8$

Забележка 3. За примерите 6,7,8, и 9 матрицата A удовлетворява условията на теорема 2.

§6. Положително определени решения на матричното уравнение $A^*X^{-2}A - X = I$

6.1. Необходими и достатъчни условия

Ще опишем итерационен метод, сходящ към положително определено решиние на уравнението

$$A^*X^{-2}A - X = I. \tag{1}$$

Теорема 1. *Нека λ и μ са съответно най-малката и най-голямата собствена стойност на матрицата AA^*. Ако μ и λ удовлетворяват условието*

$$\mu^2(\sqrt{\mu} + 1) < 4\lambda, \tag{2}$$

то уравнението (1) притежава положително определено решение.

Доказателство. Да разгледаме редицата от матрици

$$X_0 = 0, \;\; X_{s+1} = \sqrt{A(X_s + I)^{-1}A^*}, \quad s = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

За X_1 намираме

$$\begin{aligned} X_1 &= \sqrt{AA^*} > 0 = X_0, \\ A(X_1 + I)^{-1}A^* &< A(X_0 + I)^{-1}A^*, \\ X_2 = \sqrt{A(X_1 + I)^{-1}A^*} &< \sqrt{A(X_0 + I)^{-1}A^*} = X_1. \end{aligned}$$

Следователно,

$$X_0 < X_2 < X_1.$$

Аналогично получаваме, че за всеки две естествени числа k, s е изпълнено

$$0 = X_0 < X_{2k} < X_{2k+2} < X_{2s+3} < X_{2s+1} < X_1$$

и така подредиците $\{X_{2k}\}$, $\{X_{2s+1}\}$ са сходящи към положително определени матрици. Те имат обща граница. И наистина

$$\|X_{2k+1} - X_{2k}\| \;=\; \|\sqrt{A(X_{2k} + I)^{-1}A^*} - \sqrt{A(X_{2k-1} + I)^{-1}A^*}\|.$$

Полагаме

$$P = A(X_{2k} + I)^{-1}A^*, \quad Q = A(X_{2k-1} + I)^{-1}A^*.$$

След аналогични разсъждения получаваме

$$\begin{aligned} \|X_{2k+1} - X_{2k}\| &\leq \|\int_0^\infty e^{-\sqrt{P}t}(P-Q)e^{-\sqrt{Q}t}\ dt\| \\ &\leq \|P-Q\|\int_0^\infty \|e^{-\sqrt{P}t}\|\|e^{-\sqrt{Q}t}\|dt. \end{aligned}$$

За редицата (3) е изпълнено $0 < X_k < X_1$.
Следователно,

$$X_k + I > I,$$

$$\|(X_k + I)^{-1}\| < 1,$$

$$(X_k + I)^{-1} > (\sqrt{AA^*} + I)^{-1},$$

$$\sqrt{A(X_k + I)^{-1}A^*} > \sqrt{A(\sqrt{AA^*} + I)^{-1}A^*}.$$

Понеже

$$\lambda I < AA^* < \mu I,$$

$$\sqrt{AA^*} + I < (\sqrt{\mu} + 1)I,$$

$$A(\sqrt{AA^*} + I)^{-1}A^* > (\sqrt{\mu} + 1)^{-1}AA^* > (\sqrt{\mu} + 1)^{-1}\lambda I,$$

$$A(\sqrt{AA^*} + I)^{-1}A^* > \frac{\lambda}{\sqrt{\mu} + 1}I,$$

то

$$\sqrt{A(X_k + I)^{-1}A^*} > \sqrt{A(\sqrt{AA^*} + I)^{-1}A^*} > \sqrt{\frac{\lambda}{\sqrt{\mu} + 1}}I.$$

Тогава

$$\begin{aligned} \|X_{2k+1} - X_{2k}\| &\leq \|P-Q\|\int_0^\infty e^{-2\sqrt{\frac{\lambda}{\sqrt{\mu}+1}}t}dt \\ &\leq \|P-Q\|\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{\mu}+1}{\lambda}} \\ &\leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{\mu}+1}{\lambda}}\|A(X_{2k} + I)^{-1}A^* - A(X_{2k-1} + I)^{-1}A^*\| \end{aligned}$$

$$\leq \|A\|^2 \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{\mu}+1}{\lambda}} \|(X_{2k}+I)^{-1}\| \; \|(X_{2k-1}+I)^{-1}\| \\ \|X_{2k-1}-X_{2k}\|$$

$$\leq \|A\|^2 \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{\mu}+1}{\lambda}} \|X_{2k-1}-X_{2k}\|.$$

От условието (2) на теоремата, получаваме

$$\frac{\|A\|^2}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{\mu}+1}{\lambda}} < \frac{\mu}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{\mu}+1}{\lambda}} < 1.$$

Следователно, редиците $\{X_{2k}\}$, $\{X_{2s+1}\}$ имат обща положително определена граница X, която е решение на матричното уравнение (1).

Теорема 2. *Ако $X > 0$ е решение на уравнението (1), то*

$$\sqrt{A(I+\sqrt{AA^*})^{-1}A^*} < X < \sqrt{AA^*}.$$

Доказателство. Ако X е положително определено решение на (1), то

$$A^*X^{-2}A > I,$$
$$X^2 < AA^*,$$
$$X = A^*X^{-2}A - I < \sqrt{AA^*},$$
$$X^2 > A(I+\sqrt{AA^*})^{-1}A^*.$$

Следователно,

$$\sqrt{A(I+\sqrt{AA^*})^{-1}A^*} < X < \sqrt{AA^*}.$$

Теорема 3. *Ако m, M са съответно най-малката и най-голямата собствена стойност на решението X на уравнението (1) и λ е собствена стойност на A, то*

$$\sqrt{m^2(m+1)} \leq |\lambda| \leq \sqrt{M^2(M+1)}.$$

Доказателство. Нека v е собствен вектор, съответен на собствената стойност λ на матрицата A и $|v| = 1$. Щом решението X на

уравнението (1) е положително определена матрица,то $1 < m \leq M$. Тогава

$$\begin{aligned}\langle A^* X^{-2} A v, v\rangle - \langle Xv, v\rangle &= \langle v, v\rangle,\\ \langle X^{-2} A v, Av\rangle - \langle Xv, v\rangle &= 1,\\ |\lambda|^2 \langle X^{-2} v, v\rangle - \langle Xv, v\rangle &= 1,\\ \frac{|\lambda|^2}{M^2} - M \leq 1 &\leq \frac{|\lambda|^2}{m^2} - m.\end{aligned}$$

Следователно,

$$\sqrt{m^2(m+1)} \leq |\lambda| \leq \sqrt{M^2(M+1)}.$$

6.2. Числени експерименти

Направени са числени експерименти за пресмятане на положително определено решение на уравнението (1), като е използван разгледаният итерационен процес. При различни матрици A е пресметнато решението на уравнението. Означаваме $\varepsilon(Z) = \|Z - A^* Z^{-2} A - I\|_\infty$, а с X_s решението, получено чрез итерационния метод

$$X_{s+1} = \sqrt{A(X_s - I)^{-1} A^*}, \quad X_0 = \alpha I, \quad s = 0, 1, 2, \ldots$$

Нека m_X е най-малкото число s, за което $\|X_s - X_{s-1}\|_\infty \leq 10^{-5}$.

Резултатите от експериментите са приведени в таблиците.

Пример 1. Нека A е от вида:

$$A = (a_{ij}) = \begin{cases} a_{ij} = 0.5 + \frac{i+j}{100} & i = j \\ a_{ij} = \frac{i+j}{1000} & i \neq j \end{cases}$$

Таблица 1.

n	m_X	$\varepsilon(X_s)$
5	9	$2.9688E-6$
7	9	$4.9395E-6$
10	9	$1.05975-6$
15	10	$7.2240E-6$
20	11	$5.1160E-6$

Пример 2. Нека A е от вида:

$$A = (a_{ij}) = \begin{cases} a_{ij} = 1 + \frac{i+j}{100} & i = j \\ a_{ij} = 0 & i \neq j \end{cases}$$

Таблица 2.

n	m_X	$\varepsilon(X_s)$
5	10	$9.1871E-6$
7	11	$2.4753E-6$
10	11	$3.19925-6$
15	11	$4.7285E-6$
20	11	$6.7192E-6$

Литература

[1] Петков М.,Боршукова Ст., Модифициран метод на Нютон за коренуване на матрици, София, 1974.

[2] Садовничи В.А., Теория Операторов, Москва, 1979.

[3] Салах Ел-Сайд М., Теореми за съществуване и числено пресмятане на положително определени решения на две нелинейни матрични уравнения. 25 Пролетна конференция на Съюза на математиците в България, Казанлък, 1996.

[4] Салах Ел-Сайд М., Изследване на специални матрици и числени методи за специални матрични уравнения. Кандидатска дисертация, София, 1996.

[5] Engwerda J.C., Andre C.M.Ran and Rijkeboer A.L., Necessary and Sufficient Conditions for the Existence of a Positive Definite Solution of the Matrix Equation $X + A^* X^{-1} A = Q$, *Linear Algebra Appl.* 186:255-275 (1993).

[6] Engwerda J.C., On the Existence of a Positive Definite Solution of the Matrix Equation $X + A^T X^{-1} A = I$, *Linear Algebra Appl.* 194:91-108 (1993).

[7] Lankaster P., *Theory of Matrices.* Academic Press. New York (1969).

Съдържание: